E. PICHAT

Décompositions simples des fonctions booléennes

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge, tome 2, nº 1 (1968), p. 61-70.

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1968__2_1_61_0>

R.I.R.O.
(2e année, N° 7, 1968, p. 61-70)

DECOMPOSITIONS SIMPLES DE FONCTIONS BOOLEENNES

par E. PICHAT [1]

Résumé. — *Cet article est consacré aux fonctions booléennes admettant une décomposition simple, c'est-à-dire de la forme* $g[h(Y, T), Z, T]$ *(T est un ensemble de variables qui peut être vide). La première partie traite des décompositions disjointes simples, plus particulièrement de leur dénombrement et des relations caractéristiques existant entre des fonction booléennes particulières (monotone, paire, impaire...) admettant une décomposition disjointe simple* $g[h(Y), Z]$ *et les fonctions* $g(h, Z)$ *et* $h(Y)$*. Dans la deuxième partie, il est indiqué comment trouver les décompositions (disjointes ou non disjointes) simples additives, multiplicatives et disjonctives, c'est-à-dire respectivement de la forme* $h(Y, T) + k(Z, T)$, $h(Y, T) \cdot k(Z, T)$ *et* $h(Y, T) \oplus k(Z, T)$*. Enfin la troisième partie est l'extension de la seconde au cas des décompositions simples quelconques, extension due à la linéarité d'une écriture galoisienne par rapport à ses variables.*

I. — ETUDE THEORIQUE DES DECOMPOSITIONS DISJOINTES SIMPLES

Définition. Une fonction booléenne simple complète $f(X)$ dépendant effectivement de ses $[X] = N$ variables est dite posséder une *décomposition disjointe simple* si elle peut être mise sous la forme d'une fonction composée $g[h(Y), Z]$, où les ensembles Y et Z de variables sont disjoints, où $h(Y)$ est une fonction simple et où $1 < [Y] = S < N$.

1. — Enumération

Sur 218 fonctions dépendant effectivement de 3 variables, il y en a 114 admettant une décomposition disjointe simple.

On démontre (voir [P2]) qu'un majorant du nombre des fonctions de N variables admettant une décomposition disjointe simple est :

$$4(N^2 - N - 2)2^{2^{N-1}}.$$

(1) Service de Mathématiques Appliquées, Faculté des Sciences de Grenoble.

2. — Décompositions disjointes simples de fonctions particulières

On démontre (voir [P2]) :

Théorème 1. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction décomposable $f(y, Y, z, Z) = g[h(y, Y), z, Z]$ soit :

a) croissante (respectivement décroissante) en y est : $h(y, Y)$ peut être choisie croissante (respectivement décroissante) en y et $g(h, z, Z)$ est croissante en h ;

b) croissante (respectivement décroissante) en z est : $g(h, z, Z)$ est croissante (respectivement décroissante) en z.

Exemple. $f(u, v, w, x, y) = uv'wx' + uv'wy + vw'x' + vw'y + xy$ est décomposable :

$$f(u, v, w, x, y) = g[h(u, v, w), x, y] = hx' + hy + xy$$

avec

$$h(u, v, w) = uv'w + vw'.$$

Nous constatons d'une part que $f(u, v, w, x, y)$ est croissante en u et en y, d'autre part que $h(u, v, w)$ est croissante en u et que $g(h, x, y)$ est croissante en h et en y.

Théorème 2. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction décomposable $f(Y, Z) = g[h(Y), Z]$ soit paire est :

$$h(Y) \text{ paire et } g(h, Z) = g(h, Z')$$
$$\text{ou } h(Y) \text{ impaire et } g(h, Z) \text{ paire.}$$

Exemple. La clé de parité à 4 variables : $u \oplus v \oplus w \oplus x$, qui est une fonction paire, admet la décomposition $h(u, v, w) \oplus x$, où

$$h(u, v, w) = u \oplus v \oplus w$$

est impaire et où $g(h, x) = h \oplus x$ est paire.

