REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

ALAIN GHOUILA-HOURI

Sur la généralisation de la notion de commande d'un système guidable

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle,
tome 1, n° 4 (1967), p. 7-32.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_4_7_0

© AFCET, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA GENERALISATION DE LA NOTION DE COMMANDE D'UN SYSTEME GUIDABLE

par Alain GHOUILA-HOURI

Résumé. — On donne la définition d'une commande-limite d'un système guidable, puis un théorème d'approximation. Le théorème d'existence de la réponse à une commande-limite permet l'étude de problèmes d'existence de commandes-limites optimales. On étudie ensuite la différentiabilité de la réponse par rapport à la commande, ce qui conduit à des conditions nécessaires d'optimalité du type de Pontrjagin. Enfin un algorithme est donné pour la résolution de certains problèmes d'optimalité.

Le travail que nous présentons ici a été effectué par Alain Ghouila-Houri, décédé prématurément le 3 octobre 1966 à l'âge de 27 ans.

Ancien élève de l'École Polytechnique, Docteur ès Sciences, Alain Ghouila-Houri, qui a été Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Caen, a laissé des travaux bien connus dont notamment : Programmes, Jeux et Réseaux de Transport, écrit en collaboration avec Claude Berge.

La présente étude a été réalisée dans le cadre d'une convention de recherche entre la D.G.R.S.T. et la Faculté des Sciences de Caen. Elle a été laissée par l'auteur sous forme de mémoire dactylographié [4]. Une partie des résultats a fait l'objet d'une communication au Congrès d'Automatique théorique de Paris en 1965 [5].

Ce mémoire a été révisé par une équipe de chercheurs du Laboratoire d'Automatique Théorique de la Faculté des Sciences de Caen, parmi lesquels nous tenons à remercier M. Étienne Lanery pour son précieux concours.

Cet article présente des idées qui s'apparentent à celles de McShane [6], Gamkrelidze [3] et Warga [7], mais présente une forte originalité tant par la formalisation des problèmes et les techniques utilisées que par l'unité de pensée qui préside à l'examen des nombreuses questions (théorèmes d'existence, condition d'optimalité, algorithme de résolution) qui y sont abordées.

§ 1. COMMANDES-LIMITES

On appelle *système guidable* d'ordre n la donnée :

- d'un espace topologique $\mathcal{U}$ appelé *espace de commande*,
- d'une application continue f de $\mathbf{R}^n \times \mathcal{U} \times \mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^n$.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que l'espace $\mathcal{U}$ est compact.

Étant donné un nombre $T > 0$, on appelle *commande mesurable* sur l'intervalle $[0, T]$ toute application mesurable $t \rightarrow U(t)$ de $[0, T]$ dans $\mathcal{U}$. Étant donné un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et une commande mesurable U définie dans l'intervalle $[0, T]$, on considère généralement l'équation intégrale associée à x_0 et U , soit

$$X(t) = x_0 + \int_0^t f[X(s), U(s), s] ds \quad (0 \leq t \leq T). \quad (1)$$

Dans l'ensemble Q_T^2 des commandes mesurables définies dans l'intervalle $[0, T]$, il faut distinguer l'ensemble Q_T^1 des *commandes continues par morceaux* ; et dans Q_T^1 , il faut distinguer l'ensemble Q_T^0 des *commandes à paliers*. On a ainsi $Q_T^0 \subset Q_T^1 \subset Q_T^2$.

Il est bon, pour étudier des problèmes d'existence en théorie de la commande optimale, de définir une structure uniforme convenable sur l'ensemble Q_T^2 , ce qui amène ensuite inévitablement à considérer le complété de Q_T^2 . Nous allons ici procéder directement, c'est-à-dire que nous définissons d'emblée ce complété.

Définition. — Nous appellerons *commande-limite*, ou plus simplement *commande* dans l'intervalle $[0, T]$ toute mesure de Radon positive sur $[0, T] \times \mathcal{U}$ qui se projette sur $[0, T]$ suivant la mesure de Lebesgue. Nous désignerons par Q_T l'ensemble des commandes-limites ; cet ensemble sera muni de la topologie vague des mesures de Radon : Q_T est ainsi un espace compact.

Nous allons maintenant plonger Q_T^2 dans Q_T . A toute commande mesurable U nous associons la mesure de Radon μ_U sur $[0, T] \times \mathcal{U}$ définie en posant, pour toute fonction numérique continue $(t, u) \rightarrow \varphi(t, u)$ définie dans $[0, T] \times \mathcal{U}$:

$$\int \varphi(t, u) \mu_U^{t, u} = \int_0^T \varphi[t, U(t)] dt$$

On constate immédiatement que μ_U est positive, et qu'elle se projette sur $[0, T]$ suivant la mesure de Lebesgue. Ce plongement est injectif, en ce sens que si on a $\mu_{U_1} = \mu_{U_2}$, on a $U_1(t) = U_2(t)$ presque partout. En identifiant les éléments de Q_T^2 à leurs images, on obtient ainsi

$$Q_T^0 \subset Q_T^1 \subset Q_T^2 \subset Q_T.$$

Étant donné un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et une commande $\mu \in Q_T$, nous leur associerons l'équation intégrale

$$X(t) = x_0 + \int_{[0,t] \times \mathcal{U}} f[X(s), u, s] \mu^{s,u} \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2)$$

où X est une fonction continue de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$.

Si $\mu = \mu v$ est un élément de Q_T^0 , l'équation intégrale (2) s'écrit

$$X(t) = x_0 + \int_0^t f[X(s), U(s), s] ds \quad (0 \leq t \leq T);$$

on retrouve ainsi, dans ce cas, l'équation intégrale (1).

Théorème 1. — Q_T^0 est partout dense dans Q_T .

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ des fonctions numériques continues définies dans $[0, T] \times \mathcal{U}$, et soit un nombre $\varepsilon > 0$. On peut facilement trouver des nombres $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{r-1} < t_r = T$, et des ensembles boréliens $A_1, A_2, \dots, A_s$ formant une partition de $\mathcal{U}$ tels que, quels que soient $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, s$ et $k = 1, 2, \dots, m$,

$$\left\{ \begin{array}{l} t, t' \in [t_{i-1}, t_i[\\ u, u' \in A_j \end{array} \right\} \Rightarrow |\varphi_k(u, t) - \varphi_k(u', t')| < \varepsilon$$

Soit μ un élément de Q_T ; posons :

$$k_{ij} = \int_{[t_{i-1}, t_i[\times A_j} \mu^{s,u} \quad (i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s).$$

On a :

$$\sum_{j=1}^s k_{ij} = t_i - t_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Soient

$$B_{i,j} = [t_{i-1} + \sum_{j' < j} k_{ij'}, t_{i-1} + \sum_{j' \leq j} k_{ij'}[$$

Soient $u_1, u_2, \dots, u_s$ des éléments quelconques de $A_1, A_2, \dots, A_s$.

Soit $U \in Q_T^0$ définie par

$$U(t) = u_j, \quad \text{pour} \quad t \in B_{i,j}.$$

Quels que soient i, j, k le nombre

$$l_{i,j,k} = \int_{B_{i,j} \times \mathcal{U}} \varphi_k(t, u) \cdot \mu^{t,u} = \int_{B_{i,j}} \varphi_k(t, u_j) dt$$

vérifie

$$k_{ij} \inf \{ \varphi_k(t, u) \mid t \in [t_{i-1}, t_i[, u \in A_j \}$$

$$\leq l_{i,j,k} \leq k_{ij} \sup \{ \varphi_k(t, u) \mid t \in [t_{i-1}, t_i[, u \in A_j \},$$

et par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} k_{ij} \inf \{ \varphi_k(t, u) \mid t \in [t_{i-1}, t_i[, u \in A_j \} \\ \leq \int_{[t_{i-1}, t_i[\times A_j} \varphi_k(t, u) \mu^{t,u} \\ \leq k_{ij} \sup \{ \varphi_k(t, u) \mid t \in [t_{i-1}, t_i[, u \in A_j \}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$l_{i,j,k} - \int_{[t_{i-1}, t_i[\times A_j} \varphi_k(t, u) \mu^{t,u} \leq k_{ij} \varepsilon$$

On a alors, quel que soit $k (k = 1, 2, \dots, m)$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{[0, T] \times \mathbb{U}} \varphi_k(t, u) \mu^{t,u} - \int_0^T \varphi_k[t, U(t)] dt \right| \\ \leq \varepsilon \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s k_{ij} = \varepsilon T. \end{aligned}$$

Nous venons de démontrer que tout voisinage d'un élément $\mu \in Q_T$ rencontre Q_T^0 : autrement dit, Q_T^0 est partout dense dans Q_T .

§ 2. EXISTENCE, UNICITE ET CONTINUITE DE LA SOLUTION DE L'EQUATION INTEGRALE

Nous allons d'abord démontrer un lemme. Considérons une application continue $(x_0, \rho, t) \rightarrow M(x_0; \rho, t)$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$.

Lemme. — *Il existe une application semi-continue inférieurement $x_0 \rightarrow \theta_{x_0}$ de $\mathbf{R}^n$ dans la demi-droite étendue $]0, +\infty]$, et une application continue $(x_0, t) \rightarrow \rho(x_0, t)$ définie pour $0 \leq t < \theta_{x_0}$, et à valeurs dans $\mathbf{R}^+$, telles que*

$$\rho(x_0, t) \geq \int_0^t M[x_0; \rho(x_0, s), s] ds \quad (3)$$

pour $0 \leq t < \theta_{x_0}$.

