

# REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

IOAN TOMESCU

## **Un algorithme pour la détermination des plus petites distances entre les sommets d'un réseau**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle*,  
tome 1, n° 5 (1967), p. 133-139.

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1967\\_\\_1\\_5\\_133\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_5_133_0)

© AFCET, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UN ALGORITHME POUR LA DETERMINATION DES PLUS PETITES DISTANCES ENTRE LES SOMMETS D'UN RÉSEAU

par Ioan TOMESCU (1)

*Résumé.* — On présente une méthode de calcul matriciel d'une très bonne convergence et qui se prête facilement à l'utilisation sur un calculateur électronique.

Soit donné un graphe fini sans boucle  $G = (X, \Gamma)$  avec  $p$  sommets.

On définit une application  $l(u)$  sur l'ensemble  $U$  des arcs du graphe avec les valeurs dans l'ensemble  $\{x \mid x \geq 0\}$  et on introduit la matrice carrée  $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1, \dots, p}$  où l'on a :  $a_{\alpha\alpha} = 0$  ;  $a_{\alpha\beta} = l(x_\alpha, x_\beta)$  s'il y a un arc qui va de  $x_\alpha$  à  $x_\beta$  et  $a_{\alpha\beta} = \infty$  en cas contraire.

Les plus petites distances entre les sommets du réseau, désignées par  $\hat{a}_{\alpha\beta}$  sont respectivement :

$$\hat{a}_{\alpha\beta} = \min_{\mu=(x_\alpha, \dots, x_\beta)} \{ \sum_{u \in \mu} l(u) \} = \min \{ a_{\alpha\beta}, \min_{\substack{k_1=1, \dots, p \\ k_1 \neq \alpha, \beta}} (a_{\alpha k_1} + a_{k_1 \beta}), \dots \\ \dots, \min_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_{p-2}=1, \dots, p \\ k_1, k_2, \dots, k_{p-2} \neq \alpha, \beta \\ k_1 \neq k_2, k_1 \neq k_3, \dots, k_{p-3} \neq k_{p-2}}} (a_{\alpha k_1} + a_{k_1 k_2} + \dots + a_{k_{p-2} \beta}) \} \quad (1)$$

Si l'on introduit la multiplication des matrices

$$A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1, \dots, p} \text{ et } B = \{b_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1, \dots, p}$$

avec

$$a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta} \in \{x \mid x \geq 0\} \cup \{\infty\} \text{ et } a_{\alpha\alpha} = b_{\alpha\alpha} = 0,$$

définie par

$$\{A \times B\}_{\alpha\beta} = \min_{\gamma=1, \dots, p} (b_{\alpha\gamma} + c_{\gamma\beta}) = \min \{ b_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}, \min_{\substack{\gamma=1, \dots, p \\ \gamma \neq \alpha, \beta}} (b_{\alpha\gamma} + c_{\gamma\beta}) \}$$

(1) Université de Bucarest

(cette loi est associative), alors la matrice  $A^{p-1} = A^p = \dots$  représente la matrice des plus petites distances entre les sommets du réseau (voir [2], [4]).

On introduit une relation d'ordre partiel dans l'ensemble des matrices aux éléments dans l'ensemble  $\{x \mid x \geq 0\} \cup \{\infty\}$  de la façon suivante :  $A \leq B$  si  $a_{\alpha\beta} \leq b_{\alpha\beta}$  pour tout  $\alpha, \beta = 1, \dots, p$ . Si  $A \leq C$  et  $B \leq D$  on déduit que  $a_{\alpha\gamma} + b_{\gamma\beta} \leq c_{\alpha\gamma} + d_{\gamma\beta}$  et donc

$$\min_{\gamma=1, \dots, p} (a_{\alpha\gamma} + b_{\gamma\beta}) \leq \min_{\gamma=1, \dots, p} (c_{\alpha\gamma} + d_{\gamma\beta}),$$

c'est-à-dire  $A \times B \leq C \times D$ .