Théorème 3. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction décomposable $f(Y, Z) = g[h(Y), Z]$ soit sous-impaire $(f(Y', Z') \leqslant f'(Y, Z))$ est que $g(h, Z)$ soit sous-impaire à la fois lorsque h, si $h(Y)$ n'est pas paire, est une variable indépendante $(g(h', Z') \leqslant g'(h, Z))$, lorsque h, si $h(Y)$ n'est pas sur-impaire, est identique à $0(g(0, Z') \leqslant g'(0, Z))$ et lorsque h, si $h(Y)$ n'est pas sous-impaire, est identique à $1(g(1, Z') \leqslant g'(1, Z))$.

Exemple. La fonction sous-impaire $f(u, v, x, y) = uvx + uvy + xy$ admet la décomposition $uv(x + y) + xy$, où $g(h, x, y) = h(x + y) + xy$ est sous-impaire lorsque h est une variable indépendante et lorsque h est identique à 0 et où $h(u, v) = uv$ est sous-impaire.

Le théorème 3 admet un dual relatif aux fonctions sur-impaires décomposables.

Théorème 4. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction décomposable $f(Y, Z) = g[h(Y), Z]$ soit impaire est :

$$h(Y) \text{ paire et } g(h, Z) = g'(h, Z')$$
$$\text{ou } h(Y) \text{ et } g(h, Z) \text{ impaires.}$$

Exemples : les clés de parité à 3 et 5 variables $u \oplus v \oplus x$ et $u \oplus v \oplus w \oplus x \oplus y$ et les fonctions impaires à 4 variables :

$$f_1(u, v, x, y) = (u' \oplus v)\, x + (u \oplus v)y + xy$$
$$\text{et } f_2(u, v, w, x) = (u'v'w' + uvw) \oplus x.$$

II. — RECHERCHE DES DECOMPOSITIONS SIMPLES ADDITIVES, MULTIPLICATIVES OU DISJONCTIVES

Définition. Une fonction booléenne simple complète $f(X)$ dépendant effectivement de ses $[X]$ variables est dite admettre une *décomposition simple par rapport à un opérateur o suivant* (Y, Z, T) si elle peut être mise sous la forme $h(Y, T)\ o\ k(Z, T)$, où les ensembles Y, Z, T de variables sont disjoints, où Y et Z sont non vides et où $h(Y, T)$ et $k(Z, T)$ sont des fonctions simples. o désignera indifféremment $+$, $\cdot$ ou $\oplus$.

Quand T est vide, on dit que $f(X)$ admet une *décomposition disjointe simple par rapport à l'opérateur o suivant* (Y, Z). Un sous-ensemble Y de X sera dit *maximal* et noté Y_p s'il n'est contenu dans aucun sous-ensemble Y ; la décomposition correspondante $f_0(Y_p)\ o\ f_p(Z_p)$ sera dite *maximale*. La recherche de ces décompositions disjointes simples particulières est exposée dans [K].

Quand T n'est pas vide et quand il n'existe pas d'autre T qui en soit un sous-ensemble, il sera dit *minimal* et $h(Y, T)\ o\ k(Z, T)$ une *décomposition non disjointe simple par rapport à l'opérateur o maximale de* $f(X)$.

On démontre (voir [P2]) :

Théorème 1. Une fonction $f(Y, Z, T)$ admettant une décomposition simple additive, respectivement multiplicative et disjonctive,

$$h(Y, T) + k(Z, T),$$

respectivement $k(Y, T) \cdot k(Z, T)$ et $h(Y, T) \oplus k(Z, T)$, a au moins une base irredondante, respectivement une base irredondante en produit de sommes et une écriture galoisienne, dont les monômes sont de la forme m_{YT} ou m_{ZT}.

Corrolaire 1. Soit une fonction $f(Y, Z, T)$ ayant une seule base irredondante et admettant une décomposition simple additive :

$$f(Y, Z, T) = h(Y, T) + k(Z, T).$$

Alors un monôme premier de sa base irredondante est de la forme m_{YT} ou m_{ZT}.

Théorème 2. Une condition nécessaire pour qu'une fonction incomplète ait une fonction compatible de base complète irredondante et admettant une décomposition simple additive suivant la partition (Y, Z, T) est que la somme des monômes premiers de sa borne supérieure uniques diviseurs de monômes premiers de sa borne inférieure admette une décomposition simple additive suivant la partition (Y, Z, T).

Algorithme *pour trouver les décompositions simples additives, multiplicatives et disjonctives maximales.*

a) Décompositions simples additives maximales lorsque $f(X)$ a une base irredondante unique.