Posons :

$$N(x_0; \rho) = \max_{0 \leq t \leq \rho} M(x_0; \rho, t)$$

$$P(x_0; \rho) = \max \{ 1, N(x_0; \rho) \}.$$

Les applications $(x_0, \rho) \rightarrow N(x_0; \rho)$ et $(x_0, \rho) \rightarrow P(x_0; \rho)$ sont continues.

Considérons maintenant l'application $(x_0, r) \rightarrow t(x_0, r)$ définie par

$$t(x_0, r) = \int_0^r \frac{d\rho}{P(x_0; \rho)}.$$

Cette application est continue, croissante par rapport à r , et sa dérivée partielle par rapport à r est

$$\frac{\partial t(x_0, r)}{\partial r} = \frac{1}{P(x_0, r)} > 0.$$

Il en résulte que si l'on pose :

$$\theta_{x_0} = \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{P(x_0; \rho)} = \sup_{r>0} \int_0^r \frac{d\rho}{P(x_0; \rho)},$$

l'application $x_0 \rightarrow \theta_{x_0}$ de $\mathbf{R}^n$ dans $]0, +\infty]$ est semi-continue inférieurement. D'autre part, soit l'application $(x_0, t) \rightarrow \rho(x_0, t)$ définie pour $0 \leq t < \theta_{x_0}$ par

$$t[x_0, \rho(x_0, t)] = \int_0^{\rho(x_0, t)} \frac{d\rho}{P(x_0; \rho)} = t.$$

Cette application est continue, et elle vérifie

$$\frac{\partial \rho(x_0; t)}{\partial t} = P[x_0; \rho(x_0, t)],$$

et $\rho(x_0, 0) = 0$.

On a alors :

$$\rho(x_0; t) = \int_0^t P[x_0; \rho(x_0, s)] ds \geq \int_0^t ds = t$$

et

$$\rho(x_0, t) = \int_0^t P[x_0; \rho(x_0, s)] ds \geq \int_0^t N[x_0; \rho(x_0, s)] ds.$$

Comme on a $s \leq \rho(x_0, s)$, on a :

$$M[x_0; \rho(x_0, s), s] \leq N[x_0; \rho(x_0, s)],$$

d'où

$$\rho(x_0, t) \geq \int_0^t M[x_0; \rho(x_0, s), s] ds,$$

ce qui achève la démonstration.

Dorénavant, nous supposons que $M(x_0; \rho, t)$ vérifie

$$\|x - x_0\| \leq \rho, u \in \mathcal{U} \text{ et } t \geq 0 \Rightarrow \|f(x, u, t)\| \leq M(x_0; \rho, t).$$

On pourra prendre par exemple

$$M(x_0; \rho, t) = \text{Max} \{ \|f(x, u, t)\| \mid \|x - x_0\| \leq \rho, u \in \mathcal{U} \}.$$

REMARQUE. — Supposons qu'il existe un point $a_0 \in \mathbf{R}^n$ tel que
 $M(a_0, \rho) = \text{Max} \{ \|f(x, u, t)\| \mid \|x - a_0\| \leq \rho, u \in \mathcal{U}, t \geq 0 \} < \infty$,
 quel que soit $\rho \geq 0$, et supposons en outre que l'on ait

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{d\rho}{M(a_0, \rho)} = +\infty, \quad \text{pour tout nombre } \alpha > 0.$$

Si alors x_0 est un point quelconque de $\mathbf{R}^n$, on a

$$M(x_0, \rho) \leq M(a_0, \rho + \|x_0 - a_0\|) < \infty$$

quel que soit $\rho \geq 0$, et aussi

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{d\rho}{M(x_0, \rho)} &\geq \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{d\rho}{M(a_0, \rho + \|x_0 - a_0\|)} \\ &= \int_{\alpha + \|x_0 - a_0\|}^{+\infty} \frac{d\rho}{M(a_0, \rho)} = +\infty. \end{aligned}$$

Supposons qu'en outre la fonction $M(x_0, \rho)$ soit continue : nous dirons alors que le système vérifie la condition (H).

Supposons que le système vérifie la condition (H). En prenant

$$M(x_0; \rho, t) = M(x_0, \rho),$$

on aura

$$N(x_0, \rho) = M(x_0, \rho) \quad \text{et} \quad P(x_0, \rho) = \text{Max} \{ 1, M(x_0, \rho) \},$$

d'où

$$\theta_{x_0} = \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{P(x_0, \rho)} = +\infty \quad \text{quel que soit } x_0 \in \mathbf{R}^n.$$

Nous allons maintenant étudier l'équation intégrale (2), mais dans un cadre un peu plus large que celui que nous avons défini ⁽¹⁾. Désignons par Z_T l'ensemble des mesures de Radon positives sur $[0, T] \times U$ dont la projection sur $[0, T]$ est inférieure ou égale à la mesure de Lebesgue : avec la topologie faible, Z_T est un espace compact, et Q_T est un sous-espace de Z_T . Nous allons étudier l'équation intégrale (2) en prenant pour μ un élément quelconque de Z_T .

Étant donné un ensemble quelconque $A \subset \mathbf{R}^n$, nous poserons

$$\theta_A = \text{Inf} \{ \theta_{x_0} \mid x_0 \in A \}.$$

Si A est borné, on aura :

$$\theta_A \geq \text{Min} \{ \theta_{x_0} \mid x_0 \in \bar{A} \} > 0.$$

(1) Ce cadre est introduit essentiellement en vue du théorème 5 bis du paragraphe 6. (Note de la Rédaction.)

Théorème 2. — *Quels que soient $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $T \in]0, \theta_{x_0}[$ et $\mu \in Z_T$, l'équation intégrale (2) admet au moins une solution vérifiant*

$$\|X(t) - x_0\| \leq \rho(x_0, t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Si f est continûment différentiable par rapport à x ⁽¹⁾, alors quels que soient $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $T > 0$ et $\mu \in Z_T$, l'équation intégrale (2) admet au plus une solution. De plus, si f est continûment différentiable par rapport à x , si A est une partie de $\mathbf{R}^n$, et si T est un nombre vérifiant $0 < T < \theta_A$, l'application $(x_0, \mu, t) \rightarrow X[x_0, \mu, t]$ de $A \times Z_T \times [0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$X[x_0, \mu, t] = x_0 + \int_{[0, t] \times \mathcal{U}} f[X[x_0, \mu, s], u, s] \mu^{s, u} \quad (0 \leq t \leq T)$$

est continue.

1° Supposons f continûment différentiable, et démontrons l'unicité de la solution. Soient $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $T > 0$, $\mu \in Z_T$; et soient ξ_1, ξ_2 deux applications continues de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$ vérifiant

$$\xi_i(t) = x_0 + \int_{[0, t] \times \mathcal{U}} f[\xi_i(s), u, s] \mu^{s, u} \quad (0 \leq t \leq T) \quad (i = 1, 2).$$

Posons :

$$\rho = \max \{ \|\xi_i(t)\| \mid i = 1, 2; 0 \leq t \leq T \}.$$

Comme f est continûment différentiable par rapport à x , il existe un nombre $k > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|x_1\|, \|x_2\| &\leq \rho, u \in \mathcal{U} \text{ et } 0 \leq t \leq T \\ &\Rightarrow \|f(x_1, u, t) - f(x_2, u, t)\| \leq k \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

On a alors, pour $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\| &\leq \int_{[0, t] \times \mathcal{U}} \|f[\xi_1(s), u, s] - f[\xi_2(s), u, s]\| \mu^{s, u} \\ &\leq k \int_0^t \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\| \, ds. \end{aligned}$$

Posons :

$$m = \max_{0 \leq t \leq T} \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|.$$

On a :

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\| \leq kmt.$$

(1) Lorsque nous indiquons que f est continûment différentiable par rapport à x , cela signifie que la dérivée par rapport à x , $f'_x[x, u, t] \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, existe en tout point (x, u, t) et que l'application $(x, u, t) \rightarrow f'_x[x, u, t]$ est continue.

On obtient alors immédiatement, par récurrence sur l'entier n ,

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\| \leq m \frac{k^n t^n}{n!} \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\| = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T.$$

2° Dans la dernière partie du théorème, on peut toujours supposer que A est borné. Considérons donc un ensemble borné $A \subset \mathbf{R}^n$, et soit un nombre T vérifiant $0 < T < \theta_A$. Posons

$$k = \text{Max} \{ M[x_0; \rho(x_0, t), t] \mid x_0 \in \bar{A}; 0 \leq t \leq T \}$$

Désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications continues ξ de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$ qui vérifient $\xi(0) \in \bar{A}$ et

$$\|\xi(t_2) - \xi(t_1)\| \leq k(t_2 - t_1) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$$

D'après le théorème d'Ascoli, $\mathcal{E}$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme.