Si  $a_{\alpha\alpha} = 0$  alors  $\{A^2\}_{\alpha\beta} = \min \{a_{\alpha\beta}, \min_{\substack{\gamma=1, \dots, p \\ \gamma \neq \alpha, \beta}} (a_{\alpha\gamma} + a_{\gamma\beta})\} \leq a_{\alpha\beta}$  et par conséquent  $A \geq A^2 \geq \dots \geq A^{p-1} = A^p = \dots$

On introduit les opérateurs  $T_{1\alpha}$  où  $\alpha \in \{2, 3, \dots, p\}$  définis sur l'ensemble des matrices  $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1, \dots, p}$  avec  $a_{\alpha\beta} \in \{x \mid x \geq 0\} \cup \{\infty\}$  et  $a_{\alpha\alpha} = 0$  comme il suit :

$$T_{1\alpha}(A) = B$$

si

$$b_{1\alpha} = \min \{a_{1\alpha}, \min_{\substack{\rho=2, \dots, p \\ \rho \neq \alpha}} (a_{1\rho} + a_{\rho\alpha})\} \quad \text{et} \quad b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}$$

pour tout  $(\mu, \nu) \neq (1, \alpha)$ .

On en déduit que  $A \geq T_{1\alpha}(A) \geq A^2$ , donc

$$A^{p-1} \geq (T_{1\alpha}(A))^{p-1} \geq (A^2)^{p-1} = A^{p-1}$$

et par conséquent  $(T_{1\alpha}(A))^{p-1} = A^{p-1}$ .

On introduit l'opérateur  $T_1 = T_{1p}T_{1p-1} \dots T_{12}$ .

Par définition  $T_1(A) = T_{1p}(T_{1p-1}(T_{1p-2} \dots (T_{12}(A)) \dots))$  et donc

$$\begin{aligned} (T_1(A))^{p-1} &= (T_{1p}(T_{1p-1}T_{1p-2} \dots T_{12}(A)))^{p-1} = \\ &= (T_{1p-1}T_{1p-2} \dots T_{12}(A))^{p-1} = \dots = A^{p-1}. \end{aligned}$$

**Proposition.**  $(T_1^n(A))^{p-1} = A^{p-1}$  pour tout  $n \in N$ , où  $T_1^n$  est l'itération  $n$  fois de suite de l'opérateur  $T_1$ .

La démonstration se fait par induction :

$$(T_1^n(A))^{p-1} = (T_1(T_1^{n-1}(A)))^{p-1} = (T_1^{n-1}(A))^{p-1} = A^{p-1}.$$

**Théorème 1.**  $\{T_1^n(A)\}_{1\alpha} \leq \{A^{n+1}\}_{1\alpha}$  pour tout  $\alpha = 2, \dots, p$  et  $n \in N$ .

La démonstration se fait par induction par rapport à  $n$  :

$$\{T_1(A)\}_{12} = \min \{a_{12}, \min_{\beta=3, \dots, p} (a_{1\beta} + a_{\beta 2})\} = \{A^2\}_{12}.$$

Si nous avons démontré que

$$\{ T_1(A) \}_{12} \leq \{ A^2 \}_{12}, \dots, \{ T_1(A) \}_{1\alpha-1} \leq \{ A^2 \}_{1\alpha-1}$$

on déduit que

$$\begin{aligned} \{ T_1(A) \}_{1\alpha} &= \min \{ a_{1\alpha}, \min_{\beta=2, \dots, \alpha-1} (\{ T_1(A) \}_{1\beta} + a_{\beta\alpha}), \min_{\beta=\alpha+1, \dots, p} \\ &\quad (a_{1\beta} + a_{\beta\alpha}) \} \leq \min \{ a_{1\alpha}, \min_{\substack{\beta=2, \dots, p \\ \beta \neq \alpha}} (a_{1\beta} + a_{\beta\alpha}) \} = \{ A^2 \}_{1\alpha} \end{aligned}$$

pour  $3 \leq \alpha \leq p$  parce que  $\{ T_1(A) \}_{1\beta} \leq \{ A^2 \}_{1\beta} \leq a_{1\beta}$  pour tout  $\beta = 2, \dots, \alpha - 1$ .

