REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

M. TREHEL

Étude des treillis de catalogues

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 1, nº 4 (1967), p. 39-49.

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_4_39_0>

R.I.R.O.
(1re année, N° 4, 1967. p. 39-49)

ETUDE DES TREILLIS DE CATALOGUES

par M. Trehel (1)

Résumé. — La nécessité de rendre standard le format des informations sur bandes magnétiques a conduit à envisager une structure générale de fichiers utilisables en linguistique et en gestion : les catalogues. Introduits en 1964, ils sont abordés par les théories des graphes, puis des ensembles ordonnés.

Un catalogue est un fichier dans lequel les informations sont liées par certaines relations. La nature des liaisons est décrite dans une arborescence appelée « carte du catalogue ». Les opérations qui consistent à réunir les informations ou à capter ce qui est commun à deux catalogues correspondent à l'union et l'intersection de la théorie des treillis. L'opération qui consiste à changer les liaisons entre les éléments du catalogue s'appelle la transformation.

Diverses transformations aboutissent à des propriétés intéressantes : les injectives en particulier conservent le nombre des informations. Certaines formules donnent enfin des relations entre l'union, l'intersection et la transformation.

Notations permanentes

Une arborescence E relative à l'ordre $\mathcal{H}$ est notée $(E, \mathcal{H}, \mathcal{G})$ si toute partie couvrant un même élément est totalement ordonnée par $\mathcal{G}$. On étend cette notation à un ensemble de plusieurs arborescences en ordonnant les racines par $\mathcal{G}$.

Soient x éléments A, B, C... et x ensembles finis totalement ordonnés $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$... dont les éléments sont respectivement

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots, c_1, c_2, c_3 \ldots$$

On suppose que a_i est inférieur à a_j, b_i à b_j, c_i à c_j... si $i < j$.

L'ensemble constitué de A, B, C... est noté X et Z est l'union de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$...

I. DEFINITIONS

Une *carte de catalogue* est une arborescence $(X, \mathcal{H}, \mathcal{G})$. On considère l'isomorphisme qui à A fait correspondre un élément de $\mathcal{A}$, à B un élément de $\mathcal{B}$, à C un élément de $\mathcal{C}$, ... à l'ordre $\mathcal{H}$ un ordre h, à $\mathcal{G}$, un ordre g.

---

(1) Maitre-assistant à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Un *catalogue réduit*, noté KR, est une arborescence isomorphe à la carte.

Un *catalogue* est un ordonné (Z, h, g) dans lequel :

1) tout ensemble h-connexe de x éléments, l'un appartenant à $\mathcal{A}$, un autre à $\mathcal{B}$, un autre à $\mathcal{C}$... est isomorphe à la carte ;

2) toute h-chaîne maximale est une h-chaîne maximale d'un catalogue réduit de (Z, h, g) ;

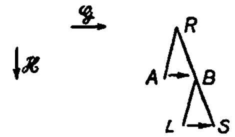
3) si $a_i g a_j$ ou $b_i g b_j$ ou $c_i g c_j$... alors $i < j$;

4) tous les éléments de Z ne sont pas nécessairement utilisés. Ainsi l'ensemble vide noté $\varnothing$ sera considéré comme un catalogue.

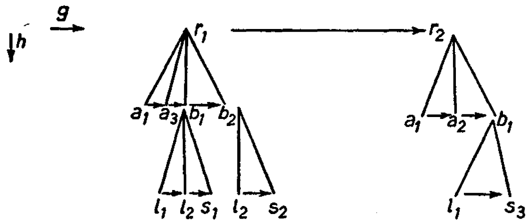
Exemple : On conviendra, pour la commodité du schéma, de placer a_i à gauche de a_j si $a_i g a_j$.

$$X = \{ A, B, L, R, S \}$$

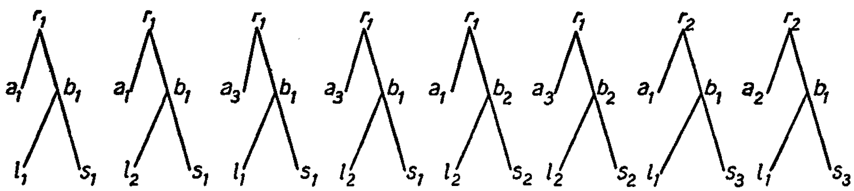
Carte :



catalogue :

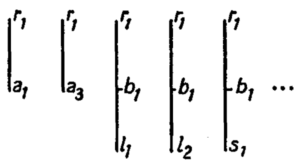


Il y a huit catalogues réduits, soient :



h-chaînes maximales.