Sans supposer f continûment différentiable, considérons maintenant l'application $(\mu, \xi) \rightarrow B_{\mu, \xi}$ de $Z_T \times \mathcal{E}$ dans l'espace des applications continues de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$B_{\mu, \xi}(t) = \int_{[0, t] \times \mathcal{U}} f[\xi(s), u, s] \mu^{s, u} \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T.$$

a) Nous allons montrer que cette application est continue par rapport à μ . Posons :

$$m = \text{Max} \{ \|f[\xi(t), u, t]\| \mid 0 \leq t \leq T; u \in \mathcal{U} \}$$

Soit un nombre $\varepsilon > 0$ et soient des nombres

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_r = T$$

tels que

$$|t_i - t_{i-1}| < \frac{\varepsilon}{3m} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

On vérifie que l'ensemble V des éléments $\mu_1 \in Z_T$ tels que

$$\left\| \int_{[0, t_i] \times \mathcal{U}} f[\xi(s), u, s] \mu_1^{s, u} - \int_{[0, t_i] \times \mathcal{U}} f[\xi(s), u, s] \mu^{s, u} \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour $i = 1, 2, \dots, r$ est un voisinage de μ dans Z_T , et on a

$$\mu_1 \in V \Rightarrow \|B_{\mu_1, \xi}(t) - B_{\mu, \xi}(t)\| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T.$$

b) Nous allons montrer maintenant que cette application est continue par rapport à ξ , et cela uniformément par rapport à μ .

Soit $\xi_0 \in \mathcal{E}$, et soit $\varepsilon > 0$. Posons :

$$\rho = \varepsilon + \max_{0 \leq t \leq T} \|\xi_0(t)\|.$$

Comme f est continue, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|x_1\|, \|x_2\| \leq \rho, \quad \|x_1 - x_2\| < \eta, \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{et} \quad u \in \mathcal{U} \\ \Rightarrow \|f(x_1, u, t) - f(x_2, u, t)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Quel que soit $\xi \in \mathcal{E}$ vérifiant

$$\|\xi(t) - \xi_0(t)\| \leq \min \{ \varepsilon, \eta \} \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T,$$

on a, quel que soit $\mu \in Z_T$:

$$\begin{aligned} \|B_{\mu, \xi}(t) - B_{\mu, \xi_0}(t)\| &\leq \int_{[0, t] \times \mathcal{U}} \|f[\xi(s), u, s] - f[\xi_0(s), u, s]\| \cdot \mu^{s, u} \\ &\leq \varepsilon t \leq \varepsilon T. \end{aligned}$$

c) Nous venons de montrer que l'application $(\mu, \xi) \rightarrow B_{\mu, \xi}$ est continue. Il en résulte que l'application $(x_0, \mu, \xi) \rightarrow \mathbf{A}_{x_0, \mu, \xi}$ de $A \times Z_T \times \mathcal{E}$ dans l'espace des applications continues de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$\mathbf{A}_{x_0, \mu, \xi}(t) = x_0 + B_{\mu, \xi}(t) = x_0 + \int_{[0, t] \times \mathcal{U}} f[\xi(s), u, s] \mu^{s, u}$$

pour $0 \leq t \leq T$, est continue.

Étant donné un point $x_0 \in A$, désignons par $\mathcal{E}_{x_0}$ l'ensemble des éléments $\xi \in \mathcal{E}$ qui vérifient

$$\xi(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \|\xi(t) - x_0\| \leq \rho(x_0, t) \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T;$$

L'ensemble $\mathcal{E}_{x_0}$ est convexe compact.

Montrons que

$$\xi \in \mathcal{E}_x \Rightarrow \mathbf{A}_{x_0, \mu, \xi} \in \mathcal{E}_{x_0}.$$

Quels que soient t_1, t_2 avec $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, on a, si $\xi \in \mathcal{E}_{x_0}$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_{x_0, \mu, \xi}(t_2) - \mathbf{A}_{x_0, \mu, \xi}(t_1)\| &\leq \int_{[t_1, t_2] \times \mathcal{U}} \|f[\xi(s), u, s]\| \mu^{s, u} \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} M[x_0; \rho(x_0, s), s] \, ds \leq k(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

On a donc $\mathbf{A}_{x_0, \mu, \xi} \in \mathcal{E}$. Par ailleurs on a, pour $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_{x_0, \mu, \xi}(t) - x_0\| &\leq \int_{[0, t] \times \mathcal{U}} \|f[\xi(s), u, s]\| \, ds \\ &\leq \int_0^t M[x_0; \rho(x_0, s), s] \, ds \leq \rho(x_0, t). \end{aligned}$$

d) Comme l'application $\xi \rightarrow A_{x_0, \mu, \xi}$ de $\mathcal{E}_{x_0}$ dans $\mathcal{E}_{x_0}$ est continue, alors d'après le théorème du point fixe de Tychonoff, il existe au moins un point $\bar{\xi} \in \mathcal{E}_{x_0}$ tel que $\bar{\xi} = A_{x_0, \mu, \bar{\xi}}$. Cet élément $\bar{\xi}$ est une solution de l'équation intégrale (2), et la première partie du théorème est démontrée.

e) Supposons f continûment différentiable. Alors, quels que soit $x_0 \in A$ et $\mu \in Z_T$, il existe un élément $\xi_{x_0, \mu} \in \mathcal{E}$ (d'après d) et un seul (d'après 1°) tel que $\xi_{x_0, \mu} = A_{x_0, \mu, \xi_{x_0, \mu}}$. Le graphe de l'application

$$(x_0, \mu) \rightarrow \xi_{x_0, \mu}$$

de $A \times Z_T$ dans $\mathcal{E}$ est l'ensemble des triplets (x_0, μ, ξ) appartenant à $A \times Z_T \times \mathcal{E}$ tels que $\xi = A_{x_0, \mu, \xi}$: ce graphe est fermé. Comme $\mathcal{E}$ est compact, il en résulte que l'application $(x_0, \mu) \rightarrow \xi_{x_0, \mu}$ est continue. Or $\xi_{x_0, \mu}$ n'est autre que l'application $t \rightarrow X[x_0, \mu, t]$. On voit ainsi que l'application $(x_0, \mu, t) \rightarrow X[x_0, \mu, t]$ de $A \times Z_T \times [0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$ est continue (1). C.Q.F.D.

§ 3. EXISTENCE D'UNE COMMANDE OPTIMALE

Soient un compact $K \subset \mathbf{R}^n$ et un nombre T vérifiant $0 \leq T \leq \theta_K$. Appelons *état accessible à partir de K à l'instant T* tout point de la forme $X[x_0, \mu, T]$ avec $x_0 \in K$ et $\mu \in Q_T$, et soit $\mathfrak{X}[K, T]$ l'ensemble des points de cette forme. Désignons par $\mathfrak{X}_i[K, T]$ l'ensemble des points de la forme $X[x_0, \mu, T]$ avec $\mu \in Q_T (i = 0, 1, 2)$: on a

$$\mathfrak{X}_0[K, T] \subset \mathfrak{X}_1[K, T] \subset \mathfrak{X}_2[K, T] \subset \mathfrak{X}[K, T]$$

Corollaire 1. — $\mathfrak{X}_0[K, T]$ est partout dense dans $\mathfrak{X}[K, T]$.

Corollaire 2. — $\mathfrak{X}[K, T]$ est compact.

Corollaire 3. — Si K est connexe, $\mathfrak{X}[K, T]$ est connexe.

Corollaire 4. — Soit $(F_t)_{t \in [0, T]}$ une famille quelconque de fermés de $\mathbf{R}^n$, et soit g une fonction numérique continue définie dans $\mathbf{R}^n$. S'il existe un point $x_0 \in K$ et une commande $\mu \in Q_T$ tels que

$$X[x_0, \mu, t] \in F_t \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T,$$

alors il existe un point $x_0 \in K$, et une commande $\mu \in Q_T$ tels que

$$X[x_0, \mu, t] \in F_t \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T$$

et tel que $g(X[x_0, \mu, T])$ soit minimal.

(1) L'auteur démontre, d'une façon plus précise, la continuité de l'application $(x_0, \mu) \rightarrow X(x_0, \mu, \cdot)$ de $A \times Z_T$ dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0, T]$ muni de la topologie de la convergence uniforme. (Note de la Rédaction.)

Corollaire 5. — Soient F et G deux fermés de $\mathbf{R}^n$, et soit g une fonction numérique continue définie dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$. S'il existe un point $x_0 \in K$, une commande $\mu \in Q_T$ et un nombre $\tau \in [0, T]$ tels que $X[x_0, \mu, \tau] \in G$ et $X[x_0, \mu, t] \in F$ pour $0 \leq t \leq \tau$, alors il existe un triplet $[x_0, \mu, \tau]$ ayant ces propriétés et tel que $g[X[x_0, \mu, \tau], \tau]$ soit minimal.

§ 4. CAS CONVEXE. SYSTEME CONVEXE ASSOCIE

Théorème 3. — Si $\mathcal{U}$ est métrisable, et si, quels que soient $x \in \mathbf{R}^n$ et $t \geq 0$, l'ensemble $f(x, \mathcal{U}, t)$ est convexe, alors tout point ξ de la forme

$$\xi = X[x_0, \mu, T],$$

avec $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $0 \leq T < \theta_{x_0}$ et $\mu \in Q_T$, peut se mettre sous la forme

$$\xi = X[x_0, \nu, T],$$

avec $\nu \in Q_T^2$ (1).

