

JOSÉ RIBEIRO DOS SANTOS

ALAIN RIGAL

**Résolution numérique du problème de propagation  
de la chaleur à une dimension par la méthode  
itérative de sur-relaxation**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge, tome 2, n° 2 (1968), p. 53-64.*

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1968\\_\\_2\\_2\\_53\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1968__2_2_53_0)

© AFCET, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME DE PROPAGATION DE LA CHALEUR A UNE DIMENSION PAR LA METHODE ITERATIVE DE SUR-RELAXATION

par José RIBEIRO DOS SANTOS et Alain RIGAL (1)

Résumé. — *Le but de cet article est la résolution par des processus itératifs du problème de propagation ou de diffusion de la chaleur à une dimension dans un milieu homogène et isotrope. Les approximations au deuxième ordre de ce problème, peuvent s'exprimer en une formule dépendant d'un paramètre  $\theta$ . Pour une certaine valeur de  $\theta$ , on obtient une approximation du quatrième ordre en  $x$  et du deuxième ordre en  $t$ . On résout le problème par la méthode itérative de sur-relaxation en appliquant la propriété de réductibilité du système linéaire total. On donne aussi un exemple numérique.*

## 1. — INTRODUCTION

Soit le problème de propagation ou de diffusion de la chaleur dans un milieu homogène et isotrope à une dimension. Si  $x$  est la coordonnée le long d'une barre mince et isolée dans laquelle la chaleur peut se propager, ou la coordonnée perpendiculaire aux côtés d'une large plaque ayant les faces à une température uniforme et si  $U(x, t)$  représente la température au point d'abscisse  $x$ , à l'instant  $t$ , la fonction  $U(x, t)$  vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\partial}{\partial t} U(x, t) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, t) \quad 0 \leq x \leq l \quad (1)$$

où  $a^2$  est le coefficient de conductivité, avec la condition initiale

$$U(x, 0) = F(x) \quad F(x) \text{ continue sur } [0, l]$$

---

(1) Institut de Calcul Numérique de Toulouse.

et les conditions aux limites

$$U(0, t) = G_1(t) \quad U(l, t) = G_2(t)$$

avec

$$G_1(0) = F(0) \quad \text{et} \quad G_2(0) = F(l)$$

## 2. — EQUATIONS AUX DIFFERENCES FINIES

Soit un réseau de mailles rectangulaires représenté dans la figure 1, une approximation la plus générale du second ordre en  $x$  de l'équation (1) est

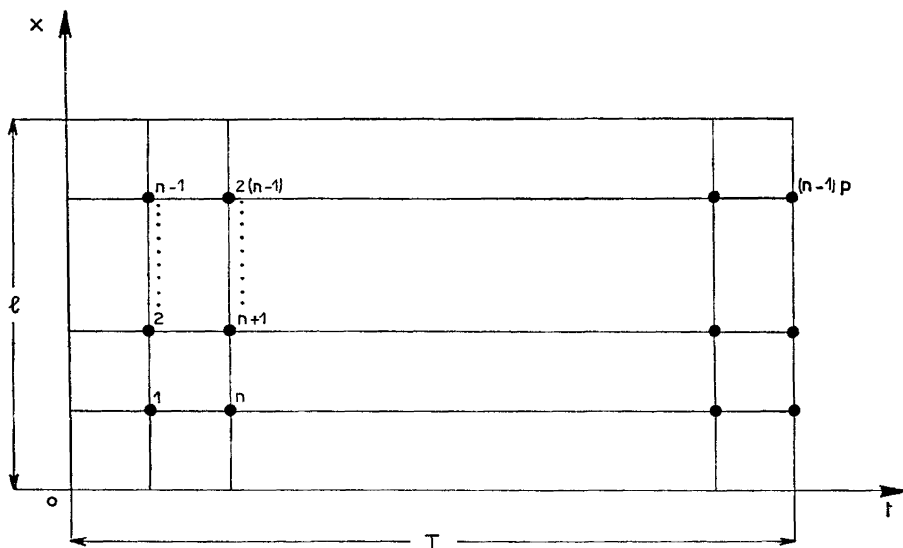


Figure 1.

donnée par une formule qui fait intervenir les six points montrés dans la figure 2 [2].

$$\begin{aligned} \frac{U(x, t) - U(x, t - \Delta t)}{\Delta t} &= \theta a^2 \frac{U(x + \Delta x, t) - 2U(x, t) + U(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \\ &+ (1 - \theta) a^2 \frac{U(x + \Delta x, t - \Delta t) - 2U(x, t - \Delta t) + U(x - \Delta x, t - \Delta t)}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (2)$$

où  $\theta$  est un nombre réel.