Dans l'exemple précédent, on a :



Reconstituer le catalogue à partir de ses h-chaînes revient à les ranger les unes par rapport aux autres. Étant données deux h-chaînes $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ et $\beta = \beta_1\beta_2 \dots \beta_m$, il faut savoir laquelle des deux est à gauche de l'autre.

On suppose que $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2 \dots \alpha_i = \beta_i$ $(i \geqslant 0)$, α_{i+1} et β_{i+1} appartiennent respectivement aux ensembles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. α est à gauche de β si et seulement si

: $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ et $\alpha_{i+1} < \beta_{i+1}$,

ou : $\mathcal{M} \neq \mathcal{N}$ et $M\mathcal{G}N$ sur la carte.

— Dans toute la suite, quand nous écrirons « chaîne maximale » ou « chaîne », il s'agira de « h-chaîne maximale ».

Conditions pour qu'un ensemble E de h-chaînes maximales définisse un catalogue.

On suppose que d'une part ces chaînes sont isomorphes aux chaînes d'une carte donnée et que d'autre part on les a rangées comme il vient d'être dit.

Les conditions sont : *a*) qu'elles soient toutes différentes,

b) que chacune fasse partie d'un catalogue réduit formé uniquement de chaînes de E.

Ces conditions sont visiblement nécessaires et suffisantes.

II. TREILLIS DE CATALOGUES

Égalité, inclusion

Soient les catalogues K_1 et K_2 de même carte sur le même ensemble Z.
— $K_1 = K_2$ s'ils ont les mêmes catalogues réduits, ou, ce qui est équivalent, les mêmes chaînes.

— $K_1 \subset K_2$ si chaque catalogue réduit de K_1 est un catalogue réduit de K_2. Il s'ensuit que chaque chaîne maximale de K_1 est une chaîne maximale de K_2. Le lecteur vérifiera qu'il s'agit d'une relation d'ordre.

Borne supérieure ou union de K_1 et K_2.

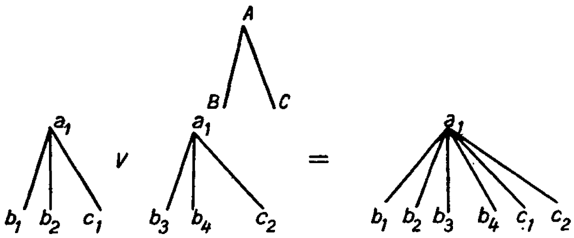
Elle sera notée $K_1 \vee K_2$.

Par définition de l'inclusion, $K_1 \vee K_2$ contient tous les catalogues réduits KR de K_1 et de K_2. Le plus petit catalogue ayant cette propriété est celui dont chaque chaîne maximale est une chaîne maximale, soit de K_1, soit de K_2.

On peut aussi écrire :

$$\boxed{K_1 \vee K_2 = \bigvee_{KR \in K_1 \text{ ou } K_2} KR}$$

Exemple : Sur la carte :



Dans $K_1 \vee K_2$, on trouve des catalogues réduits qui n'appartiennent ni à K_1, ni à K_2.

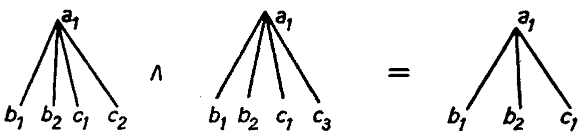
Borne inférieure ou intersection de K_1 et K_2

Elle sera notée $K_1 \wedge K_2$.