En effet (cf. [1], chap. 6, § 3, n° 1, théorème 1), il existe une application scalairement mesurable $t \rightarrow \mu_t$ de $[0, T]$ dans l'ensemble des mesures de Radon positives de norme égale à 1 sur $\mathcal{U}$, telle que, pour toute application continue φ de $[0, T] \times \mathcal{U}$ dans $\mathbf{R}$, on ait :

$$\int \varphi(t, u) \mu_t^{t, u} = \int_0^T dt \int_{\mathcal{U}} \varphi(t, u) \mu_t^u.$$

Posons alors $\xi(t) = X[x_0, \mu, t]$ pour $0 \leq t \leq T$. On a :

$$\xi(t) = x_0 + \int_0^t ds \int_{\mathcal{U}} f[\xi(s), u, s] \mu_s^u \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Posons :

$$g(t) = \int_{\mathcal{U}} f[\xi(t), u, t] \mu_t^u \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T.$$

L'application g est une application mesurable de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$. Comme $f(x, \mathcal{U}, t)$ est convexe quels que soient $x \in \mathbf{R}^n$ et $t \geq 0$ on a

$$g(t) \in f[\xi(t), \mathcal{U}, t].$$

Signalons maintenant un lemme important dû à Wazewski [8].

Lemme. — Soient un espace compact métrisable $\mathcal{U}$, un intervalle $[a, b] \subset \mathbf{R}$, une application continue $\varphi : [a, b] \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}^n$, et une application mesurable $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$. Si on a

$$g(t) \in \varphi(t, \mathcal{U}) \quad \text{pour} \quad a \leq t \leq b,$$

(1) On retrouve ainsi un résultat de A. F. Filippov affirmant l'existence d'une commande mesurable optimale dans le cas considéré [2].

alors il existe une application mesurable U de $[a, b]$ dans $\mathcal{U}$ telle que

$$g(t) = \varphi[t, U(t)] \quad \text{pour} \quad a \leq t \leq b.$$

D'après ce lemme, il existe une application mesurable $t \rightarrow U(t)$ de $[0, T]$ dans $\mathcal{U}$ telle que

$$g(t) = f[\xi(t), U(t), t].$$

On a alors :

$$\xi(t) = x_0 + \int_0^t f[\xi(s), U(s), s] \, ds \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T,$$

ce qui démontre le théorème.

Si la condition du théorème 3 est vérifiée, nous dirons que le système guidable considéré est *convexe*.

Désignons maintenant par S un système guidable quelconque. Désignons par Σ le système guidable défini par l'espace de commande

$$\mathcal{U}_1 = \Lambda_{n+1} \times \mathcal{U}^{n+1}$$

(en désignant par Λ_{n+1} l'ensemble des points $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$

vérifiant $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ et $\lambda_i \geq 0$ pour $1 \leq i \leq n+1$) et par l'application f_1 ainsi définie :

$$f_1(x; \lambda, u_1, u_2, \dots, u_{n+1}; t) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x, u_i, t)$$

Σ est un système convexe : nous dirons que Σ est le *système guidable convexe associé à S* . Quels que soient $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et T vérifiant $0 \leq T < \theta_{x_0}$, on a, d'après le théorème 3,

$$\mathcal{X}_2^S(x_0, T) = \mathcal{X}^S(x_0, T).$$

Corollaire. — Si $\mathcal{U}$ est métrisable, on a

$$\mathcal{X}^S(x_0, T) = \mathcal{X}_2^S(x_0, T) = \mathcal{X}^S(x_0, T) \quad (1)$$

On a évidemment

$$\mathcal{X}_2^S(x_0, T) \subset \mathcal{X}_2^E(x_0, T) \subset \mathcal{X}^S(x_0, T).$$

Comme $\mathcal{X}_2^E(x_0, T) = \mathcal{X}^E(x_0, T)$ est compact, et que $\mathcal{X}_2^S(x_0, T)$ est partout dense dans $\mathcal{X}^S(x_0, T)$, on a $\mathcal{X}_2^E(x_0, T) = \mathcal{X}^S(x_0, T)$.

(1) On retrouve ainsi un résultat de R. V. Gamkrelidze affirmant que $\mathcal{X}_2^S(x_0, T)$ est dense dans $\mathcal{X}^E(x_0, T)$: R. V. GAMKRELIDZE, « Régimes optimaux glissants », DAN USSR, 143, 1962, pp. 1243-1245.

REMARQUE. — Les résultats qui précèdent montrent que les trajectoires X correspondant à des commandes de S peuvent être obtenues de trois manières différentes. En effet, les trois propositions suivantes sont équivalentes.

- (1) Il existe une commande $\mu \in Q_T(S)$ telle que $X(t) = X(x_0, \mu, t)$
- (2) Il existe une commande mesurable $U \in Q_T^2(\Sigma)$ telle que $X = X[x_0, U, t]$
- (3) Il existe une application mesurable φ de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$ telle que $X(t) = x_0 + \int_0^t \varphi(s) ds$ pour $0 \leq t \leq T$, et telle que $\varphi(t) \in \Gamma[f(X(t), \mathcal{U}, t)]$ pour $0 \leq t \leq T$, où $\Gamma[f(x, \mathcal{U}, t)]$ désigne l'enveloppe convexe de $f(x, \mathcal{U}, t)$.

§ 5. DIFFERENTIABILITE DE LA SOLUTION

Dans ce qui suit, x_0 est un point de $\mathbf{R}^n$, ω un voisinage de x_0 , T un nombre vérifiant $0 < T < \theta_\omega$; x'_0 est un point quelconque de ω ; $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ sont des éléments de Z_T ; $\lambda_0(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_r(t)$ sont des applications numériques mesurables positives définies dans $[0, T]$ et vérifiant

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i(t) \leq 1 \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T.$$

On désigne par μ l'élément $\sum_{i=0}^r \lambda_i(\cdot) \mu_i$ de Z_T : μ est défini par

$$\int \varphi(t, u) \mu^{t, u} = \sum_{i=0}^r \int \lambda_i(t) \varphi(t, u) \mu_i^{t, u}$$

quelle que soit φ .

D'autre part, on désigne par $\mathbf{X}$ l'application continue de $[0, T]$ dans l'espace des matrices $n \times n$ définie de manière unique par l'équation intégrale

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{1} + \int_{[t, T] \times \mathcal{U}} \mathbf{X}(s) \cdot f'_x[X(x_0, \mu_0, s), u, s] \cdot \mu_0^{s, u} \quad (4)$$

pour $0 \leq t \leq T$.

Nous supposons, bien entendu, que f est continûment différentiable par rapport à x .

Théorème 4. — On a la formule :

$$\mathbf{X}(\tau) \cdot [X(x'_0, \mu, \tau) - X(x_0, \mu_0, \tau)] =$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{X}(0) \cdot (x'_0 - x_0) + \sum_{i=1}^r \int_{[0, \tau] \times \mathcal{U}} \lambda_i(t) \mathbf{X}(t) f(X[x_0, \mu_0, t], u, t) \mu_i^{t, u} \\
& - \int_{[0, \tau] \times \mathcal{U}} [1 - \lambda_0(t)] \mathbf{X}(t) f(X[x_0, \mu_0, t], u, t) \mu_0^{t, u} \\
& + o\left(\|x'_0 - x_0\| + \int_0^T [1 - \lambda_0(t)] dt\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

où

$$\frac{\|o(\eta)\|}{\eta} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \eta \rightarrow 0.$$

DÉMONSTRATION.⁽¹⁾ — Posons :

$$\xi_0(t) = X[x_0, \mu_0, t], \quad \xi(t) = X[x'_0, \mu, t], \quad \zeta(t) = \xi(t) - \xi_0(t)$$

et

$$\eta = \|x'_0 - x_0\| + \int_0^T [1 - \lambda_0(t)] dt$$

Comme

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\zeta(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \eta \rightarrow 0,$$

on a :

$$f[\xi(s), u, s] = f[\xi_0(s), u, s] + f'_x[\xi_0(s), u, s] \cdot \zeta(s) + \|\zeta(s)\| \varepsilon(s, u)$$

avec

$$\varepsilon = \sup_{\substack{0 \leq s \leq T \\ u \in \mathcal{U}}} \|\varepsilon(s, u)\| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \eta \rightarrow 0.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
& \zeta(t) = \xi(t) - \xi_0(t) \\
& = x'_0 + \int_{[0, t] \times \mathcal{U}} (f[\xi_0(s), u, s] + f'_x[\xi_0(s), u, s] \zeta(s) + \|\zeta(s)\| \varepsilon(s, u)) \mu^{s, u} \\
& \quad - x_0 - \int_{[0, t] \times \mathcal{U}} f[\xi_0(s), u, s] \mu_0^{s, u} \\
& = x'_0 - x_0 + \int_{[0, t] \times \mathcal{U}} f'_x[\xi_0(s), u, s] \cdot \zeta(s) \mu_0^{s, u} \\
& \quad + \sum_{i=1}^r \int_{[0, t] \times \mathcal{U}} \lambda_i(s) f[\xi_0(s), u, s] \mu_i^{s, u}
\end{aligned} \tag{6}$$

(1) La rédaction de cette démonstration est due à M. Étienne Lanery.

$$- \int_{[0,t] \times \mathcal{U}} [1 - \lambda_0(s)] f[\xi_0(s), u, s] \mu_0^{s,u} + \varepsilon_1(t)$$

avec

$$\|\varepsilon_1(t)\| \leq \int_0^t (2k'[1 - \lambda_0(s)] + \varepsilon) \|\zeta(s)\| ds \quad (7)$$

où :

$$k' = \max_{\substack{0 \leq s \leq T \\ u \in \mathcal{U}}} \|f'_x[\xi_0(s), u, s]\|$$