Il résulte que  $\{ T_1(A) \}_{1\alpha} \leq \{ A^2 \}_{1\alpha}$  pour  $\alpha = 2, \dots, p$ .

Si nous supposons que  $\{ T_1^k(A) \}_{1\alpha} \leq \{ A^{k+1} \}_{1\alpha}$  pour tout  $\alpha = 2, \dots, p$  on obtient :

$$\begin{aligned} \{ T_1^{k+1}(A) \}_{12} &= \min \{ \{ T_1^k(A) \}_{12}, \min_{\beta=3, \dots, p} (\{ T_1^k(A) \}_{1\beta} + a_{\beta 2}) \} \leq \\ &\leq \min \{ \{ A^{k+1} \}_{12}, \min_{\beta=3, \dots, p} (\{ A^{k+1} \}_{1\beta} + a_{\beta 2}) \} = \{ A^{k+2} \}_{12} \end{aligned}$$

parce qu'il y a  $\min (\{ A^{k+1} \}_{12}, a_{12}) = \{ A^{k+1} \}_{12}$ .

Si

$$\{ T_1^{k+1}(A) \}_{12} \leq \{ A^{k+2} \}_{12}, \dots, \{ T_1^{k+1}(A) \}_{1\alpha-1} \leq \{ A^{k+2} \}_{1\alpha-1},$$

alors

$$\begin{aligned} \{ T_1^{k+1}(A) \}_{1\alpha} &= \min \{ \{ T_1^k(A) \}_{1\alpha}, \min_{\beta=2, \dots, \alpha-1} (\{ T_1^k(A) \}_{1\beta} + a_{\beta\alpha}), \\ &\quad \min_{\beta=\alpha+1, \dots, p} (\{ T_1^k(A) \}_{1\beta} + a_{\beta\alpha}) \} \leq \min \{ \{ A^{k+1} \}_{1\alpha}, \\ &\quad \min_{\substack{\beta=2, \dots, p \\ \beta \neq \alpha}} (\{ A^{k+1} \}_{1\beta} + a_{\beta\alpha}) \} = \{ A^{k+2} \}_{1\alpha} \end{aligned}$$

pour  $3 \leq \alpha \leq p$  (parce que

$$\{ A^{k+1} \}_{1\alpha} \leq a_{1\alpha} \text{ et } \{ T_1^{k+1}(A) \}_{1\beta} \leq \{ A^{k+2} \}_{1\beta} \leq \{ A^{k+1} \}_{1\beta}$$

pour tout  $\beta = 2, \dots, \alpha - 1$ ), donc  $\{ T_1^{k+1}(A) \}_{1\alpha} \leq \{ A^{k+2} \}_{1\alpha}$  pour tout  $\alpha = 2, \dots, p$ . C.Q.F.D.

Si  $q$  est le plus petit indice avec  $A^q = A^{p-1}$ , alors

$$\{ T_1^{q-1}(A) \}_{1\alpha} \leq \{ A^q \}_{1\alpha} = \{ A^{p-1} \}_{1\alpha}$$

pour tout  $\alpha = 2, \dots, p$ , mais

$$\{ T_1^{q-1}(A) \}_{1\alpha} \geq \{ (T_1^{q-1}(A))^{p-1} \}_{1\alpha} = \{ A^{p-1} \}_{1\alpha},$$

donc  $\{ T_1^{q-1}(A) \}_{1\alpha} = \{ A^{p-1} \}_{1\alpha}$  ( $q \leq p - 1$ ).

Au moment où  $T_1^r(A) = T_1^{r+1}(A)$  on obtient

$$T_1^r(A) = T_1^{r+1}(A) = T_1^{r+2}(A) = \dots = T_1^{p-2}(A)$$

et par conséquent  $\{T_1^r(A)\}_{1\alpha} = \{T_1^{p-2}(A)\}_{1\alpha} = \{A^{p-1}\}_{1\alpha}$ .