Par définition de l'inclusion, $K_1 \wedge K_2$ contient les catalogues réduits de K_1 et de K_2. Il ne peut en contenir d'autres.

$$\boxed{K_1 \wedge K_2 = \bigvee_{KR \in K_1 \text{ et } K_2} KR}$$

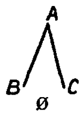
Exemple :

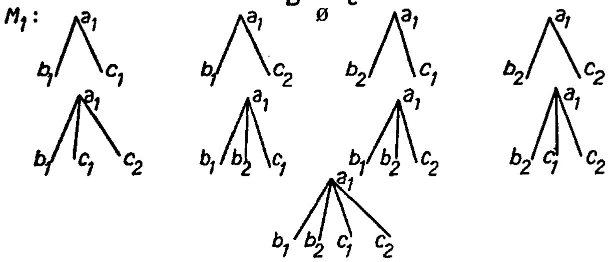


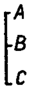
Contrairement à l'union, si $KR \in K_1 \wedge K_2$ alors $KR \in K_1$ et $KR \in K_2$.

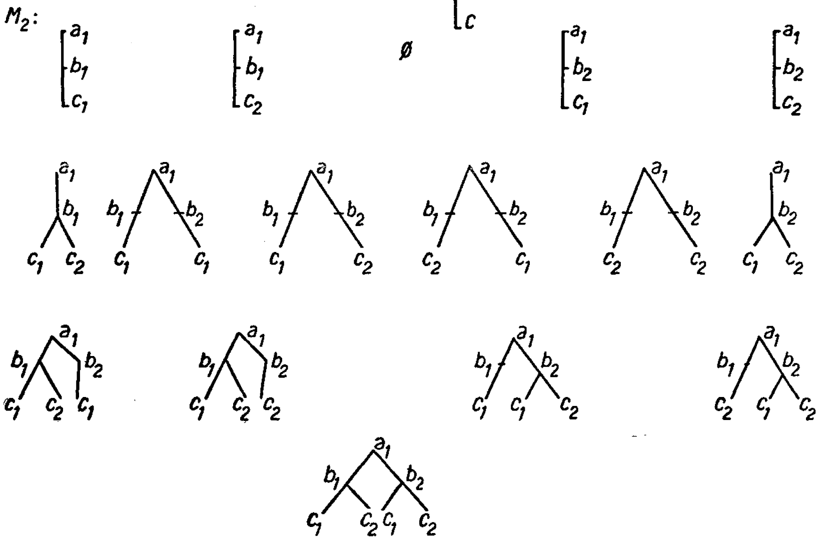
Nous avons une borne supérieure et une inférieure. Il en résulte que les catalogues forment un treillis.

Exemples :

— le treillis M_1, la carte est :  ; $Z = \{ a_1, b_1, b_2, c_1, c_2 \}$.



— le treillis M_2. La carte est :  ; Z est le même.



III. TRANSFORMATIONS DE CATALOGUES

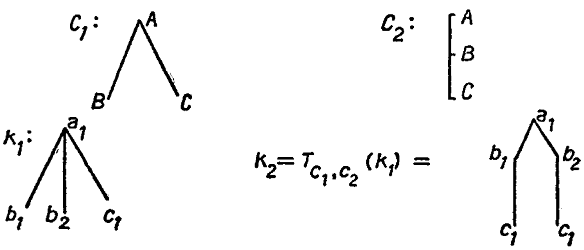
A) Première définition

Soient deux cartes $C_1 = (X, \mathcal{H}_1, \mathcal{G}_1)$ et $C_2 = (X, \mathcal{H}_2, \mathcal{G}_2)$ et KR un catalogue réduit du catalogue K_1, de carte C_1. On note $T_{c_1,c_2}(KR)$ l'isomorphe à C_2 dont les éléments sont ceux de KR.

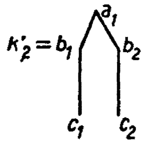
Une transformation T_{c_1,c_2} est une application qui à un catalogue K_1 de carte C_1, fait correspondre le catalogue K_2, de carte C_2 tel que :

$$\boxed{K_2 = \bigvee_{KR \in K_1} T_{c_1,c_2}(KR)}$$

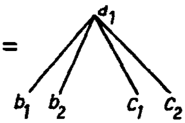
Exemple 1 :



EXEMPLE 2 :



$K'_1 = T_{c_2, c_1}(K'_2) =$



Dans l'exemple 1, le nombre de catalogues réduits n'a pas augmenté, dans l'exemple 2, il est passé de deux à quatre.

