

IOAN TOMESCU

Sur l'algorithme matriciel de B. Roy

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge, tome 2, n^o 1 (1968), p. 87-91.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1968__2_1_87_0

© AFCET, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ALGORITHME MATRICIEL DE B. ROY

Ioan TOMESCU (1)

Résumé. — *Le but de cet article est celui de généraliser l'algorithme matriciel de B. Roy, proposé dans [1], [2] pour la détermination de la μ -fermeture d'un graphe fini au cas des matrices aux éléments dans un semi-groupe à ordre semi-réticulaire.*

Dans ce qui suit l'on considère un semi-groupe à ordre semi-réticulaire, c'est-à-dire un ensemble S muni de deux lois de composition \circ et \wedge qui satisfont aux axiomes :

1) $a \circ b = b \circ a$.

2) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

3) $a \circ e = a$.

4) $a \wedge b = b \wedge a$.

5) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.

6) $a \wedge a = a$.

7) $a \circ (b \wedge c) = (a \circ b) \wedge (a \circ c)$.

8) $a \wedge (a \circ b) = a$ quels que soient $a, b, c \in S$ et e étant l'élément neutre de semi-groupe.

Dans l'ensemble S , on introduit une relation d'ordre partiel : $a < b$ si $a \wedge b = a$, qui a les propriétés suivantes : $a \wedge b < a$; $a \wedge b < b$; si $z < a$ et $z < b$ alors $z < a \wedge b$; $a = a \wedge (a \circ b) < a \circ b$, en particulier

$$e < a \circ e = a.$$

Théorème 1. *Si $a < b$ et $c < d$ alors $a \wedge c < b \wedge d$ et $a \circ c < b \circ d$.*

Démonstration. On obtient $a \wedge b < a < c$ et $a \wedge b < b < d$, donc $a \wedge b < c \wedge d$.

(1) Université de Bucarest, str. Academiei, 14.

Si $a \prec c$ alors

$a \circ b = b \circ a = b \circ (a \wedge c) = (b \circ a) \wedge (b \circ c) = (a \circ b) \wedge (c \circ b) \prec c \circ b$
quel que soit $b \in S$.

En utilisant ce résultat on obtient dans les hypothèses du théorème que $a \circ b \prec c \circ b = b \circ c \prec d \circ c = c \circ d$. C.Q.F.D.

On définit la multiplication des matrices carrées

$$A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\dots,p} \quad \text{et} \quad B = \{b_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\dots,p}$$

avec $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta} \in S$ par la relation :

$$\{A \times B\}_{\alpha\beta} = \bigwedge_{\gamma=1,\dots,p} (a_{\alpha\gamma} \circ b_{\gamma\beta}) = (a_{\alpha 1} \circ b_{1\beta}) \wedge (a_{\alpha 2} \circ b_{2\beta}) \wedge \dots \wedge (a_{\alpha p} \circ b_{p\beta}).$$

Dans [3] on obtient que cette loi de composition est associative et, si $a_{\alpha\alpha} = e$ on a la relation $A^{p-1} = A^p = \dots$

On introduit une relation d'ordre partiel dans l'ensemble des matrices aux éléments de S de la façon suivante : $A \prec B$ si $a_{\alpha\beta} \prec b_{\alpha\beta}$ pour tout $\alpha, \beta = 1, \dots, p$.

Si $A \prec C$ et $B \prec D$ alors, conformément au théorème 1 :

$$a_{\alpha\gamma} \circ b_{\gamma\beta} \prec c_{\alpha\gamma} \circ d_{\gamma\beta} \quad \text{et} \quad \bigwedge_{\gamma=1,\dots,p} (a_{\alpha\gamma} \circ b_{\gamma\beta}) \prec \bigwedge_{\gamma=1,\dots,p} (c_{\alpha\gamma} \circ d_{\gamma\beta}),$$

donc $A \times B \prec C \times D$.

