

REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

IOAN TOMESCO

Méthode pour la détermination de la fermeture transitive d'un graphe fini

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle,
tome 1, n° 4 (1967), p. 33-37.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_4_33_0

© AFCET, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

METHODE POUR LA DETERMINATION DE LA FERMETURE TRANSITIVE D'UN GRAPHE FINI

par IOAN TOMESCO (1)

Résumé. — « Dans ce travail on présente une méthode matricielle pour la détermination de la fermeture transitive d'un graphe fini qui va au résultat plus vite que par la méthode du calcul de la suite des carrés successifs de la matrice unitaire d'incidence du graphe et qui se prête facilement à l'utilisation sur un calculateur électronique. »

I. DEFINITIONS

Dans cet article on utilise des matrices booléennes

$$A = \{ a_{\alpha\beta} \}_{\alpha,\beta=1,\dots,p}$$

où l'on a $a_{\alpha\beta} \in \{0, 1\}$ et $a_{\alpha\alpha} = 1$ pour tout $\alpha = 1, \dots, p$.

Soit $A + B$ la somme booléenne des matrices

$$A = \{ a_{\alpha\beta} \}_{\alpha,\beta=1,\dots,p} \quad \text{et} \quad B = \{ b_{\alpha\beta} \}_{\alpha,\beta=1,\dots,p}$$

définie par $\{ A + B \}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}$ et $A \times B$ leur produit booléen défini par

$$\{ A \times B \}_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^p a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} = a_{\alpha\beta} + \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha, \beta}}^p a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta}$$

(les opérations « + » et « · » sont définies de la façon suivante :

$$x_1 + x_2 = \max \{ x_1, x_2 \} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \min \{ x_1, x_2 \} \quad \text{pour } x_1, x_2 \in \{0, 1\}.$$

On définit une relation d'ordre partiel $A \leq B$ lorsque $a_{\alpha\beta} \leq b_{\alpha\beta}$ pour tout $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, p\}$.

(1) Université de Bucarest.

Si $A \leq B$ et $C \leq D$ on peut immédiatement vérifier que

$$A \times C \leq B \times D.$$

Soit A^n la n -ième puissance de la matrice A par rapport au produit booléien ; de l'ouvrage [2] on obtient :

$$(1) \quad A \leq A^2 \leq \dots \leq A^r = A^{r+1} = A^{r+2} = \dots$$

où l'on a $r \leq p - 1$.

En considérant le graphe fini $G = (X, \Gamma)$ dont les sommets sont x_1, x_2, \dots, x_p on introduit le graphe $G' = (X, \Gamma')$ où l'application Γ' est définie par $\Gamma'x = \{x\} \cup \Gamma x$ pour tout $x \in X$.

Soit $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1, \dots, p}$ la matrice carrée associée au graphe $G' = (X, \Gamma')$

où l'on a : $a_{\alpha\beta} = 1$ s'il y a un arc qui va de x_α à x_β et $a_{\alpha\beta} = 0$ en cas contraire. Évidemment $a_{\alpha\alpha} = 1$ pour tout $\alpha = 1, \dots, p$.

Dans l'ouvrage [1] on introduit la fermeture transitive $\hat{G} = (X, \hat{\Gamma})$ du graphe fini $G = (X, \Gamma)$ où l'application

$$\hat{\Gamma}x = \{x\} \cup \Gamma x \cup \Gamma^2 x \cup \dots \cup \Gamma^{p-1} x$$

pour tout $x \in X$.

Si la matrice $\hat{A} = \{\hat{a}_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1, \dots, p}$ représente la matrice associée d'une manière analogue au graphe $\hat{G} = (X, \hat{\Gamma})$, alors $\hat{a}_{\alpha\alpha} = 1$ et pour tout $\alpha \neq \beta$ l'on a $\hat{a}_{\alpha\beta} = 1$, si, et seulement si dans le graphe initial $G = (X, \Gamma)$ il y a un chemin simple qui va du sommet x_α au sommet x_β .

On peut calculer la matrice \hat{A} comme la $(p - 1)$ -ième puissance de la matrice A , c'est-à-dire que $\hat{A} = A^{p-1}$.

Dans ce qui suit on considère une méthode pour la détermination de la matrice \hat{A} qui va au résultat plus vite que par la méthode du calcul de la suite $\{A^{2^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ et qui se prête mieux à l'utilisation sur un calculateur électronique.