En numérotant les points comme l'indique la figure 2, l'expression (2) devient

$$(1 + 2\lambda\theta)U_0 = \lambda\theta[U_5 + U_1] + \lambda(1 - \theta)[U_4 + U_2] + [1 - 2\lambda(1 - \theta)]U_3 \tag{3}$$

avec

$$\lambda = \frac{\Delta t a^2}{\Delta x^2} \tag{4}$$

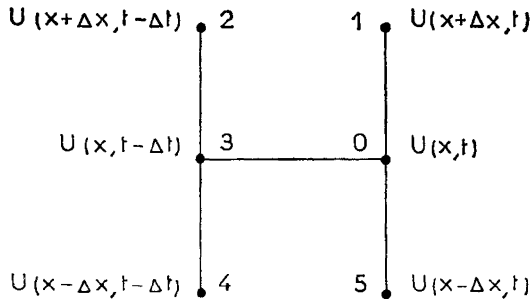


Figure 2.

On peut dresser un tableau des valeurs intéressantes du paramètre  $\theta$ .

$\theta$	ORDRE DE L'APPROXIMATION	OBSERVATIONS
0	$O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$	Formule explicite
1	$O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$	Formule implicite donnée par Laasonen
1/2	$O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$	Formule implicite donnée par Crank et Nicholson
$\frac{1}{2} - \frac{1}{12\lambda}$	$O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4)$	Formule implicite améliorée

Le réseau défini dans la figure 1 et l'expression (3) conduisent à un système linéaire

$$AU = K \tag{5}$$

où  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $(n - 1)p$ .

Si on groupe les points par lignes parallèles à l'axe des  $x$ , la matrice  $A$  du système (5) se présentera sous la forme

$$A = \begin{vmatrix} & & D & & \\ -C & & & D & \\ & & & & \\ & & & -C & \\ & & & & D \end{vmatrix} \quad (7)$$

où  $C$  et  $D$  sont des sous-matrices carrées tridiagonales  $(n-1) \times (n-1)$  de la forme

$$D = \begin{vmatrix} 1 + 2\lambda\theta & -\lambda\theta & & & \\ -\lambda\theta & 1 + 2\lambda\theta & -\lambda\theta & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & -\lambda\theta & 1 + 2\lambda\theta \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 - 2\lambda(1-\theta) & \lambda(1-\theta) & & & \\ \lambda(1-\theta) & 1 - 2\lambda(1-\theta) & \lambda(1-\theta) & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & \lambda(1-\theta) & 1 - 2\lambda(1-\theta) \end{vmatrix} \quad (9)$$

En groupant les vecteurs  $U$  et  $K$  de (5) de la manière considérée pour la matrice  $A$ , on arrive à un système de la forme

$$\begin{vmatrix} & & D & & \\ -C & & & D & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & -C & \\ & & & & D \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K'_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_p \end{vmatrix} \quad (10)$$

$K'_1 = CU_0 + K_1$ , où  $U_0$  est le vecteur de conditions initiales et  $K_i$  est un vecteur donné par les conditions aux limites ( $1 \leq i \leq p$ ).

A partir de (10) on peut écrire :

$$DU_1 = K'_1 \quad (11)$$

$$DU_i = K_i + C \cdot U_{i-1} \quad 2 \leq i \leq p$$

On voit à partir de (11) que le système (5) est réductible, c'est-à-dire que l'on peut calculer d'abord le groupe de points appartenant à la première ligne parallèle à l'axe des  $x$ , prendre les valeurs obtenues comme conditions initiales pour calculer la seconde ligne et recommencer l'opération jusqu'à la dernière ligne  $p$ .

### 3. — RESOLUTION DU PROBLEME PAR LA METHODE DE SUR-RELAXATION

Pour chaque groupe de points  $i$  on aboutit à partir de (11) à un système de la forme

$$DU_i = G_i \quad (12)$$

où

$$G_1 = K'_1$$

$$G_i = K_i + CU_{i-1} \quad 2 \leq i \leq p$$

La matrice d'itération de Jacobi  $B$  associée à la matrice  $D$  de (12) est donnée par

$$B = \frac{2\lambda\theta}{1+2\lambda\theta} \begin{vmatrix} 0 & & & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & & & \\ & 0 & 1/2 & & & & \\ & & & 1/2 & & & \\ & & & & 1/2 & & \\ & & & & & 1/2 & \\ & & & & & & 0 \end{vmatrix} \quad (13)$$