$$\{A^2\}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{\substack{\gamma=1,\dots,p \\ \gamma \neq \alpha,\beta}} (a_{\alpha\gamma} \circ a_{\gamma\beta}) \prec a_{\alpha\beta}$$

d'où on déduit :

$$A \succ A^2 \succ \dots \succ A^{p-1} = A^p = \dots$$

On introduit les opérateurs $T_{\mu\nu}^{(\rho)}$ où $\mu, \nu, \rho \in \{1, 2, \dots, p\}$ définis sur l'ensemble des matrices $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\dots,p}$ avec $a_{\alpha\beta} \in S$ et $a_{\alpha\alpha} = e$ de la manière suivante :

$$T_{\mu\nu}^{(\rho)}(A) = B \text{ si } b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \wedge (a_{\mu\rho} \circ a_{\rho\nu}) \text{ et } b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$$

pour tout $(\alpha, \beta) \neq (\mu, \nu)$.

On en déduit que $A \succ T_{\mu\nu}^{(\rho)}(A) \succ A^2$, donc

$$A^{p-1} \succ (T_{\mu\nu}^{(\rho)}(A))^{p-1} \succ (A^2)^{p-1} = A^{p-1}$$

et par conséquent $(T_{\mu\nu}^{(\rho)}(A))^{p-1} = A^{p-1}$.

On vérifie aisément que :

$$T_{\mu_1\nu_1}^{(\rho_1)}(T_{\mu_2\nu_2}^{(\rho_2)}(A)) = T_{\mu_2\nu_2}^{(\rho_2)}(T_{\mu_1\nu_1}^{(\rho_1)}(A))$$

et

$$T_{\mu\nu}^{(\rho)}(T_{\mu\nu}^{(\rho)}(A)) = T_{\mu\nu}^{(\rho)}(A).$$

On introduit les opérateurs $U_\rho = \prod_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu, \mu \neq \rho, \nu \neq \rho}}^p T_{\mu\nu}^{(\rho)}$ et l'opérateur

$$U = \prod_{\rho=1}^p U_\rho.$$

Dans l'expression de l'opérateur U l'ordre des opérateurs U_ρ n'importe pas en vertu de la propriété suivante : $U_{\rho_1} U_{\rho_2}(A) = U_{\rho_2} U_{\rho_1}(A)$.

En effet :

$$\begin{aligned} \{ U_{\rho_1} U_{\rho_2}(A) \}_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta} \wedge (a_{\alpha\rho_2} \circ a_{\rho_2\beta}) \\ &\wedge (a_{\alpha\rho_1} \wedge (a_{\alpha\rho_2} \circ a_{\rho_2\rho_1})) \circ (a_{\rho_1\beta} \wedge (a_{\rho_1\rho_2} \circ a_{\rho_2\beta})) \\ &= a_{\alpha\beta} \wedge (a_{\alpha\rho_1} \circ a_{\rho_1\beta}) \wedge (a_{\alpha\rho_2} \circ a_{\rho_2\beta}) \wedge (a_{\alpha\rho_1} \circ a_{\rho_1\rho_2} \circ a_{\rho_2\beta}) \\ &\wedge (a_{\alpha\rho_2} \circ a_{\rho_2\rho_1} \circ a_{\rho_1\beta}) = a_{\alpha\beta} \wedge (a_{\alpha\rho_1} \circ a_{\rho_1\beta}) \wedge (a_{\alpha\rho_2} \wedge (a_{\alpha\rho_1} \circ a_{\rho_1\rho_2})) \\ &\quad \circ (a_{\rho_2\beta} \wedge (a_{\rho_2\rho_1} \circ a_{\rho_1\beta})) = \{ U_{\rho_2} U_{\rho_1}(A) \}_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Compte tenu de la relation $(T_{\mu\nu}^{(\rho)}(A))^{p-1} = A^{p-1}$ on obtient par l'itération que $(U_\rho(A))^{p-1} = A^{p-1}$ et $(U(A))^{p-1} = A^{p-1}$.

Théorème 2. $U(A) = A^{p-1}$ quelle que soit la matrice $A = \{ a_{\alpha\beta} \}_{\alpha, \beta=1, \dots, p}$ avec $a_{\alpha\beta} \in S$ et $a_{\alpha\alpha} = e$.