A cette base irredondante, faisons correspondre le tableau dont chaque ligne et chaque colonne sont caractérisées par une de ses variables et dont un élément n'est pas vide si et seulement si les variables de sa ligne et de sa colonne appartiennent à un même monôme premier. Alors le corrolaire 1 permet d'énoncer :

Corrolaire 2. Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(X)$ admette une décomposition simple additive suivant (Y, Z, T) est que le sous-tableau dont les lignes ont pour variables les éléments de Y et les colonnes les éléments de Z, (Y, Z), du tableau précédemment construit soit vide.

En particulier, l'obtention des partitions (Y, Z, T) de X des décompositions simples additives maximales est ramenée, grâce au corrolaire 2, à celle des sous-tableaux vides maximaux (c'est-à-dire non inclus dans d'autres sous-tableaux vides), ce qui est possible en un nombre fini d'itérations (voir [KA], p. 362).

EXEMPLE. Recherchons les décompositions simples additives maximales de :

$$f(u, v, w, x, y, z) = uvw + uyz + xyz.$$

Puisqu'une fonction croissante admet une base irredondante unique, nous pouvons appliquer l'algorithme précédent.

Le tableau construit à partir de $uvw + uyz + xyz$ est :

	u	v	w	x	y	z
u	1	1	1		1	1
v	1	1	1			
w	1	1	1			
x				1	1	1
y	1			1	1	1
z	1			1	1	1

et conduit aux sous-tableaux vides maximaux (uvw, x), (x, uvw), (vw, xyz) et (xyz, vw). $f(u, v, w, x, y, z)$ admet donc des décompositions simples additives maximales suivant (uvw, x, yz) et (vw, xyz, u) :

$$\boxed{\begin{aligned} f(u, v, w, x, y, z) &= [uvw + uyz] + [xyz] \\ f(u, v, w, x, y, z) &= [uvw] + [uyz + xyz]. \end{aligned}}$$

a') Décompositions simples additives maximales lorsque $f(X)$ n'a pas de base irredondante unique.

Puisqu'à toute décomposition simple additive de $f(X)$:

$$\varphi(Y, T) + \psi(Z, T),$$

correspond une base irredondante dont les monômes sont de la forme m_{YT} ou m_{ZT} (théorème 1), en appliquant l'algorithme précédent (*a*) à chacune des bases irredondantes de $f(X)$, on trouve toutes ses décompositions simples additives maximales.

Puisqu'un tableau est indépendant de la complémentation des variables, on peut appliquer successivement les règles suivantes :

1) supprimer les accentuations dans les bases irredondantes ;

2) dans chacune des bases ainsi obtenues, éliminer tout monôme diviseur d'un autre monôme ;

3) enfin, éliminer toute base pouvant être obtenue à partir d'une autre par adjonction de lettres à ses monômes ou par adjonction de monômes.

Exemple. Soit $f(x, y, z, t) = x'y + x'zt + xy' + xt' + y'zt + yt'$.

Ses bases irredondantes sont données par :

$$x'y \cdot xy'(x'zt \cdot xt' + x'zt \cdot yt' + xt' \cdot y'zt + y'zt \cdot yt').$$

Appliquons les règles précédentes :

1) $xy \cdot xy(xzt \cdot xt + xzt \cdot yt + xt \cdot yzt + yzt \cdot yt)$;

2) $xy(xzt + xzt \cdot yt + xt \cdot yzt + yzt)$;

3) $xy(xzt + yzt)$.

x et y jouant un rôle symétrique, ne considérons qu'une seule des deux bases obtenues : $xy + xzt$ et $xy + yzt$. Le tableau relatif à $xy + xzt$:

	x	y	z	t
x	1	1	1	1
y	1	1		
z	1		1	1
t	1		1	1

montre que $f(x, y, z, t)$ admet une décomposition simple additive suivant (y, zt, x) maximale :

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x, y, z, t) = h(x, y) + k(x, z, t) \\ \text{où} \begin{cases} h(x, y) = x'y + xy' \\ k(x, z, t) = x'zt + xt'. \end{cases} \end{array}}$$

Elle en admet donc une aussi suivant (x, zt, y).

b) Décompositions simples multiplicatives et disjonctives maximales.