**Théorème 2.** Pour toute matrice carrée  $A$  d'ordre  $p$  avec

$$a_{\alpha\beta} \in \{x \mid x \geq 0\} \cup \{\infty\} \quad \text{et} \quad a_{\alpha\alpha} = 0$$

ont lieu les relations :

$$\{A^{p-1}\}_{12} = \min(\{T_1^{p-3}(A)\}_{12}, \sum_{i=3}^p a_{ii-1} + a_{1p}, \sum_{i=3}^{p-2} a_{ii-1} + a_{1p-1} + a_{p-1p} + a_{pp-2}).$$

$$\{A^{p-1}\}_{13} = \min(\{T_1^{p-3}(A)\}_{13}, \sum_{i=4}^p a_{ii-1} + a_{12} + a_{2p}).$$

$$\{A^{p-1}\}_{1\alpha} = \{T_1^{p-3}(A)\}_{1\alpha} \text{ pour tout } 4 \leq \alpha \leq p.$$

*Démonstration.* Pour tout  $\alpha = 2, \dots, p$  et  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r \neq 1, \alpha$ ;  $\gamma_1 \neq \gamma_2, \dots, \gamma_{r-1} \neq \gamma_r$  et  $r \leq p-3$  on a la relation :

$$\{T_1^{p-3}(A)\}_{1\alpha} \leq a_{1\gamma_1} + \sum_{i=1}^{r-1} a_{\gamma_i\gamma_{i+1}} + a_{\gamma_r\alpha}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \{T_1^{p-3}(A)\}_{1\alpha} &= \{T_1(T_1^{p-4}(A))\}_{1\alpha} \leq \{T_1^{p-4}(A)\}_{1\gamma_r} + a_{\gamma_r\alpha} = \\ &= \{T_1(T_1^{p-5}(A))\}_{1\gamma_r} + a_{\gamma_r\alpha} \leq \{T_1^{p-5}(A)\}_{1\gamma_{r-1}} + a_{\gamma_{r-1}\gamma_r} + \\ &+ a_{\gamma_r\alpha} \leq \dots \leq \{T_1^{p-r-3}(A)\}_{1\gamma_1} + \sum_{i=1}^{r-1} a_{\gamma_i\gamma_{i+1}} + a_{\gamma_r\alpha} \leq a_{1\gamma_1} + \\ &+ \sum_{i=1}^{r-1} a_{\gamma_i\gamma_{i+1}} + a_{\gamma_r\alpha}. \end{aligned}$$

Pour tout  $\alpha = 2, \dots, p$  et

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-2} \neq 1, \alpha; \gamma_1 \neq \gamma_2, \dots, \gamma_{p-3} \neq \gamma_{p-2}$$

et dans le cas  $\alpha = 2$  :

$$\begin{aligned} (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-2}) &\neq \\ &\neq (p, p-1, p-2, \dots, 4, 3), (p-1, p, p-2, p-3, \dots, 4, 3) \end{aligned}$$

et dans le cas  $\alpha = 3$  :  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-2}) \neq (2, p, p-1, \dots, 5, 4)$  il y a  $2 \leq j \leq p-2$  avec  $\gamma_j < \gamma_{j+1}$  ( $\gamma_{p-1} = \alpha$ ).

On en déduit que

$$\begin{aligned} & \{ T_1^{p-3}(A) \}_{1\alpha} \leq \{ T_1^{p-4}(A) \}_{1\gamma_{p-2}} \\ & + a_{\gamma_{p-2}\alpha} \leq \dots \leq \{ T_1^{j-1}(A) \}_{1\gamma_{j+1}} + \sum_{i=j+1}^{p-3} a_{\gamma_i\gamma_{i+1}} + a_{\gamma_{p-2}\alpha} \leq \\ & \leq \{ T_1^{j-1}(A) \}_{1\gamma_j} + \sum_{i=j}^{p-3} a_{\gamma_i\gamma_{i+1}} + a_{\gamma_{p-2}\alpha} \leq \dots \leq \{ T_1(A) \}_{1\gamma_2} + \\ & + \sum_{i=2}^{p-3} a_{\gamma_i\gamma_{i+1}} + a_{\gamma_{p-2}\alpha} \leq a_{1\gamma_1} + \sum_{i=1}^{p-3} a_{\gamma_i\gamma_{i+1}} + a_{\gamma_{p-2}\alpha}. \end{aligned}$$