En posant :

$$\varphi_1(t) = \sum_{i=1}^r \int_{[0,t] \times \mathcal{U}} \lambda_i(s) f[\xi_0(s), u, s] \mu_i^{s,u}$$

$$\varphi_2(t) = \int_{[0,t] \times \mathcal{U}} [1 - \lambda_0(s)] f[\xi_0(s), u, s] \mu_0^{s,u}$$

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) + \varepsilon_1(t)$$

et :

$$\zeta_0 = x'_0 - x_0, \quad \mathbf{A}(t, u) = f'_x[\xi_0(t), u, t]$$

on obtient :

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \int_{[0,t] \times \mathcal{U}} \mathbf{A}(s, u) \cdot \zeta(s) \mu_0^{s,u} + \varphi(t) \quad (8)$$

Étant donné un nombre τ , avec $0 \leq \tau \leq T$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{[0,\tau] \times \mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \zeta(t) \mu_0^{t,u} &= \left[\int_{[0,\tau] \times \mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \mu_0^{t,u} \right] \cdot \zeta_0 \\ &+ \int_{\substack{0 \leq t \leq \tau \\ 0 \leq s \leq t \\ u, v \in \mathcal{U}}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \mathbf{A}(s, v) \cdot \zeta(s) \mu_0^{t,u} \mu_0^{s,v} \\ &+ \int_{[0,\tau] \times \mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \varphi(t) \mu_0^{t,u} \end{aligned} \quad (9)$$

Par ailleurs la relation (4) peut s'écrire :

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{1} + \int_{[s,T] \times \mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \mu_0^{t,u} \quad (10)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_{[0,\tau] \times \mathcal{U}} \mathbf{X}(s) \cdot \mathbf{A}(s, u) \cdot \zeta(s) \mu_0^{s,u} &= \int_{[0,\tau] \times \mathcal{U}} \mathbf{A}(s, v) \cdot \zeta(s) \mu_0^{s,v} \\ &+ \int_{\substack{0 \leq s \leq \tau \\ s \leq t \leq T \\ u, v \in \mathcal{U}}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \mathbf{A}(s, v) \cdot \zeta(s) \mu_0^{t,u} \mu_0^{s,v} \end{aligned} \quad (11)$$

En comparant les relations (9) et (11), on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_{[0,\tau] \times \mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \mu_0^{t,u} \right] \cdot \zeta_0 \\
 & + \int_{[0,\tau] \times \mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \varphi(t) \mu_0^{t,u} \\
 & - \int_{[0,\tau] \times \mathcal{U}} \mathbf{A}(s, v) \cdot \zeta(s) \mu_0^{s,v} \\
 & = \int_{\substack{\tau \leq t \leq T \\ 0 \leq s \leq \tau \\ u, v \in \mathcal{U}}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \mathbf{A}(s, v) \cdot \zeta(s) \mu_0^{t,u} \mu_0^{s,v}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Cette relation (12) peut encore s'écrire, en remarquant que le second membre est égal au produit de deux intégrales, et en tenant compte de relations (8) et (10) :

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}(\tau)] \cdot \xi_0 + \int_{[0,\tau] \times \mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \varphi(t) \mu_0^{t,u} + \zeta_0 + \varphi(\tau) - \zeta(\tau) \\
 = [\mathbf{X}(\tau) - \mathbf{1}][\zeta(\tau) - \zeta_0 - \varphi(\tau)].
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}(\tau) \cdot \zeta(\tau) &= \mathbf{X}(0) \cdot \zeta_0 + \mathbf{X}(\tau) \cdot \varphi(\tau) \\
 &+ \int_{[0,\tau] \times \mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \varphi(t) \mu_0^{t,u}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{X}(\tau) \cdot \varphi_1(\tau) + \int_{[0,\tau] \times \mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \varphi_1(t) \mu_0^{t,u} \\
 &= \mathbf{X}(\tau) \cdot \varphi_1(\tau) + \int_{[0,\tau] \times \mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \\
 & \quad \cdot \left[\sum_{i=1}^r \int_{[0,t] \times \mathcal{U}} \lambda_i(s) f[\xi_0(s), v, s] \mu_i^{s,v} \right] \mu_0^{t,u} \\
 &= \mathbf{X}(\tau) \cdot \varphi_1(\tau) + \sum_{i=1}^r \int_{[0,\tau] \times \mathcal{U}} \lambda_i(s) \left[\int_{[s,\tau] \times \mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \mu_0^{t,u} \right] \\
 & \quad \cdot f[\xi_0(s), v, s] \mu_i^{s,v} \\
 &= \mathbf{X}(\tau) \cdot \varphi_1(\tau) + \sum_{i=1}^r \int_{[0,\tau] \times \mathcal{U}} \lambda_i(s) [\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(\tau)] \cdot f[\xi_0(s), v, s] \mu_i^{s,v} \\
 &= \sum_{i=1}^r \int_{[0,\tau] \times \mathcal{U}} \lambda_i(s) \mathbf{X}(s) \cdot f[\xi_0(s), v, s] \mu_i^{s,v}
 \end{aligned} \tag{14}$$

De la même manière, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\tau) \cdot \varphi_2(\tau) + \int_{[0,\tau] \times \mathfrak{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \varphi_2(t) \mu_0^{t,u} \\ = \int_{[0,\tau] \times \mathfrak{U}} [1 - \lambda_0(s)] \mathbf{X}(s) \cdot f[\xi_0(s), v, s] \mu_0^{s,v} \end{aligned} \quad (15)$$

En posant :

$$\mathbf{X}(\tau) \cdot \varepsilon_1(\tau) + \int_{[0,\tau] \times \mathfrak{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \varepsilon_1(t) \mu_0^{t,u} = \varepsilon_2(\tau) \quad (16)$$

on obtient finalement :

$$\mathbf{X}(\tau) \zeta(\tau) = \mathbf{X}(0) \cdot \zeta_0 + \psi(\tau) + \varepsilon_2(\tau)$$

avec :

$$\begin{aligned} \psi(\tau) = \sum_{i=1}^r \int_{[0,\tau] \times \mathfrak{U}} \lambda_i(s) \mathbf{X}(s) f[\xi_0(s), u, s] \mu_i^{s,u} \\ - \int_{[0,\tau] \times \mathfrak{U}} [1 - \lambda_0(s)] \mathbf{X}(s) f[\xi_0(s), u, s] \mu_0^{s,u} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\|\mathbf{X}(\tau) \zeta(\tau) - \mathbf{X}(0) \zeta_0 - \psi(\tau)\| = \|\varepsilon_2(\tau)\|$$

et il ne reste donc plus qu'à démontrer que $\frac{\|\varepsilon_2(\tau)\|}{\eta}$ tend vers 0 quand $\eta \rightarrow 0$.

Or, si on pose : $k = \sup_{\substack{s \in [0, T] \\ u \in \mathfrak{U}}} \|f(\xi_0(s), u, s)\|$, il résulte des relations (6)

et (7) que :

$$\begin{aligned} \|\zeta(t)\| \leq \|x_0 - x'_0\| + \int_0^t k' \|\zeta(s)\| ds + 2 \int_0^t [1 - \lambda_0(s)] k ds \\ + \int_0^t (2k'[1 - \lambda_0(s)] + \varepsilon) \|\zeta(s)\| ds. \end{aligned}$$

En prenant η suffisamment petit pour que ε soit inférieur à k' , on a :

$$2k'[1 - \lambda_0(s)] + \varepsilon \leq 3k',$$

et dans ces conditions en remplaçant au besoin k par $\text{Max}(k, 1/2)$, on obtient :

$$\|\zeta(t)\| \leq 2k\eta + 4k' \int_0^t \|\zeta(s)\| ds.$$

Comme la fonction $z(t) = 2k\eta e^{4k't}$ vérifie

$$z(t) = 2k\eta + 4k' \int_0^t z(s) ds,$$

on a : $\|\zeta(t)\| \leq z(t) \leq 2k\eta e^{4k'T} \quad \forall t \in [0, T]$.

Par conséquent, d'après la relation (7) :

$$\|\varepsilon_1(t)\| \leq 2k\eta e^{4k'T} \int_0^T (2k'[1 - \lambda_0(s)] + \varepsilon) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Dans ces conditions, si on pose : $k_1 = \max_{0 \leq t \leq T} \|X(t)\|$, on déduit de la relation (16) :

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_2(\tau)\| &\leq k_1 \sup_{0 \leq t \leq T} \|\varepsilon_1(t)\| + k_1 k' T \sup_{0 \leq t \leq T} \|\varepsilon_1(t)\| \\ &\leq k_1(1 + k'T) 2k\eta e^{4k'T} \int_0^T (2k'[1 - \lambda_0(s)] + \varepsilon) ds, \end{aligned}$$

d'où il résulte bien que $\frac{\|\varepsilon_2(\tau)\|}{\eta} \rightarrow 0$ quand $\eta \rightarrow 0$, puisque ε tend vers zéro avec η .

