

REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

B. ROY

Nombre chromatique et plus longs chemins d'un graphe

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle,
tome 1, n° 5 (1967), p. 129-132.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_5_129_0

© AFCET, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOMBRE CHROMATIQUE ET PLUS LONGS CHEMINS D'UN GRAPHE

par B. ROY (1)

Résumé — *C. Berge a formulé la conjecture suivante : tout graphe orienté fini G dont le nombre chromatique $\gamma(G)$ est égal à k , possède au moins un chemin élémentaire rencontrant exactement k sommets.*

L'objet de cette note est d'apporter une preuve de cette conjecture, (théorème 1), et de mettre en évidence l'existence d'une orientation remarquable des arêtes d'un graphe quelconque de nombre chromatique k (théorème 2).

Nous définirons un graphe orienté fini $G = (X, \Gamma)$ par la donnée d'un ensemble fini X et d'une application Γ de X dans l'ensemble de ses parties. La terminologie employée ici sera celle introduite par C. Berge dans [1]. Précisons qu'un chemin est une notion qui tient compte de l'orientation, et que pour un chemin élémentaire μ le nombre $s(\mu)$ de sommets qu'il rencontre (extrémités comprises) est clairement défini.

Théorème 1 (2).

Si dans un graphe orienté fini G il n'existe pas de chemin élémentaire μ tel que : $s(\mu) > k$ alors G est k -chromatique.

La démonstration qui suit fournit une partition de X en k sous-ensembles intérieurement stables non vides, donc une coloration avec k couleurs.

(1) Directeur de la Direction Scientifique de la S.E.M.A.

(2) VITAVER, dans une note (Cf. [3]) dont nous venons de prendre connaissance au moment de mettre sous presse, fournit une démonstration simple de ce résultat valable seulement dans le cas particulier d'un graphe G sans circuit ; il en déduit aisément que tout graphe de nombre chromatique γ possède nécessairement, dans n'importe quelle orientation qui en fait un graphe sans circuit, un chemin rencontrant au moins γ sommets ; Vitaver fait observer en outre qu'ainsi énoncé, ce résultat ne peut être amélioré. Les commentaires qui précèdent notre théorème 2 montrent que, sous cette forme également, le résultat de Vitaver peut être généralisé.

Démonstration

Soit S_1 un sous-ensemble de X qui soit intérieurement stable, et tel que tout sommet ne lui appartenant pas puisse être atteint par un chemin issu de S_1 . Posons :

$$\begin{aligned} S_2 &= \Gamma(S_1) - S_1 \\ S_3 &= \Gamma(S_2) - S_1 - S_2 \\ &\dots\dots\dots \\ S_{i+1} &= \Gamma(S_i) - S_1 - S_2 - \dots - S_{i+1} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Il est clair que si S_{i+1} n'est pas vide, l'un quelconque de ses éléments possède un précédent dans S_i (qui est donc également non vide), et ainsi de suite jusqu'à S_1 . Tout sommet hors de S_1 , étant un descendant d'au moins un sommet de S_1 , pourra être classé, et l'on réalise de la sorte une partition de X en un nombre fini de classes consécutives non vides $S_1, S_2, \dots, S_i \dots$

A une telle partition on peut associer deux catégories A et B d'arcs définies comme suit :

- $(x, y) \in A$ si y est dans la classe qui suit immédiatement celle de x ;
- $(x, y) \in B$ si x et y sont dans la même classe.

Considérons un arc $(x, y) \in B$, et notons $D_A(y)$ l'ensemble des sommets accessibles à partir de y (y compris) en n'empruntant que des arcs de catégorie A . Soit alors $S'_1, S'_2, \dots, S'_i, \dots$ la partition déduite de la précédente de la façon suivante :

- si $z \in S_i$ et $z \notin D_A(y)$, alors $z \in S'_i$
- si $z \in S_i$ et $z \in D_A(y)$, alors $z \in S'_{i+1}$.

(ce qui peut conduire à faire apparaître une classe supplémentaire non vide). Montrons que cette nouvelle partition possède encore la propriété P à laquelle nous nous référerons par la suite sous le nom de propriété P :

pour tout i tel que $S'_i \neq \emptyset$, quel que soit $z \in S'_i$, il existe $t \in S'_{i-1}$ tel que $z \in \Gamma(t)$.

Soit en effet z un élément quelconque de S_i et t l'un de ses précédents dans S_{i-1} (il en existe puisque l'ancienne partition possède la propriété P comme nous l'avons indiqué plus haut) ; l'arc $(t, z) \in A$ et par conséquent si $z \notin D_A(y)$ alors $t \notin D_A(y)$. Ainsi, dans le cas $z \notin D_A(y)$, il vient : $t \in S'_{i-1}$ et $z \in S'_i$. La propriété P est donc vérifiée pour tous les sommets qui ne changent pas de classes. Considérons maintenant le cas $z \in D_A(y)$ avec $z \neq y$; d'après la définition même de $D_A(y)$, il existe un précédent t de z tel que : $t \in S_{i-1}$ et $t \in D_A(y)$; il s'ensuit dans ce cas $t \in S'_i$ et $z \in S'_{i+1}$, ce qui établit la propriété P pour tous les sommets qui changent de classe, à l'exception de y . Le précédent x de y ne change pas de classe alors que y en change, ce qui achève d'établir la validité de P .