II

On introduit les opérateurs $T_{\mu\nu}$ où $\mu, \nu \in \{1, 2, \dots, p\}$, définis sur l'ensemble des matrices booléiennes $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1, \dots, p}$ avec $a_{\alpha\alpha} = 1$ de la manière suivante :

$$T_{\mu\nu}(A) = B \text{ si } b_{\mu\nu} = \sum_{\rho=1}^p a_{\mu\rho} a_{\rho\nu} = a_{\mu\nu} + \sum_{\substack{\rho=1 \\ \rho \neq \mu, \nu}}^p a_{\mu\rho} a_{\rho\nu} \text{ et } b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$$

pour tout $(\alpha, \beta) \neq (\mu, \nu)$.

On en déduit que $T_{\mu\mu}(A) = A$ et $T_{\mu\nu}^2(A) = T_{\mu\nu}(T_{\mu\nu}(A)) = T_{\mu\nu}(A)$.

Lemme 1. $(T_{\mu\nu}(A))^{p-1} = A^{p-1}$ pour tout $\mu, \nu \in \{1, 2, \dots, p\}$.

DÉMONSTRATION. Nous notons $A^n = \{a_{\alpha\beta}^{(n)}\}_{\alpha, \beta=1, \dots, p}$ et par définition

$$\{T_{\mu\nu}(A)\}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}^{(2)} \text{ et } \{T_{\mu\nu}(A)\}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \leq a_{\alpha\beta}^{(2)}$$

pour tout $(\alpha, \beta) \neq (\mu, \nu)$.

Par conséquent $A \leq T_{\mu\nu}(A) \leq A^2$ et on obtient

$$A^{p-1} \leq (T_{\mu\nu}(A))^{p-1} \leq (A^2)^{p-1}.$$

En s'appuyant sur (1), on trouve $A^{p-1} \leq (T_{\mu\nu}(A))^{p-1} \leq A^{p-1}$, donc

$$(T_{\mu\nu}(A))^{p-1} = A^{p-1}. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

On introduit l'opérateur T défini comme il suit :

$$(2) \quad T = \prod_{\mu, \nu=1}^p T_{\mu\nu} = \prod_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^p T_{\mu\nu} = T_{\alpha_1\beta_1} T_{\alpha_2\beta_2} \dots T_{\alpha_{p^2-p}\beta_{p^2-p}}$$

L'ordre des opérateurs dans le produit (2) c'est quelconque, mais il serait fixé dans le cours des considérations suivantes.

Soit par exemple :

$$(3) \quad T = T_{12}T_{13} \dots T_{1n}T_{21}T_{23} \dots T_{2n} \dots T_{n1}T_{n2} \dots T_{nn-1}$$

Théorème 1. $(T^n(A))^{p-1} = A^{p-1}$ pour tout $n \in N$.

DÉMONSTRATION. En s'appuyant sur le lemme 1 on trouve :

$$\begin{aligned} (T(A))^{p-1} &= (T_{\alpha_1\beta_1}(T_{\alpha_2\beta_2} \dots T_{\alpha_{p^2-p}\beta_{p^2-p}}(A)))^{p-1} = \\ &= (T_{\alpha_2\beta_2} \dots T_{\alpha_{p^2-p}\beta_{p^2-p}}(A))^{p-1} = \dots = (T_{\alpha_{p^2-p}\beta_{p^2-p}}(A))^{p-1} = A^{p-1}. \end{aligned}$$

Par induction on déduit :

$$(T^n(A))^{p-1} = (T(T^{n-1}(A)))^{p-1} = (T^{n-1}(A))^{p-1} = A^{p-1} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Théorème 2. $T^n(A) \geq A^{2^n}$ quel que soit $n \in N$.

DÉMONSTRATION. Appliquant la définition

$$\{T(A)\}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha, \beta}}^p \tilde{a}_{\alpha\gamma} \tilde{a}_{\gamma\beta}$$

où les expressions de forme $\tilde{a}_{\lambda\theta}$ qui se trouvent dans cette somme boo-

léienne ont la valeur : $\tilde{a}_{\lambda\theta} = \{ T(A) \}_{\lambda\theta} \geq a_{\lambda\theta}$ si l'opérateur $T_{\alpha\beta}$ précède à l'opérateur $T_{\lambda\theta}$ dans le produit (2) et $\tilde{a}_{\lambda\theta} = a_{\lambda\theta}$ en cas contraire.