On applique l'algorithme précédent (a ou a') à la fonction duale de la fonction à décomposer multiplicativement. Pour la recherche des décompositions simples disjonctives maximales, le procédé (a) est toujours valable puisque l'écriture galoisienne d'une fonction est unique.

III. — RECHERCHE DES DECOMPOSITIONS SIMPLES D'UNE FONCTION COMPLETE

1. — Cas général

Définition. Une fonction booléenne simple complète $f(X)$ dépendant effectivement de ses $[X]$ variables est dite posséder une *décomposition simple suivant* (Y, Z, T) si (Y, Z, T) est une partition de X, où $[Y] > 1$ et $[Z] \geqslant 1$, et si $f(X)$ peut être mise sous la forme d'une fonction composée $g[h(Y, T), Z, T]$, où $h(Y, T)$ est une fonction simple.

Théorème. Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(Y, Z, T)$ admette la décomposition simple $g[h(Y, T), Z, T]$ est que le coefficient de toute variable $y_i \in Y$ dans l'écriture galoisienne de $f(Y, Z, T)$ soit de la forme :

$$a(Z, T)h_i(Y_i, T) \qquad (1)$$

où $Y_i = \complement_Y y_i$ et où $a(Z, T)$ et $h_i(Y_i, T)$ sont des fonctions quelconques de variables appartenant respectivement à $\{ Z, T \}$ et $\{ Y_i, T \}$.

Démonstration.

La condition est nécessaire. En effet la forme galoisienne de

$$f(Y, Z, T) = g[h(Y, T), Z, T]$$

peut s'écrire :

$$g[h(Y, T), Z, T] = a(Z, T)h(Y, T) \oplus b(Z, T) \qquad (2)$$

où $a(Z, T)$ et $b(Z, T)$ sont des fonctions de variables $\in \{ Z, T \}$. Si y_i est un élément de Y et si $Y_i = \complement_Y y_i$, les monômes contenant y_i de l'écriture galoisienne de $h(Y, T)$ sont de la forme $h_i(Y_i, T)y_i$, donc les monômes de $f(Y, Z, T)$ contenant y_i sont d'après (2) de la forme $a(Z, T)h_i(Y_i, T)y_i$.

Réciproquement, supposons que le coefficient galoisien de tout $y_i \in Y$ dans $f(Y, Z, T)$ soit de la forme (1). Nous pouvons écrire :

$$f(Y, Z, T) = a(Z, T)h_1(Y_1, T)y_1 \oplus b_1(Y_1, Z, T).$$

Les monômes contenant y_2 sont : $a(Z, T)h_2(Y_2, T)y_2$. Soit ils contiennent y_1 et ils appartiennent à $a(Z, T)h_1(Y_1, T)y_1$, soit ils ne contiennent pas y_1, ils appartiennent à $b_1(Y_1, Z, T)$ et ils admettent en facteur $a(Z, T)y_2$... En continuant jusqu'à ce que tous les monômes contenant au moins un y_i aient été considérés, nous faisons apparaître la forme suivante de $f(Y, Z, T)$:

$$a(Z, T)h(Y, T) \oplus b(Z, T),$$

et $f(Y, Z, T)$ est bien décomposable.

Corrolaire. Si $f(Y, Z, T) = g[h(Y, T), Z, T]$, alors $\tilde{h}(Y, T)$ ($\tilde{h}$ désigne h ou son complément) est la somme disjonctive sans répétition des monômes des $h_i(Y_i, T)y_i$ et :

$$g[h(Y, T), Z, T] = a(Z, T)\tilde{h}(Y, T) \oplus b(Z, T),$$

où $b(Z, T)$ est la somme galoisienne des monômes de $f(Y, Z, T)$ contenant aucune des lettres Y.

Algorithme *pour trouver les partitions* (Y, Z, T) *des décompositions simples d'une fonction.* On le trouve dans [P2]. Ici nous le donnerons appliqué au cas de la recherche des décompositions disjointes simples d'une fonction.