§ 6. CONDITION NECESSAIRE D'OPTIMALITE

Étant donné que les problèmes d'optimisation admettent en général une solution, mais que cette solution n'est pas toujours une commande mesurable, il est bon d'étendre aux commandes-limites les conditions nécessaires d'optimalité de Pontrjagin. Nous ne traiterons pas ici tous les types de problèmes rencontrés habituellement, mais seulement deux problèmes. L'espace $\mathcal{U}$ sera toujours supposé métrisable.

Problème 1. — Étant donné un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$, un nombre $T > 0$ (avec $T < \theta_{x_0}$) et une fonction différentiable g définie dans $\mathbf{R}^n$, on se propose de trouver $\mu \in Q_T$ tel que $g[X[x_0, \mu, T]]$ soit minimal.

Désignons par $\bar{\mu}$ une solution de ce problème, et posons

$$\bar{\xi}(t) = X[x_0, \bar{\mu}, t] \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Soit $v \in Q_T$, soit λ une application mesurable de $[0, T]$ dans $[0, 1]$, et soit un nombre α avec $0 < \alpha < 1$. Posons :

$$\mu = \alpha \lambda(\cdot) v + [1 - \alpha \lambda(\cdot)] \bar{\mu}.$$

On doit avoir :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} g_x[\bar{\xi}(T)] [X[x_0, \mu, T] - \bar{\xi}(T)] \geq 0,$$

ce qui entraîne, d'après le théorème 4,

$$g'_x[\bar{\xi}(T)] \cdot \left[\int_{[0, T] \times \mathcal{U}} \lambda(t) \mathbf{X}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u, t] v^{t, u} \right. \\ \left. - \int_{[0, T] \times \mathcal{U}} \lambda(t) \mathbf{X}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u, t] \bar{\mu}^{t, u} \right] \geq 0.$$

Posons alors :

$$\bar{\psi}(t) = -g'_x[\bar{\xi}(T)] \cdot \mathbf{X}(t), \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T.$$

$\bar{\psi}$ est définie de façon unique par

$$\bar{\psi}(t) = -g'_x[\bar{\xi}(T)] + \int_{[t, T] \times \mathcal{U}} \bar{\psi}(s) \cdot f'_x[\bar{\xi}(s), u, s] \bar{\mu}^{s, u} \quad (17)$$

et on a

$$\int_{[0, T] \times \mathcal{U}} \lambda(t) \bar{\psi}(t) f[\bar{\xi}(t), u, t] [\bar{\mu}^{t, u} - v^{t, u}] \geq 0$$

quels que soient $v \in Q_T$ et λ . On en déduit immédiatement

$$\int_{\mathcal{U}} \bar{\psi}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u, t] \bar{\mu}^u = \max_{u \in \mathcal{U}} [\bar{\psi}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u, t]] \quad (18)$$

presque partout.

On peut donc énoncer :

Théorème 5. — *Pour que $\bar{\mu}$ soit solution de problème 1, il est nécessaire que la fonction $\bar{\psi}$ définie par la relation (17) vérifie la relation (18).*

Examinons maintenant le cas particulier où le système est stationnaire, c'est-à-dire où $f(x, u, t) = f(x, u)$. Soit $\bar{\mu}$ une solution du problème 1 : posons $\bar{\xi}(t) = X[x_0, \bar{\mu}, t]$. Soit λ une application mesurable de $[0, T]$ dans $[0, 1]$; posons

$$\int_0^t \lambda(s) ds = \wedge(t) \quad \text{et} \quad \int_0^T \lambda(t) dt = \theta.$$

Soit un élément quelconque $u_0 \in \mathcal{U}$, et soit un nombre quelconque $t_0 \in [0, T]$. Désignons par μ_{λ, u_0, t_0} l'élément de Q_T défini par

$$\int \varphi(t, u) \mu_{\lambda, u_0, t_0}^{t, u} \\ = \int_{[0, t_0] \times \mathcal{U}} \varphi[t - \wedge(t), u] [1 - \lambda(t)] \bar{\mu}^{t, u} \\ + \int_{t_0 - \wedge(t_0)}^{t_0 - \wedge(t_0) + \theta} \varphi(t, u_0) dt + \int_{[t_0, T]} \varphi[t - \wedge(t) + \theta, u] [1 - \lambda(t)] \bar{\mu}^{t, u}$$

Posons $\xi(t) = \mathbf{X}[x_0, \mu_{\lambda, u_0, t_0}, t]$. Posons pour $t, \tau \in [0, T]$:

$$\chi(\tau, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{si } \tau < t \leq T. \end{cases}$$

On a

$$\xi(\tau) = x_0 + \int_{[0, \tau] \times \mathcal{U}} \chi(\tau, t) f[\xi(t), u] \mu_{\lambda, u_0, t_0}^{t, u} \quad \text{pour } 0 \leq \tau \leq T.$$

Pour $0 \leq \tau \leq t_0 - \wedge(t_0)$, on obtient

$$\xi(\tau) = x_0 + \int_{[0, t_0] \times \mathcal{U}} \chi(\tau, t - \wedge(t)) f[\xi(t - \wedge(t)), u] [1 - \lambda(t)] \bar{\mu}^{t, u}$$

Pour $0 \leq t' \leq t_0$, on obtient ainsi

$$\xi[t' - \wedge(t')] = x_0 + \int_{[0, t'] \times \mathcal{U}} f[\xi(t - \wedge(t)), u] [1 - \lambda(t)] \mu^{t, u}$$

Si on désigne par μ_{λ} l'élément $[1 - \lambda(\cdot)] \bar{\mu}$ de Z_X , on obtient

$$\xi[t' - \wedge(t')] = X[x_0, \mu_{\lambda}, t'],$$

d'où en particulier

$$\xi[t_0 - \wedge(t_0)] = X[x_0, \mu_{\lambda}, t_0].$$

On a alors (cf. le théorème 4) :

$$\mathbf{X}(t_0) \cdot [\xi(t_0 - \wedge(t_0)) - \bar{\xi}(t_0)] = - \int_{[0, t_0] \times \mathcal{U}} \lambda(t) \mathbf{X}(t) f[\bar{\xi}(t), u] \bar{\mu}^{t, u} + o(\theta).$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \xi[t_0 - \wedge(t_0) + \theta] - \xi[t_0 - \wedge(t_0)] &= \\ &= \int_{[0, \tau] \times \mathcal{U}} [\chi(t_0 - \wedge(t_0) + \theta, t) - \chi(t_0 - \wedge(t_0), t)] f[\xi(t), u] \mu_{\lambda, u_0, t_0}^{t, u} \\ &= \int_{t_0 - \wedge(t_0)}^{t_0 - \wedge(t_0) + \theta} f[\xi(t), u_0] dt = \theta f[\bar{\xi}(t_0), u_0] + o(\theta) \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t_0) \cdot [\xi(t_0 - \wedge(t_0) + \theta) - \xi(t_0)] &= - \int_{[0, t_0] \times \mathcal{U}} \lambda(t) \mathbf{X}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u] \bar{\mu}^{t, u} \\ &\quad + \theta \mathbf{X}(t_0) f[\bar{\xi}(t_0), u_0] + o(\theta). \end{aligned}$$

Enfin on a, pour $\tau \geq t_0 - \int_0^{t_0} \lambda(s) ds + \theta$,

$$\begin{aligned} \xi(\tau) - \xi[t_0 - \wedge(t_0) + \theta] &= \\ &= \int_{[0, \tau] \times \mathcal{U}} [\chi(\tau, t) - \chi(t_0 - \wedge(t_0) + \theta, t)] f[\xi(t), u] \mu_{\lambda, u_0, t_0}^{t, u} \end{aligned}$$

$$= \int_{[t_0, T] \times \mathcal{U}} \chi(\tau, t - \wedge(t) + \theta) f[\xi(t - \wedge(t) + \theta), u] [1 - \lambda(t)] \bar{\mu}^{t, u}$$

Ainsi, pour $t' \geq t_0$, on a, en posant $\tau = t' - \wedge(t') + \theta$,

$$\xi(t' - \wedge(t') + \theta) =$$

$$= \xi(t_0 - \wedge(t_0) + \theta) + \int_{[t_0, t'] \times \mathcal{U}} f[\xi(t - \wedge(t) + \theta), u] [1 - \lambda(t)] \bar{\mu}^{t, u}.$$

On obtient ainsi $\xi(t' - \wedge(t') + \theta) = \zeta(t')$ pour $t' \geq t_0$, où ζ est définie par

$$\zeta(t') = \zeta(t_0) + \int_{[t_0, t'] \times \mathcal{U}} f[\zeta(t), u] [1 - \lambda(t)] \bar{\mu}^{t, u} \quad (t_0 \leq t' \leq T)$$

Comme $\int_0^T \lambda(s) ds = \theta$, on a $\xi(T) = \zeta(T)$, ce qui donne, d'après le théorème 4 :

$$\begin{aligned} \xi(T) - \bar{\xi}(T) &= \mathbf{X}(t_0) [\xi(t_0 - \wedge(t_0) + \theta) - \bar{\xi}(t_0)] \\ &\quad - \int_{[t_0, T] \times \mathcal{U}} \lambda(t) \mathbf{X}(t) f[\bar{\xi}(t), u] \bar{\mu}^{t, u} + o(\theta), \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \xi(T) - \bar{\xi}(T) &= \theta \mathbf{X}(t_0) \cdot f[\bar{\xi}(t_0), u_0] \\ &\quad - \int_{[0, T] \times \mathcal{U}} \lambda(t) \mathbf{X}(t) f[\bar{\xi}(t), u] \bar{\mu}^{t, u} + o(\theta) \quad (19) \end{aligned}$$