B) Deuxième définition d'une transformation

Une transformation est une application qui à un catalogue $K_1 = (Z, h_1, g_1)$ de carte $C_1 = (X, \mathcal{H}_1, \mathcal{G}_1)$ fait correspondre un catalogue $K_2 = (Z, h_2, g_2)$ de carte $C_2 = (X, \mathcal{H}_2, \mathcal{G}_2)$ tel que : $(ab \ldots c)$ est une h_2-chaîne maximale si et seulement si :

1) Dans C_2, $(A\ B \ldots C)$ est une $\mathcal{H}_2$-chaîne maximale.

2) Les éléments $a, b, \ldots, c$ appartenaient à un même catalogue réduit de K_1.

Nous laisserons au lecteur le soin de démontrer l'équivalence de ces deux définitions.

C) Transformations injectives

Nous supposons à partir de maintenant que chacun des ensembles $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ a au moins deux éléments.

Soient $C_1 = (X, \mathcal{H}_1, \mathcal{G}_1)$ et $C_2 = (X, \mathcal{H}_2, \mathcal{G}_2)$ et deux catalogues $K_1 = (Z, h_1, g_1)$ et $K'_1 = (Z, h'_1, g'_1)$ de même carte C_1. T_{c_1, c_2} est injective si, quels que soient K_1 et K'_1, $T_{c_1, c_2}(K_1) = T_{c_1, c_2}(K'_1)$ entraîne $K_1 = K'_1$.

Pour X fixé, soit I l'ensemble des transformations injectives.

D'autre part si pour tout $A, B \in X$, $A \mathcal{H}_1 B$ entraîne $A \mathcal{H}_2 B$ ou $B \mathcal{H}_2 A$, on dit que T_{c_1, c_2} conserve la comparabilité. Soit P l'ensemble de telles transformations.

Propriété $I = P$

On démontre : 1) $P \subset I$,

2) $\complement P \subset \complement I$, ($\complement$ signifiant complémentaire).

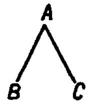
1) Soit T_{c_1, c_2} appartenant à P. Elle transforme K_1 en K_2, K'_1 en K_2. Notre conclusion est : $K_1 = K'_1$.

Soit une chaîne maximale de K_1. Par la seconde définition de T_{c_1, c_2}, ses éléments font partie d'une chaîne de K_2.

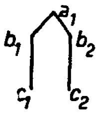
Or $K_2 = T_{c_1, c_2}(K'_1)$. Ces éléments appartiennent alors à un même catalogue réduit de K'_1 où ils ne peuvent que former une chaîne. Les chaînes de K_1 sont des chaînes de K'_1 donc $K_1 \subset K'_1$. On aurait de même $K'_1 \subset K_1$.

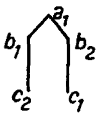
2) Soit une transformation quelconque de $\complement P$, il faut montrer qu'elle n'est pas injective.

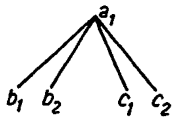
Contre-exemple : Si 

devient 

,

alors 

, 

ont le même transformé : 

Il n'y a pas injection.

Pour une carte plus complexe, le contre-exemple se déduit de celui-ci.

Propriété

Le nombre de catalogues réduits est un invariant d'une transformation injective.

— Soit KR un catalogue réduit isomorphe à C_1. Supposons que $KR' = T_{c_1,c_2}(KR)$ appartienne à $K_2 = T_{c_1,c_2}(K_1)$. Montrons que KR est un catalogue réduit de K_1.

T_{c_1,c_2} conserve la comparabilité. Il y a donc dans une chaîne maximale de KR' les éléments d'une ou de plusieurs chaînes de K_1. Les chaînes de KR appartiennent alors à K_1, ou $KR \in K_1$.

— La première définition des transformations montre que celles-ci augmentent ou laissent invariant le nombre de catalogues réduits. On vient de voir que ce nombre n'a pas augmenté. Il est donc invariant.

Propriété

Si T_{c_1,c_2} est injective, alors pour tout catalogue K_1 construit sur C_1, on a : $T_{c_2,c_1} \cdot T_{c_1,c_2}(K_1) = K_1$.

Soit $K_2 = T_{c_1,c_2}(K_1)$; $T_{c_2,c_1}(K_2) = \bigvee_{KR' \in K_2} T_{c_2,c_1}(KR')$.