Compte tenu des relations (1) on obtient  $\{ T_1^{p-3}(A) \}_{1\alpha} \leq \{ A^{p-1} \}_{1\alpha}$  pour tout  $\alpha = 4, \dots, p$  et

$$\min ( \{ T_1^{p-3}(A) \}_{12}, \quad \sum_{i=3}^p a_{ii-1} + a_{1p}, \quad \sum_{i=3}^{p-2} a_{ii-1} + \\ + a_{1p-1} + a_{p-1p} + a_{pp-2} ) \leq \{ A^{p-1} \}_{12} .$$

$$\min ( \{ T_1^{p-3}(A) \}_{13}, \quad \sum_{i=4}^p a_{ii-1} + a_{12} + a_{2p} ) \leq \{ A^{p-1} \}_{13} .$$

Mais  $\{ T_1^{p-3}(A) \}_{1\alpha} \geq \{ (T_1^{p-3}(A))^{p-1} \}_{1\alpha} = \{ A^{p-1} \}_{1\alpha}$  pour tout

$$\begin{aligned} \alpha = 2, \dots, p \quad \text{et} \quad \sum_{i=3}^p a_{ii-1} + a_{1p} \geq \{ A^{p-1} \}_{12}, \quad \sum_{i=3}^{p-2} a_{ii-1} + a_{1p-1} + \\ + a_{p-1p} + a_{pp-2} \geq \{ A^{p-1} \}_{12}, \quad \sum_{i=4}^p a_{ii-1} + a_{12} + a_{2p} \geq \{ A^{p-1} \}_{13} \end{aligned}$$

d'où il résulte les égalités cherchées.

Pour la détermination des chemins de longueur minimale on peut donner un algorithme très simple (dans le cas où le graphe n'a pas des circuits de longueur zéro et par conséquent, tous les chemins minimaux sont élémentaires) :

Si  $\hat{a}_{1\alpha} \neq \infty$ , alors il existe des chemins de  $x_1$  à  $x_\alpha$ . Si  $\hat{a}_{1\alpha} = a_{1\alpha}$  alors l'arc  $(x_1, x_\alpha)$  est un chemin de longueur minimale entre  $x_1$  et  $x_\alpha$ .

S'il existe un  $\gamma \neq 1, \alpha$  qui satisfait à l'équation :  $\hat{a}_{1\alpha} = \hat{a}_{1\gamma} + a_{\gamma\alpha}$  alors un chemin minimal entre  $x_1$  et  $x_\alpha$  est  $(\mu_{1\gamma}, x_\alpha)$  si  $\mu_{1\gamma} = (x_1, \dots, x_\gamma)$  est un chemin minimal entre  $x_1$  et  $x_\gamma$ .

En s'appuyant sur le procédé indiqué on trouve par récurrence tous les chemins élémentaires minimaux entre  $x_1$  et  $x_\alpha$ . L'algorithme présenté ci-dessus a été programmé sur le calculateur électronique numérique du Centre de Calcul de l'Université de Bucarest.