On doit avoir, quels que soient λ , u_0 et t_0 , $g(\xi(T) - g(\bar{\xi}(T))) \geq 0$. En posant $\lambda(t) = \alpha \lambda_0(t)$, $\theta = \alpha \theta_0$, et en faisant tendre α vers 0, on obtient :

$$-\theta_0 \bar{\psi}(t_0) \cdot f[\bar{\xi}(t_0), u_0] + \int_{[0, T] \times \mathcal{U}} \lambda_0(t) \bar{\psi}(t) f[\bar{\xi}(t), u] \bar{\mu}^{t, u} \geq 0.$$

On peut donc énoncer :

Théorème 5 bis. — Dans le cas stationnaire, pour que $\bar{\mu}$ soit solution du problème 1, il est nécessaire que la fonction $\bar{\psi}$ définie par

$$\bar{\psi}(t) = -g'_x[\bar{\xi}(T)] + \int_{[t, T] \times \mathcal{U}} \bar{\psi}(s) \cdot f'_x[\bar{\xi}(s), u] \bar{\mu}^{s, u}$$

vérifie presque partout

$$\int_{\mathcal{U}} \bar{\psi}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u] \bar{\mu}^t = \text{Max}_{u \in \mathcal{U}} [\bar{\psi}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u]] = H_0, \quad (20)$$

ou H_0 est une constante.

Problème 2. — *Étant donné un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$, et une fonction différentiable g définie dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$, on se propose de trouver $T > 0$ (avec $T < \theta_{x_0}$) et $\bar{\mu} \in Q_T$ tels que $g[X[x_0, \bar{\mu}, T], T]$ soit minimal.*

Désignons par $(\bar{\mu}, \bar{T})$ une solution de ce problème ; et posons $\bar{\xi}(t) = X[x_0, \bar{\mu}, t]$. Il est évident que la condition nécessaire du théorème 5 est vérifiée. Mais il y a ici une condition supplémentaire. En effet, quel que soit θ avec $0 < \theta < \bar{T}$, on doit avoir

$$g[\bar{\xi}(\bar{T} - \theta), \bar{T} - \theta] - g[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}] \geq 0,$$

ce qui entraîne que

$$-g'_t[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}] - g'_x[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}] \cdot \left[\frac{1}{\theta} \int_{[\bar{T}-\theta, \bar{T}] \times \mathcal{U}} f[\bar{\xi}(t), u, t] \bar{\mu}^{t,u} \right]$$

tend vers une valeur positive quand $\theta \rightarrow 0$.

Or on a $-g'_x[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}] = \bar{\psi}(\bar{T})$ et d'après (18),

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \int_{[\bar{T}-\theta, \bar{T}] \times \mathcal{U}} \bar{\psi}(\bar{T}) \cdot f[\bar{\xi}(t), u, t] \bar{\mu}^{t,u} = \text{Max}_{u \in \mathcal{U}} \bar{\psi}(\bar{T}) \cdot f[\bar{\xi}(\bar{T}), u, \bar{T}]$$

On obtient ainsi $\text{Max}_{u \in \mathcal{U}} [\bar{\psi}(\bar{T}) \cdot f[\bar{\xi}(\bar{T}), u, \bar{T}]] \geq g'_t[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}]$.

Par ailleurs, quel que soit $u \in \mathcal{U}$, on doit avoir :

$$g'_t[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}] + g'_x[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}] f[\bar{\xi}(\bar{T}), u, \bar{T}] \geq 0,$$

cela équivaut à

$$\text{Max}_{u \in \mathcal{U}} \bar{\psi}(\bar{T}) \cdot f[\bar{\xi}(\bar{T}), u, \bar{T}] \leq g'_t[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}].$$

En définitive, on peut énoncer :

Théorème 6. — *Pour que $(\bar{\mu}, \bar{T})$ soit solution du problème 2, il est nécessaire que la fonction $\bar{\psi}$ définie par*

$$\bar{\psi}(t) = -g'_t[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}] + \int_{[t, \bar{T}] \times \mathcal{U}} \bar{\psi}(s) \cdot f'_x[\bar{\xi}(s), u, s] \bar{\mu}^{s,u} \quad (21)$$

vérifie

$$\int_{\mathcal{U}} \bar{\psi}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u, t] \bar{\mu}_t^u = \text{Max}_{u \in \mathcal{U}} [\bar{\psi}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u, t]] \quad (22)$$

presque partout et

$$\text{Max}_{u \in \mathcal{U}} [\bar{\psi}(\bar{T}) \cdot f[\bar{\xi}(\bar{T}), u, \bar{T}]] = g'_t[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}] \quad (23)$$

REMARQUE. — Bien entendu, si le système est stationnaire, on doit avoir presque partout :

$$\int_{\mathcal{U}} \bar{\psi}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u] \bar{\mu}_t^u = \text{Max}_{u \in \mathcal{U}} \bar{\psi}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u] = g'_t[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}]$$

§ 7. UNE METHODE DIRECTE DE RESOLUTION DU PROBLEME 1 DANS LE CAS STATIONNAIRE

Nous allons exposer une méthode permettant de construire, à partir d'une commande mesurable $V_r \in Q_T^2$, une nouvelle commande mesurable $V_{r+1} \in Q_T^2$ vérifiant $g(X[x_0, V_{r+1}, T]) \leq g(X[x_0, V_r, T])$. Nous supposons que le système est *stationnaire*, c'est-à-dire que $f(x, u, t) = f(x, u)$.

Désignons par ψ^r la solution de l'équation intégrale

$$\begin{aligned} \psi^r(t) = & -g'_x(X[x_0, V_r, T]) \\ & + \int_t^T \psi^r(s) \cdot f'_x[X[x_0, V_r, s], V_r(s)] ds \quad (0 \leq t \leq T) \end{aligned}$$

Soient $t_r \in [0, T]$ et $u_r \in \mathcal{U}$ tels que

$$\psi^r(t_r) \cdot f[X[x_0, V_r, t_r], u_r] = \max_{\substack{t \in [0, T] \\ u \in \mathcal{U}}} \psi^r(t) \cdot f[X[x_0, V_r, t], u].$$

Soit un nombre quelconque θ avec $0 \leq \theta \leq T$. Désignons par I_r^θ un ensemble mesurable de $[0, T]$, de mesure de Lebesgue égale à θ , et vérifiant

$$\begin{aligned} t \in I_r^\theta \text{ et } t' \notin I_r^\theta & \Rightarrow \psi^r(t) \cdot f[X[x_0, V_r, t], V_r(t)] \\ & \leq \psi^r(t') \cdot f[X[x_0, V_r, t'], V_r(t')]. \end{aligned}$$

Quel que soit $t \in [0, T]$, désignons par $\tau_r^\theta(t)$ la mesure de l'ensemble $[0, t] \cap I_r^\theta$. Soit $V_r^\theta \in Q_T^2$ définie par

$$\begin{aligned} V_r^\theta[\tau_r^\theta(t)] &= V_r(t) && \text{pour } 0 \leq t < t_r. \\ V_r^\theta(t) &= u_r && \text{pour } \tau_r^\theta(t_r) \leq t < \tau_r^\theta(t_r) + \theta \\ V_r^\theta[\tau_r^\theta(t) + \theta] &= V_r(t) && \text{pour } t_r \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Pour chaque valeur de θ , calculons $g(X[x_0, V_r^\theta, T])$, et désignons par θ_r la valeur pour laquelle $g(X[x_0, V_r^\theta, T])$ atteint son minimum. Posons alors $V_{r+1} = V_r^{\theta_r}$. On a :

$$g(X[x_0, V_{r+1}, T]) \leq g(X[x_0, V_r, T]).$$

REMARQUE. — Si $V_r \in Q_T^1$, alors $V_{r+1} \in Q_T^1$. Si $V_r \in Q_T^0$, alors $V_{r+1} \in Q_T^0$.

Avec la méthode que nous avons exposée, on peut construire une suite $V_0, V_1, \dots, V_r, \dots$ de commandes mesurables. Nous allons montrer que $g[X[x_0, V_r, T]]$ converge, par valeurs décroissantes, vers

$g[X[x_0, \bar{\mu}, T]]$, où $\bar{\mu} \in Q_T$ est une commande vérifiant les conditions nécessaires du théorème 5 bis.

Posons

$$\lambda_r^\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in I_r^\theta \\ 0 & \text{si } t \notin I_r^\theta \end{cases}$$

et

$$\Lambda_r^\theta(t) = \int_0^t \lambda_r^\theta(s) ds$$

Nous identifions λ_r^θ avec la mesure de Radon sur $[0, T]$ dont elle est la densité. Désignons par λ_r l'application $\theta \rightarrow \lambda_r^\theta$ de $[0, T]$ dans l'ensemble $L(T)$ des mesures de Radon positives de norme inférieure ou égale à T sur $[0, T]$.