Or d'après la propriété précédente, si KR' appartient à K_2, il existe KR appartenant à K_1 tel que $KR' = T_{c_1,c_2}(KR)$.

Donc

$$T_{c_2,c_1}(K_2) = \bigvee_{KR \in K_1} T_{c_2,c_1} \cdot T_{c_1,c_2}(KR) = \bigvee_{KR \in K_1} KR = K_1.$$

D) Transformations surjectives

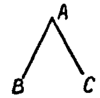
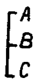
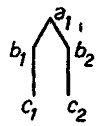
T est une transformation surjective d'un treillis M de catalogues dans un autre, M', si pour tout K de M', il existe L de M tel que $T(L) = K$.

Propriété

T_{c_1,c_2} est surjective si et seulement si T_{c_2,c_1} est injective.

1) Condition suffisante. Si T_{c_2,c_1} est injective, on trouve $L = T_{c_2,c_1}(K)$.

2) Condition nécessaire. Si T_{c_2,c_1} n'est pas injective, par exemple si

C_1 est :  et si C_2 est :  , il est clair que le catalogue  ne peut être atteint.

— Puisque les transformations injectives ne suppriment pas de comparabilités, les surjectives n'en ajoutent pas.

IV. PROPRIETES DE $T(K_1 \vee K_2)$, $T(K_1 \wedge K_2)$ APPLICATIONS

A) $$\boxed{T(K_1 \vee K_2) \supset T(K_1) \vee T(K_2)}$$

Soient K_1 et K_2 deux catalogues de carte C_1.

$$T = T_{c_1,c_2} \quad ; T(K_1 \vee K_2) = \bigvee_{KR \in K_1 \vee K_2} T(KR)$$

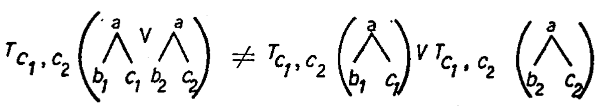
$$\supset \bigvee_{KR \in K_1} T(KR) \vee \bigvee_{KR \in K_2} T(KR) = T(K_1) \vee T(K_2).$$

Propriété

Les transformations surjectives et elles seules conservent l'union.

1) T est surjective ; montrons que : $T(K_1 \vee K_2) \subset T(K_1) \vee T(K_2)$. Soit une chaîne maximale α de $T(K_1 \vee K_2)$. T n'ajoute pas de comparabilité donc α est une partie de la chaîne β de $K_1 \vee K_2$ soit de K_1 par exemple. β étant une chaîne de K_1, α sera une chaîne de $T(K_1)$.

2) Si T n'est pas surjective, l'exemple le plus simple montre qu'il n'en est pas de même.



B) $$\boxed{T(K_1 \wedge K_2) \subset T(K_1) \wedge T(K_2)}$$

En effet, soit un catalogue réduit KR de K_1 et K_2. $T(KR) \in T(K_1)$ et $T(KR) \in T(K_2)$.

Donc

$$T(K_1 \wedge K_2) = \bigvee_{KR \in K_1 \wedge K_2} T(KR) \subset \bigvee_{KR' \in T(K_1) \text{ et } T(K_2)} KR' = T(K_1) \wedge T(K_2).$$

Propriété

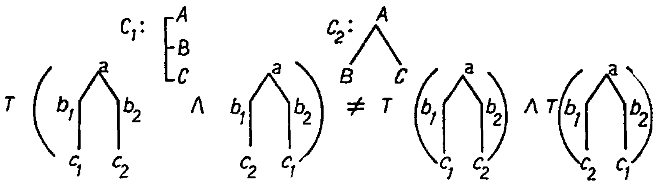
Les transformations injectives et elles seules, conservent l'intersection.

1) Elles n'ajoutent pas de catalogue réduit. Par conséquent, si $KR' \in T(K_1) \wedge T(K_2)$ alors, $KR' = T(KR)$, $KR \in K_1 \wedge K_2$.

On a donc

$$T(K_1 \wedge K_2) = \bigvee_{KR \in K_1 \wedge K_2} T(KR) = \bigvee_{KR' \in T(K_1) \text{ et } T(K_2)} KR' = T(K_1) \wedge T(K_2).$$

2) Si T n'est pas injective, l'exemple le plus simple montre qu'il n'en est pas de même :



Application

Le produit de deux transformations dont la seconde est surjective est une transformation.