2. — Cas particulier des décompositions disjointes simples

Définition. On démontre (voir [C]) que, si $\{ (Y_p, Z_p) ; 1 \leqslant p \leqslant P \leqslant N)$ est l'ensemble des partitions (Y_p, Z_p) des décompositions disjointes simples maximales (dont les Y, appelés Y_p, sont maximaux) non triviales $(1 < [Y_p] < N)$ ou triviales $([Y_p] = 1)$, alors

ou $\{ Y_p ; 1 \leqslant p \leqslant P \}$ est une partition de X et

$$f(X) = g[f_1(Y_1), f_2(Y_2), ..., f_P(Y_P)], \qquad (1)$$

ou $\{ Z_p ; 1 \leqslant p \leqslant P \}$ est une partition de X et

$$f(X) = f_1(Z_1) \text{ o } f_2(Z_2) \text{ o } ... \text{ o } f_P(Z_P). \qquad (2)$$

L'expression unique, à la complémentation près des fonctions $f_p(Y_p)$ ou $f_p(Z_p)$, de $f(X)$, qu'elle soit (1) ou (2), sera appelée *la décomposition disjointe simple* de $f(X)$ (elle est triviale si, quel que soit p, $[Y_p] = 1$).

Algorithme *pour trouver les décompositions disjointes simples d'une fonction.*

Étant donné $f(X)$, où $X = \{ x_1, x_2, ..., x_N \}$,

a) on détermine sa décomposition disjointe additive (voir [K]) $f_1(Z_1) + f_2(Z_2) + ... + f_P(Z_P)$, si elle existe, et on passe en f ; sinon :

b) on détermine sa décomposition disjointe multiplicative

$$f_1(Z_1) \cdot f_2(Z_2) \ldots f_P(Z_P),$$

si elle existe, et on passe en f ; sinon :

c) on calcule la décomposition disjointe additive

$$\Delta_{x_n} = a^*_{n,1}(C_1) + a^*_{n,2}(C_2) + \ldots + a^*_{n,J}(C_J)$$

(où $C_1, C_2, \ldots, C_J$ sont des sous-ensembles disjoints de X) des duaux Δ_{x_n} des coefficients galoisiens de chaque variable x_n, et on détermine la décomposition disjointe disjonctive $f_1(Z_1) \oplus f_2(Z_2) \oplus \ldots \oplus f_P(Z_P)$ de $f(X)$, si elle existe, et on passe en f ; sinon, pour toute variable x_n, on trouve la partition (Y_p, Z_p) telle que Y_p soit maximal et telle que $x_n \in Y_p$ de la façon suivante :

d) une décomposition disjointe additive de Δ_{x_n} s'écrivant

$$\Delta_{x_n} = a^*(Z) + h^*_i(Y_i) \tag{3}$$

où a^* (Z) est d'abord un terme $a^*_{n,j}(C_j)$ $(j = 1, \ldots, J)$, puis au besoin la somme de deux termes $a^*_{n,j}(C_j)$ et $a^*_{n,k}$ (C_k) $(1 \leqslant j < k \leqslant J)$, ..., enfin au besoin Δ_{x_n},

*d*1 si, pour toute lettre y_l de $h^*_i(Y_i)$, $\Delta_{y_l} = a^*(Z) + h^*_l(Y_l)$, (4)

*d*2 si, pour toute lettre y_l de $h^*_l(Y_l)$, (4) *est encore vérifié*, et ainsi de suite,

alors Y_p est l'ensemble de ces lettres y_l et de x_n ; sinon et si $a^*(Z) \neq \Delta_{x_n}$, on repasse en *d* en prenant dans (3) un nouvel $a^*(Z)$; sinon, $Y_p = x_n$.

e) Si, quel que soit p, $[Y_p] = 1$, $f(X)$ n'admet pas de décomposition non triviale ; sinon, $f(X)$ admet la décomposition disjointe simple (1), où les fonctions $g(f_1, f_2, \ldots, f_P)$, $f_1(Y_1)$, $f_2(Y_2)$, ..., $f_P(Y_P)$ sont déterminées, par exemple, par la méthode indiquée dans [P1].

f) On cherche la décomposition disjointe simple de

$$\tilde{f}_1(Y_1), \tilde{f}_2(Y_2), \ldots, \tilde{f}_P(Y_P).$$

Remarques

1. — Des formules possibles pour le calcul des duaux Δ_{x_n} des coefficients galoisiens de chaque variable x_n sont :

$$\Delta_{x_n} = f^*(0, X_n) f^*(1, X_n) + f(0, X'_n) f(1, X'_n)$$
$$\Delta_{x_n} = [f(0, X_n) + f(1, X_n)]^* + [f^*(0, X'_n) + f^*(1, X'_n)]^*$$

où $X_n = \complement_X x_n$ et où X' est l'ensemble obtenu à partir de X par complémentation de chacun de ses éléments.