Considérons la suite de terme général $(V_r, t_r, u_r, \lambda_r)$, avec $V_r \in Q_T$, $t_r \in [0, T]$, $u_r \in \mathcal{U}$, $\lambda_r \in \mathcal{F}_s([0, T], L(T))$, où $\mathcal{F}_s([0, T], L(T))$ désigne l'ensemble des applications de $[0, T]$ dans $L(T)$, avec la topologie de la convergence simple. Cette suite admet au moins une valeur d'adhérence $(\bar{\mu}, \bar{t}, \bar{u}, \bar{\lambda})$. Il nous suffira de montrer que $\bar{\mu}$ vérifie les conditions nécessaires du théorème 5 bis : en effet, comme la suite de terme général $g[X[x_0, V_r, T]]$ est décroissante, elle tend vers $g[X[x_0, \bar{\mu}, T]]$.

L'élément $\bar{\lambda}$ est une application $\theta \rightarrow \bar{\lambda}^\theta$ de $[0, T]$ dans $L(T)$. Quel que soit θ , $\bar{\lambda}^\theta$ est une mesure de densité inférieure ou égale à $\frac{1}{\theta}$ par rapport à la mesure de Lebesgue dont nous désignerons aussi par $\bar{\lambda}^\theta$ la densité ; on a $\int_0^T \bar{\lambda}^\theta(t) dt = \theta$. On posera $\int_0^t \bar{\lambda}^\theta(s) ds = \bar{\Lambda}^\theta(t)$.

Désignons par $\bar{\psi}$ la solution de l'équation intégrale

$$\bar{\psi}(t) = -g'_x[X[x_0, \bar{\mu}, T]] + \int_{[t, T] \times \mathcal{U}} \bar{\psi}(s) \cdot f'_x[X[x_0, \bar{\mu}, s], u] \bar{\mu}^{s, u}.$$

Soient $t_0 \in [0, T]$, $u_0 \in \mathcal{U}$, $\theta \in [0, T]$ et λ une application mesurable de $[0, T]$ dans $[0, 1]$, telle que

$$\int_0^T \lambda(t) dt = \theta$$

On a :

$$\begin{aligned} \psi^r(t_0) \cdot f[[X[x_0, V_r, t_0], u_0] - \frac{1}{\theta} \int_0^T \lambda(t) \psi^r(t) \cdot f[X[x_0, V_r, t], V_r(t)] dt \\ \leq \psi^r(t_r) \cdot f[[X[x_0, V_r, t_r], u_r] - \frac{1}{\theta} \int_0^T \lambda_r^\theta(t) \psi^r(t) \cdot f[X[x_0, V_r, t], V_r(t)] dt \end{aligned}$$

En passant à la valeur d'adhérence, on obtient

$$\bar{\psi}(t_0) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t_0], u_0] - \frac{1}{\theta} \int_{[0, T] \times \mathcal{U}} \lambda(t) \bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u] \bar{\mu}^{t, u}$$

$$\leq \bar{\psi}(\bar{t}) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, \bar{t}], \bar{u}] \\ - \frac{1}{\theta} \int_{[0, T] \times \mathcal{U}} \bar{\lambda}^\theta(t) \bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u] \bar{\mu}^{t, u}. \quad (24)$$

Remarquons maintenant que, pour toute fonction continue $\varphi(t, u)$ définie dans $[0, T] \times \mathcal{U}$, on a, quelque soit $\theta \in [0, T]$,

$$\int_0^T \varphi[t, V_r^\theta(t)] dt = \int_0^{t_r} \varphi[t - \wedge_r^\theta(t), V_r(t)] [1 - \lambda_r^\theta(t)] dt \\ + \int_{t_r - \wedge_r^\theta(t_r)}^{t_r - \wedge_r^\theta(t_r) + \theta} \varphi(t, u_r) dt + \int_{t_r}^T \varphi[t - \wedge_r(t) + \theta, V_r(t)] [1 - \lambda_r^\theta(t)] dt.$$

Par ailleurs on a, par construction, quel que soit $\theta \in [0, T]$,

$$g[X[x_0, V_{r+1}, T]] \leq g[X[x_0, V_r^\theta, T]],$$

En passant à la valeur d'adhérence, on obtient

$$g[X[x_0, \bar{\mu}, T]] \leq g[X[x_0, \bar{\mu}_\theta, T]],$$

où $\bar{\mu}_\theta \in Q_T$ est définie par

$$\int_{[0, T] \times \mathcal{U}} \varphi(t, u) \bar{\mu}_\theta^{t, u} = \int_{[0, \bar{t}] \times \mathcal{U}} \varphi[t - \bar{\lambda}^\theta(t), u] [1 - \bar{\lambda}^\theta(t)] \bar{\mu}^{t, u} \\ + \int_{\bar{t} - \bar{\lambda}^\theta(\bar{t})}^{\bar{t} - \bar{\lambda}^\theta(\bar{t}) + \theta} \varphi(t, \bar{u}) dt + \int_{[\bar{t}, T] \times \mathcal{U}} \varphi[t - \bar{\lambda}^\theta(t) + \theta, u] [1 - \bar{\lambda}^\theta(t)] \bar{\mu}^{t, u}$$

Or, d'après la formule (19), on a

$$X[x_0, \bar{\mu}_\theta, T] - X[x_0, \bar{\mu}, T] = \theta \mathbf{X}(\bar{t}) f[X[x_0, \bar{\mu}, \bar{t}], \bar{u}] \\ - \int_{[0, T] \times \mathcal{U}} \bar{\lambda}^\theta(t) \mathbf{X}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u] \bar{\mu}^{t, u} + o(\theta),$$

où $\mathbf{X}(t)$ est définie par l'équation intégrale

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{1} + \int_{[t, T] \times \mathcal{U}} \mathbf{X}(s) \cdot f'_x[X[x_0, \bar{\mu}, s], u] \bar{\mu}^{s, u}.$$

On obtient ainsi

$$0 \geq g[X[x_0, \bar{\mu}, T]] - g[X[x_0, \bar{\mu}_\theta, T]] \\ = -g'_x[X[x_0, \bar{\mu}, T]] \cdot [X[x_0, \bar{\mu}_\theta, T] - X[x_0, \bar{\mu}, T]] + o(\theta) \\ = \theta \bar{\psi}(\bar{t}) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, \bar{t}], \bar{u}] \\ - \int_{[0, T] \times \mathcal{U}} \bar{\lambda}^\theta(t) \bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u] \bar{\mu}^{t, u} + o(\theta) \quad (25)$$

Reprenons $t_0 \in [0, T]$ et $u_0 \in \mathcal{U}$. Soit λ_0 une application mesurable de $[0, T]$ dans $[0, 1]$ et $\theta_0 = \int_0^T \lambda_0(t) dt$. Appliquons la relation (24) avec $\lambda = \alpha \lambda_0$ et $\theta = \alpha \theta_0$ où $\alpha \in [0, 1]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(t_0) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t_0], u_0] &= \frac{1}{\theta_0} \int_{[0, T] \times \mathcal{U}} \lambda_0(t) \bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u] \bar{\mu}^{t, u} \\ &= \bar{\psi}(t_0) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t_0], u_0] - \frac{1}{\theta} \int_{[0, T] \times \mathcal{U}} \alpha \lambda_0(t) \bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u] \bar{\mu}^{t, u} \\ &\leq \bar{\psi}(\bar{t}) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, \bar{t}], \bar{u}] - \frac{1}{\theta} \int_{[0, T] \times \mathcal{U}} \bar{\lambda}^\theta(t) \bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u] \bar{\mu}^{t, u} \end{aligned}$$

D'après la relation (25), le dernier membre est majoré par une quantité qui tend vers 0 quand θ tend vers 0, c'est-à-dire quand α tend vers 0. On obtient donc la relation

$$\bar{\psi}(t_0) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t_0], u_0] - \frac{1}{\theta_0} \int_{[0, T] \times \mathcal{U}} \lambda_0(t) \bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u] \bar{\mu}^{t, u} \leq 0.$$

Comme cette inégalité est vérifiée quels que soient t_0 , u_0 et λ_0 , on obtient que la fonction

$$\text{Max}_{u \in \mathcal{U}} \bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u] = \int_{\mathcal{U}} \bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u] \bar{\mu}^u$$

est constante presque partout. Les conditions nécessaires du théorème 5 bis sont donc bien vérifiées.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI, N., Intégration.
- [2] FILIPPOV, A. F., On certain questions in the theory of optimal control, *Journal Siam Control Serie A*, vol. 1, n° 1 (1962). Préalablement publié dans *Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat. Mech. Astr.*, 2 (1959), pp. 25-32.
- [3] GAMKRELIDZE, R. V., Optimal Sliding régimes, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 143 (1962).
- [4] GHOUILA-HOURI, A., *Problèmes d'existence en théorie de la commande*, Laboratoire d'Automatique théorique, Faculté des Sciences de Caen, UCAT 65-05 (1965).
- [5] GHOUILA-HOURI, A., *Problèmes d'existence en théorie de la commande*, Congrès d'Automatique théorique (Paris, 1965), Dunod éditeur.
- [6] McSHANE, E., Generalized curves. *Duke Math. J.*, 6, pp. 513-536 (1940).
- [7] WARGA, J., Relaxed variational Problems, *Journal of Math. Anal. and Appl.*, 4, pp. 111-128 (1962).
- [8] WAZEWSKI, T., Sur une condition d'existence des fonctions implicites mesurables. *Bull. Ac. Pol. Sc.*, vol. 9, n° 12 (1961).