Par conséquent

$$\tilde{a}_{\lambda\theta} \geq a_{\lambda\theta} \quad \text{et} \quad \{ T(A) \}_{\alpha\beta} \geq a_{\alpha\beta} + \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha, \beta}}^p a_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} = a_{\alpha\beta}^{(2)},$$

c'est-à-dire nous obtenons $T(A) \geq A^2$.

En appliquant le principe de l'induction :

$$T^n(A) = T(T^{n-1}(A)) \geq (A^{2^{n-1}})^2 = A^{2^n} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Soit q le plus petit indice pour lequel $A^{2^q} = A^{p-1} = \hat{A}$.

Conformément aux théorèmes 1 et 2 on peut écrire

$$T^q(A) \geq A^{2^q} = \hat{A} \quad \text{et} \quad T^q(A) \leq (T^q(A))^{p-1} = A^{p-1} = \hat{A}$$

ce qui implique $T^q(A) = \hat{A}$ et grâce à cette méthode nous obtenons la matrice \hat{A} associée à la fermeture transitive au moins aussi vite que par la méthode de la détermination de la suite : $A, A^2, A^4, \dots, A^{2^n}, \dots$

Si $a_{\mu\nu} = 1$ on obtient $T_{\mu\nu}(A) = A$ et par conséquent pour le calcul de la matrice $T^n(A) = T(T^{n-1}(A))$ dans l'expression (2) qui définit l'opérateur T nous pouvons considérer seulement les opérateurs $T_{\mu\nu}$ pour lesquels $\{ T^{n-1}(A) \}_{\mu\nu} = 0$.

Au moment où $T^q(A) = T^{q+1}(A)$ on obtient $T^q(A) = \hat{A}$.

En effet, si l'on applique à cette égalité plusieurs fois l'opérateur T , la relation devient :

$$T^q(A) = T^{q+1}(A) = T^{q+2}(A) = \dots = T^s(A) = A^{p-1} = \hat{A}$$

quel que soit

$$s \geq \left[\frac{\log(p-1)}{\log 2} \right] + 1.$$

Soit par exemple la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut calculer

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En appliquant l'opérateur T qui est défini par l'expression (3), on obtient :

$$\begin{aligned}
 T(A) &= T_{12}T_{14}T_{21}T_{23}T_{31}T_{34}T_{42}T_{43} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= T_{12}T_{14}T_{21}T_{23}T_{31}T_{34}T_{42} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= T_{12}T_{14}T_{21}T_{23}T_{31}T_{34} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T_{12}T_{14}T_{21}T_{23}T_{31} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= T_{12}T_{14}T_{21}T_{23} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T_{12}T_{14}T_{21} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= T_{12}T_{14} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T_{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \hat{A}.
 \end{aligned}$$

Dans l'expression de l'opérateur T se trouvent seulement les opérateurs T_{12} , T_{14} , T_{21} , T_{23} , T_{31} , T_{34} , T_{42} , T_{43} pour lesquels

$$a_{12} = a_{14} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{34} = a_{42} = a_{43} = 0.$$

On peut appliquer la méthode proposée aussi au cas où les éléments $a_{\alpha\beta}$ de la matrice A sont des fonctions booléennes d'un nombre quelconque de variables, pour déterminer les conductibilités totales des schémas électriques à contacts et relais.

L'algorithme présenté dans cet article (T étant donné par l'expression (3)) a été programmé et il fonctionne correctement sur le calculateur électronique numérique du Centre de Calcul de l'Université de Bucarest.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, Paris, Dunod, 1963.
2. A. G. LUNTS, *Méthodes algébriques d'analyse et de synthèse des schémas à contacts*, Izvestiia Acad. Nauk S.S.S.R. Série math., 1952 (en russe).
3. K. MAGHOUT, Applications de l'algèbre de Boole à la théorie des graphes et aux programmes linéaires et quadratiques, *Cahiers du Centre d'études de Rech. Opérationnelle*, Bruxelles, 5, 1-2 (1963).
4. I. TOMESCU, Metodă pentru determinarea conductibilităților totale ale unui multipol, *Studii si Cercetări Matematice*, 7 (17), 1965.