En effet si T_{c_2,c_3} est surjective, elle conserve l'union, et :

$$T_{c_2,c_3}\, T_{c_1,c_2}(K_1) = T_{c_2,c_3} \cdot \left(\bigvee_{KR \in K_1} T_{c_1,c_2}(KR) \right) = \bigvee_{KR \in K_1} T_{c_2,c_3} . T_{c_1,c_2}(KR)$$

$$= \bigvee_{KR \in K_1} T_{c_1,c_3}(KR) = T_{c_1,c_3}(K_1).$$

On verrait de même que :

— Le produit de deux transformations surjectives est une transformation surjective.

— Le produit de deux transformations injectives est une transformation injective.

V. TRANSFORMES DE TREILLIS DE CATALOGUES

A) T injective

Le transformé du treillis M_1 par exemple, n'est pas un $\wedge$, $\vee$ treillis. Définissons un ordre α pour lui donner une structure de treillis. $T(K_1)\alpha T(K_2)$ si $K_1 \subset K_2$.

La borne inférieure de $T(K_1)$ et $T(K_2)$ est $T(K_1 \wedge K_2)$. C'est aussi $T(K_1) \wedge T(K_2)$. La borne supérieure notée $T(K_1) \underset{T}{\vee} T(K_2)$ est $T(K_1 \vee K_2)$, d'où :

Propriété

Si T est injective, le transformé d'un $\wedge$, $\vee$ treillis est un $\wedge$, $\underset{T}{\vee}$ treillis.

B) T surjective

Définissons la relation d'équivalence $\underset{T}{\equiv}$:

$$K_1 \underset{T}{\equiv} K_2 \text{ si } T(K_1) = T(K_2).$$

On appelle Sup (K) l'union de tous les catalogues de la classe de K. Soient :

$$T(K_1) \underset{T}{\wedge} T(K_2) = T(\text{Sup }(K_1) \wedge \text{Sup }(K_2))$$

$$T(K_1) \underset{T}{\vee} T(K_2) = T(\text{Sup }(K_1) \vee \text{Sup }(K_2)).$$

1) Sup (K) est un catalogue de la classe d'équivalence de K car T conserve l'union.

2) Si $T = T_{c_1,c_2}$ et $T' = T_{c_2,c_1}$, on peut écrire $Sup\ (K) = T' \cdot T(K)$. En effet $T' \cdot T(K)$ appartient à la classe de K car T' est injective et $T \cdot T' \cdot T(K) = T(K)$. D'autre part pour tout K' de la classe de K on a $K' \subset T' \cdot T(K') = T' \cdot T(K) : T'.\ T(K)$ est donc bien la borne supérieure de la classe d'équivalence.

3) Montrons que $\wedge = \underset{T}{\wedge}$.

On utilise le fait que T' conserve l'intersection.

$$T(K_1) \underset{T}{\wedge} T(K_2) = T(T'.T(K_1) \wedge T'T(K_2)) = T \cdot T'(T(K_1) \wedge T(K_2))$$
$$= T(K_1) \wedge T(K_2).$$

4) Montrons que $\vee = \underset{T}{\vee}$.

On utilise le fait que T conserve l'union

$$T(K_1) \underset{T}{\vee} T(K_2) = T(T'T(K_1) \vee T'T(K_2)) = T.T'.T(K_1)$$
$$\vee\ TT'T(K_2) = T(K_1) \vee T(K_2).$$

Finalement avec $\underset{T}{\wedge}$, $\underset{T}{\vee}$ on a le même treillis qu'avec $\wedge$, $\vee$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Veillon : « Introduction à la théorie des catalogues ». Centre d'Études pour la Traduction Automatique Document G. 2100. B. Grenoble, janvier 1965.

[2] M. Kay et T. Ziehe : « Natural language in computer form » Rand Corporation, février 1965.

[3] M. Trehel : « Contribution à la théorie des catalogues ». Thèse de troisième cycle. Grenoble, novembre 1965.

[4] R. C. Daley et P. G. Neumann : « A general Purpose file system for secondary storage » Project MAC 1966.