Exemple : Soit le réseau décrit par la matrice symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & \infty \\ 5 & 0 & 4 & 3 & 3 & 2 & 6 & \infty & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 6 & 3 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 1 & 0 & 7 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ \infty & 3 & 6 & 7 & 0 & 6 & 5 & 5 & \infty \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \infty & 6 & 4 & 3 & 5 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 7 & \infty & \infty & 1 & 5 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ \infty & 5 & \infty & 1 & \infty & 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Par l'application de l'opérateur  $T_1$  la première ligne de la matrice  $A$  se transforme comme il suit :

$$\begin{aligned} (0, 3, 2, \infty, \infty, 1, \infty, 7, \infty) ; & \quad (0, 3, 2, \infty, \infty, 1, \infty, 7, \infty) ; \\ (0, 3, 2, 3, \infty, 1, \infty, 7, \infty) ; & \quad (0, 3, 2, 3, 6, 1, \infty, 7, \infty) ; \\ (0, 3, 2, 3, 6, 1, \infty, 7, \infty) ; & \quad (0, 3, 2, 3, 6, 1, 2, 7, \infty) ; \\ (0, 3, 2, 3, 6, 1, 2, 3, \infty) ; & \quad (0, 3, 2, 3, 6, 1, 2, 3, 2). \end{aligned}$$

Parce qu'il y a  $T_1^2(A) = T_1(A)$  il résulte que

$$\{ T_1(A) \}_{1\alpha} = \{ A^8 \}_{1\alpha} = \hat{a}_{1\alpha}$$

pour tout  $\alpha = 2, 3, \dots, 9$ , donc

$$\begin{aligned} \hat{a}_{12} = 3 ; \hat{a}_{13} = 2 ; \hat{a}_{14} = 3 ; \hat{a}_{15} = 6 ; \hat{a}_{16} = 1 ; \hat{a}_{17} = 2 ; \hat{a}_{18} = 3 ; \\ \hat{a}_{19} = 2. \end{aligned}$$

Pour déterminer tous les chemins minimaux entre  $x_1$  et  $x_4$  par exemple, il faut trouver d'abord les solutions de l'équation :

$$\hat{a}_{14} = 3 = \hat{a}_{1\gamma} + a_{\gamma 4} \quad (\gamma \neq 1, 4)$$

ce qui nous donne  $\gamma_1 = 3$  ;  $\gamma_2 = 9$ .

L'équation  $\hat{a}_{13} = \hat{a}_{1\delta} + a_{\delta 3}$  n'a aucune solution  $\delta \neq 1, 3$  mais  $\hat{a}_{13} = a_{13}$  et nous avons donc obtenu un chemin minimal  $(x_1, x_3, x_4)$ .

Pour  $\gamma_2$  l'équation  $\hat{a}_{19} = \hat{a}_{1\delta} + a_{\delta 9}$  ( $\delta \neq 1, 9$ ) nous donne

$$\delta_1 = 6 \text{ et } \hat{a}_{16} = a_{16} ; \hat{a}_{16} < \hat{a}_{1\delta} + a_{\delta 6}$$

pour tout  $\delta \neq 1, 6$ .

Le second chemin minimal est donc  $(x_1, x_6, x_9, x_4)$ .

Facultatea de Matematică și Mecanică

Strada Academiei, 14

Bucuresti, 22

République Socialiste de Roumanie.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BELLMAN, On a routing problem, *Quart. Appl. Math.*, **16** (1958).
- [2] C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1963.
- [3] A. KAUFMANN, *Méthodes et modèles de la Recherche opérationnelle*, tome 2, Dunod, Paris, 1964.
- [4] Gr. C. MOISIL, *Asupra unor reprezentări ale grafulor ce intervin în probleme de economie transporturilor*, Comunicările Acad. R.P.R., nr. 8, X, 1960.
- [5] B. ROY, *Transitivité et connexité*, C.R. Acad. Sci. Paris, tome 249, 1959, p. 216-218.
- [6] I. TOMESCU, *Metodă pentru determinarea drumului de cea mai mică lungime dintre două noduri ale unui graf finit*, Analele Univ. București, nr. 2, 1966.
- [7] I. TOMESCU, *Sur les méthodes matricielles dans la théorie des réseaux*, C.R. Acad. Sci. Paris, tome 263, 1966, p. 826-829.
- [8] L. NOLIN, *Traitement des données groupées*, Publication de l'Institut Blaise-Pascal, Paris, mai 1964.