Démonstration. En utilisant la commutativité et l'idempotence du produit des opérateurs U_ρ , induites par la commutativité et l'idempotence du produit des opérateurs $T_{\mu\nu}^{(\rho)}$, on obtient $U^2(A) = U(A)$ et par conséquent

$$U(A) = U^2(A) = \dots$$

On démontre par induction par rapport à s que :

$$\{ U_{k_s} U_{k_{s-1}} \dots U_{k_1}(A) \}_{\alpha\beta} < a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{\gamma \in \{k_1, k_2, \dots, k_s\} \setminus \{\alpha, \beta\}} (a_{\alpha\gamma} \circ a_{\gamma\beta})$$

et, par conséquent, $U(A) < A^2$ d'où on déduit $U^2(A) < A^4$; ...; $U^n(A) < A^{2^n}$ pour tout $n \in N$.

Si $r \in N$ et $r \geq \left\lceil \frac{\log(p-1)}{\log 2} \right\rceil + 1$ alors on a $U^r(A) < A^{2^r} < A^{p-1}$ mais $U^r(A) > (U^r(A))^{p-1} = (U(A))^{p-1} = A^{p-1}$ et donc $U^r(A) = A^{p-1}$, c'est-à-dire $U(A) = U^2(A) = \dots = U^r(A) = A^{p-1}$. C.Q.F.D.

Le problème du calcul de la matrice A^{p-1} est associé à quelques problèmes de la théorie des graphes et des réseaux électriques.

Soit S l'algèbre booléenne des fonctions booléennes définies sur $\{0, 1\}^n$ avec les valeurs dans $\{0, 1\}$; les opérations (\circ, \wedge) sont respectivement (\cdot, \cup) , la relation d'ordre partiel $<$ est la relation \geq définie par $f \geq g$ si

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq g(x_1, \dots, x_n)$$

et l'élément neutre est la fonction $e(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$.

Dans [4] on démontre que, si A est la matrice des conductibilités directes entre les nœuds d'un circuit électrique, alors la matrice A^{p-1} représente la matrice des conductibilités totales entre les nœuds de ce circuit.

Dans [5] on définit la fermeture transitive $\hat{G} = (X, \hat{\Gamma})$ d'un graphe fini $G = (X, \Gamma)$ où l'application $\hat{\Gamma}$ est définie par

$$\hat{\Gamma}x = \{x\} \cup \Gamma x \cup \Gamma x^2 \cup \dots \cup \Gamma x^{p-1}$$

pour tout $x \in X$. Dans [6] on démontre que la matrice d'incidence du graphe \hat{G} est A^{p-1} , où A est la matrice unitaire d'incidence associée au graphe G . S est l'algèbre booléenne $\{0, 1\}$ et $(\circ, \wedge, <, e)$ sont respectivement $(\cdot, \cup, \geq, 1)$.

Dans [7], [5], [8], [3] pour un réseau de transport on définit une application $l(u)$ et une application $c(u)$ sur l'ensemble U des arcs du réseau avec les valeurs dans l'ensemble $\{x \mid x \geq 0\}$.

On introduit la matrice $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1, \dots, p}$ où l'on a : $a_{\alpha\alpha} = 0$; $a_{\alpha\beta} = l(x_\alpha, x_\beta)$ s'il y a un arc qui va de x_α à x_β et $a_{\alpha\beta} = \infty$ en cas contraire.

En considérant le semi-groupe à ordre semi-réticulaire $\{x \mid x \geq 0\} \cup \{\infty\}$ avec $(\circ, \wedge, <, e)$ donnés par $(+, \min, \leq, 0)$, la matrice A^{p-1} représente la matrice des plus petites distances entre les sommets du réseau :

$$\{A^{p-1}\}_{\alpha\beta} = \min_{\mu=(x_\alpha, \dots, x_\beta)} \left\{ \sum_{u \in \mu} l(u) \right\}$$

On introduit la matrice $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1, \dots, p}$ avec $a_{\alpha\alpha} = \infty$; $a_{\alpha\beta} = c(x_\alpha, x_\beta)$ si $(x_\alpha, x_\beta) \in U$ et $a_{\alpha\beta} = 0$ si $(x_\alpha, x_\beta) \notin U$.