Si l'arc (x, y) qui a servi à définir la nouvelle partition avait ses sommets dans S_h , il est clair que dans cette nouvelle partition les arcs de catégorie B seront les mêmes que dans l'ancienne entre sommets des $h - 1$ premières classes, alors qu'il y en aura un de moins entre sommets de S_h .

Il suffit par conséquent d'appliquer la transformation précédente, successivement et chaque fois jusqu'à épuisement, à partir des arcs de catégorie B entre sommets de la seconde classe, puis de la troisième, etc. pour obtenir une partition $S_1^*, S_2^*, \dots, S_i^*, \dots, S_p^*$ des sommets de X , qui possède la propriété P , et n'admette aucun arc de catégorie B . Chacune des parties S_i^* est donc intérieurement stable, et le graphe G admet une coloration avec p couleurs.

De la propriété P il découle enfin que tout sommet de S_i^* est extrémité terminale d'un chemin élémentaire rencontrant exactement i sommets. D'après l'hypothèse faite sur G , on a nécessairement $p \leq k$, et le graphe G est donc bien k -chromatique.

L'énoncé de C. Berge indiqué dans le résumé se déduit aisément de celui du théorème auquel il est d'ailleurs équivalent. On peut encore donner à ce résultat la forme intéressante suivante :

si M désigne l'ensemble des chemins élémentaires d'un graphe G , on a nécessairement l'inégalité suivante :

$$\gamma(G) \leq \text{Max}_{\mu \in M} s(\mu).$$

On ne peut améliorer cette borne du nombre chromatique car il est toujours possible de trouver une orientation des arêtes de G qui conduise à l'inégalité. De façon plus générale :

Théorème 2.

N'importe quel graphe G vérifiant $\gamma(G) = k$ peut recevoir une orientation de chaque arête qui en fasse un graphe sans circuit jouissant des propriétés suivantes :

- (α) *En désignant par S_1 les sommets sans précédents, par S_2 ceux sans précédents hors de S_1 , par S_3 ceux sans précédents hors de S_1, S_2 , etc., on définit une partition de X en exactement k classes intérieurement stables.*
- (β) *Quel que soit $x_{h+1} \in S_{h+1}$, le nombre chromatique du sous-graphe engendré par les classes S_1, \dots, S_h et x_{h+1} est égal à $h + 1$.*

Démonstration

Pour prouver l'existence d'une telle décomposition, il suffit de considérer une coloration avec k couleurs, de numéroter celles-ci de 1 à k , puis de modifier s'il le faut cette coloration de telle sorte que le sous-graphe engendré par les sommets porteurs des h premières couleurs auxquels on adjoint un sommet de couleur $h + 1$, ait toujours un nombre

chromatique égal à $h + 1$. Pour cela, on considérera en premier lieu les sommets porteurs de la couleur k . S'il existe parmi eux un sommet x , tel qu'adjoint à l'ensemble des sommets porteurs des couleurs 1 à $k - 1$, le sous-graphe ainsi défini soit $k - 1$ chromatique, on modifiera la coloration de telle sorte que x ne soit plus porteur de la couleur k , et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les sommets restant porteurs de la couleur k aient la propriété voulue. On recommencera avec les sommets porteurs de la couleur $k - 1$, ... Finalement, il ne restera plus qu'à orienter les arcs conformément au numéro croissant des couleurs que portent leurs extrémités pour obtenir l'orientation et la décomposition cherchées.

On remarquera que celles-ci vérifient en outre :

- (γ) Quel que soit $x \in S_h$, il admet au moins un précédent dans chacune des classes S_{h-1}, \dots, S_1 (propriété plus forte que P).
- (δ) Chaque partie intérieurement stable S_h ($h = 1, \dots, k$) est maximale vis-à-vis de cette propriété dans le sous-graphe engendré par $S_h \cup S_{h+1} \cup \dots \cup S_k$.

Si l'on suppose maintenant que le graphe G est tel que le nombre chromatique de chacun de ses sous-graphes (lui compris) soit égal au nombre de sommets d'une clique du dit sous-graphe on constate que l'orientation et la décomposition montrent l'existence, pour chaque sommet $x \in S_h$ d'une clique $C_h(x)$ formée de h sommets contenant x , et un élément de chacune des classes S_{h-1}, \dots, S_1 (ce qui est une propriété plus forte que γ).

Ne pourrait-on pas déduire de la famille de cliques ainsi définie une partition de X à l'aide de cliques, en nombre égal à celui d'une partie stable de G . S'il en était ainsi, la conjecture célèbre de C. Berge [2] sur les graphes totalement parfaits serait à son tour établie.

REFERENCES

- [1] C. BERGE, *La théorie des graphes et ses applications* (Dunod, 1958).
- [2] C. BERGE, *Contributions de la théorie des graphes à l'étude des relations d'ordre*, (ICC Research Report, n° 67/11 January 1967).
- [3] L. M. VITAVER *Determination of minimal colorings for vertices of a graph by means of boolean powers of the adjacency matrix* (Soviet Mathematics (Dorlady) Nov.1962 Vol. 3 n° 6.)