2. — Des variantes pour cet algorithme sont possibles ; en particulier il n'est pas nécessaire de séparer la recherche des décompositions par rapport à un opérateur o de celle des autres décompositions.

3. — Cet algorithme a été programmé en ALGOL.

Exemple. Trouvons la décomposition disjointe simple de :

$$f(u, v, w, x, y, z) = u'v'wx'y'z' + u'v'wxyz' + u'vw'z' + u'vwx'y'z + u'vwxyz + uv'w'x'y'z' + uv'w'xyz' + uvw'x'y'z + uvwz' + vx'yz' + vxy'z' + uvw'xyz.$$

a) On vérifie que $f(u, v, w, x, y, z)$ n'admet pas de décomposition disjointe simple additive.

b) On vérifie que $f^*(u, v, w, x, y, z)$ n'admet pas de décomposition disjointe simple additive.

c) Les duaux des coefficients galoisiens de chaque variable sont respectivement :

$$\begin{aligned}
\Delta_u &= [vz'] + [x'y + xy'] \\
\Delta_v &= [u'w'z' + uwz' + x'yz' + xy'z'] \\
\Delta_w &= [vz'] + [x'y + xy'] \\
\Delta_x &= [u'w' + uw] + [vz'] \\
\Delta_y &= [u'w' + uw] + [vz'] \\
\Delta_z &= [u'vw' + uvw + vx'y + vxy'].
\end{aligned}$$

On constate que v. (lettres de $\Delta_v)^{\cdot} = uvwxyz$, donc que $f(u, v, w, x, y, z)$ n'admet pas de décomposition disjointe disjonctive.

d) Recherchons la partition (Y_p, Z_p) de $\{ u, v, w, x, y, z \}$ telle que Y_p soit maximal et telle que $u \in Y_p$:

$$\Delta_u = [vz'] + [x'y + xy'].$$

Posons $a^*(Z) = vz'$. On vérifie que vz' apparaît dans Δ_x, Δ_y, mais aussi dans Δ_w (condition d2). La partition cherchée est donc : $(uwxy, vz)$.

A partir de Δ_v et Δ_z, la partie (d) de l'algorithme permet de trouver les partitions $(v, uwxyz)$ et $(z, uvwxy)$, qui sont triviales.

e) Le tableau de décomposition construit à partir de la base complète de $f(u, v, w, x, y, z)$ et de $(uwxy, vz)$

	$u'wx'y'$	$u'wxy$	$u'w'$	$uw'x'y'$	$uw'xy$	uw	$x'y$	xy'
$v'z'$	1	1		1	1			
vz'			1			1	1	1
vz	1	1		1	1			

donne la décomposition disjointe simple de $f(u, v, w, x, y, z)$:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(u, v, w, x, y, z) = g[h(u, w, x, y), v, z], \\ \text{où} \begin{cases} g(h, v, z) = h'vz' + hv'z' + hvz \\ h(u, w, x, y) = u'wx'y' + u'wxy + uw'x'y' + uw'xy. \end{cases} \end{array}}$$

f) L'algorithme appliqué à $h(u, w, x, y)$ montre que

$$h(u, w, x, y) = (u \oplus w)\,(x \oplus y \oplus 1).$$

REFERENCES

[C] Curtis, H. Allen, *A new approach to the design of switching circuits*, van Nostrand, 1962.

[Ka] Kaufmann, A, *Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle*, tome II, Dunod, 1964.

[K] Kuntzmann, J, *Algèbre de Boole*, Dunod, 1965.

[P1] Pichat, E., *Décompositions simples disjointes de fonctions booléennes données par leurs composants premiers*, R.F.T.I. — Chiffres, vol. 8, nº 1, 1965, p. 63-66.

[P2] Pichat, E., *Décompositions des fonctions booléennes*, Thèse, Grenoble, 1966.