Le semi-groupe à ordre semi-réticulaire est l'ensemble $\{x \mid x \geq 0\} \cup \{\infty\}$ et $(\circ, \wedge, <, e)$ sont $(\min, \max, \geq, \infty)$. La matrice A^{p-1} représente la matrice des capacités maximales de transport :

$$\{A^{p-1}\}_{\alpha\beta} = \max_{\mu=(x_\alpha, \dots, x_\beta)} \{ \min_{u \in \mu} \{c(u)\} \}$$

On définit une application $p(u)$ sur l'ensemble U des arcs du réseau avec les valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$.

Si on définit la matrice A par les relations :

$$a_{\alpha\alpha} = 1; a_{\alpha\beta} = p(x_\alpha, x_\beta) \text{ si } (x_\alpha, x_\beta) \in U \text{ et } a_{\alpha\beta} = 0 \text{ si } (x_\alpha, x_\beta) \notin U,$$

alors A^{p-1} représente la matrice des probabilités maximales de la réussite du transport :

$$\{A^{p-1}\}_{\alpha\beta} = \max_{\mu=(x_\alpha, \dots, x_\beta)} \left\{ \prod_{u \in \mu} p(u) \right\}$$

si $S = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ et $(o, \wedge, <, e)$ sont donnés par $(\cdot, \max, \geq, 1)$.

D'autres méthodes matricielles de calcul de la matrice A^{p-1} sont exposées dans [9]. Il faut remarquer que L. Nolin, en utilisant une structure algébrique semblable, a proposé aussi ([10], p. 94) une généralisation de l'algorithme matriciel de B. Roy (nommé ici l'algorithme de Warshall).

OUVRAGES CITÉS

- [1] B. ROY, *Transitivité et connexité*, C. R. Ac. Sc. Paris, t. 249, p. 216-218, 1959.
- [2] B. ROY, Cheminement et connexité dans les graphes. Application aux problèmes d'ordonnement, *Metra*, série spéciale, n° 1, 1962.
- [3] Gr. C. MOISIL, Asupra unor reprezentări ale grafurilor ce intervin în probleme de economie transporturilor, *Comunicările Acad. R. P. R.*, t. X, n° 8, 1960, p. 647-652.
- [4] A. G. LUNTS, *Méthodes algébriques d'analyse et de synthèse des schémas à contacts*, *Izv. Acad. Nauk SSSR, Série math.*, 1952, p. 405-427 (en russe).
- [5] C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1963.
- [6] K. MAGHOUT, Applications de l'algèbre de Boole à la théorie des graphes et aux programmes linéaires et quadratiques, *Cahiers du Centre d'études de Rech. Opérationnelle*, vol. 5, n° 1-2, 1963, Bruxelles.
- [7] A. SHIMBEL, Structure in Communication Nets, *Proc. Symposium on Information Networks* (April 1954), Polytechn. Inst. Brooklyn, N. Y., 1955, p. 199-203.
- [8] G. N. POVAROV, Notions fondamentales de la théorie des réseaux cumulatifs, *Bul. Inst. Politechnic Iași*, t. VI (X), fasc. 1-2, 1960, p. 29-36 (en russe).
- [9] I. TOMESCU, Sur les méthodes matricielles dans la théorie des réseaux, C. R. Ac. Sc. Paris, t. 263, p. 826-829, 1966.
- [10] L. NOLIN, Traitement des données groupées, Publication de l'Institut Blaise-Pascal, Paris, mai 1964.

Le directeur de la Publication : Georges DUNOD. — *Imprimé en France.*

Dépôt légal : 2^e trimestre 1968. N° 5740.

IMPRIMERIE NOUVELLE, ORLÉANS. — N° 5708.