Les valeurs propres de la matrice  $B$  sont réelles et de la forme

$$\mu_k = \frac{2\lambda\theta}{1+2\lambda\theta} \cos \left[ \frac{k\pi}{n} \right] \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (14)$$

A partir de (14) on voit que le rayon spectral de la matrice  $B$  est égal

$$\rho(B) = \left| \frac{2\lambda\theta}{1+2\lambda\theta} \cos \frac{\pi}{n} \right| \quad (15)$$

Pour que la méthode de Jacobi soit convergente, il faut que le rayon spectral soit plus petit que 1. D'après l'expression de  $\rho(B)$  on arrive à

$$\left| \frac{2\lambda\theta}{1+2\lambda\theta} \cos \frac{\pi}{n} \right| < \left| \frac{2\lambda\theta}{1+2\lambda\theta} \right| < 1 \quad (16)$$

Comme  $\lambda = \frac{a^2 \Delta t}{\Delta x^2}$  est toujours positif, l'inégalité (16) sera vérifiée pour

$$\theta > -\frac{1}{4\lambda}$$

Pour la formule implicite améliorée dans où  $\theta$  est égal à

$$\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{12\lambda}$$

On peut vérifier aisément que la méthode de Jacobi est convergente pour toutes les valeurs de  $\lambda$ , c'est-à-dire quels que soient  $\Delta x$  et  $\Delta t$  choisis. On peut voir aussi que pour les autres valeurs de  $\theta$  données dans le tableau 1 cette méthode est toujours convergente.

Si on décompose la matrice  $D$  donnée par (8) sous la forme

$$D = D_1 - E - F$$

où  $E$  et  $F$  sont respectivement des matrices triangulaire inférieure et triangulaire supérieure et  $D_1$  diagonale. La matrice de sur-relaxation associée à la matrice  $D$  sera définie par

$$L_w = (I - WL)^{-1} \{ (1 - W)I + WU \} \quad (17)$$

avec

$$L = D_1^{-1}E \quad \text{et} \quad U = D_1^{-1}F$$

Comme la matrice de Jacobi donnée par (13) est cyclique de degré 2 et d'ordre consistant, on démontre que les valeurs propres  $\lambda$  de la matrice  $L_w$  satisfont la relation

$$(\lambda + W - 1)^2 = \lambda W^2 \mu^2$$

où  $\mu$  est une valeur propre de la matrice de Jacobi.

Les valeurs propres  $\mu$  de  $B$  étant toutes réelles, le paramètre d'accélération  $W_{\text{opt}}$  qui minimise le rayon spectral de la matrice  $L_w$  donnée par (17) est unique et donné par

$$W_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B)}} \quad (18)$$

#### 4. — CONCLUSION

Comme la formule implicite améliorée, qui fournit une approximation pour l'équation (1) de la forme

$$\varepsilon_I = 0(\Delta t^2) + 0(\Delta x^4),$$

conduit à un processus itératif convergent quelle que soit la maille choisie, il sera toujours préférable d'utiliser cette approximation pour l'équation de la propagation de la chaleur à une dimension.

Dans la partie suivante on abordera un exemple et on fera une comparaison des résultats obtenus.

## 5. — APPLICATION NUMERIQUE

Soit l'équation de la chaleur donnée par (1) avec la condition initiale  $U(x, 0)$  donnée par

$$U(x, 0) = F(x) = \frac{10^3(l-x)x}{l^2}, \quad (19)$$

$$l = 1 \text{ mètre,}$$

les conditions aux limites

$$U(0, t) = U(l, t) = 0,$$

avec le coefficient de conductivité thermique  $a^2$  égal à  $10^{-1}$  et  $T$  égal à une heure.

Pour ce problème, il existe une solution analytique donnée par un développement en série de la forme

$$U(x, t) = \frac{8 \times 10^3}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}}}{(2n+1)^3} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \quad (20)$$

qui permet de calculer les valeurs analytiques de la fonction  $U(x, t)$  aux nœuds d'un réseau quelconque et d'avoir une base de comparaison avec les diverses solutions numériques.

La symétrie des conditions aux limites et de la condition initiale du problème par rapport au point  $x = \frac{l}{2}$  quel que soit  $t$  a permis de se limiter à l'étude de l'intervalle  $0 \leq x \leq l/2$ . Les résultats présentés dans les tableaux suivants ont été effectués en double précision avec un test d'arrêt relatif de  $10^{-14}$  par un ordinateur IBM-7044 de l'Institut de Calcul Numérique de l'Université de Toulouse.

Pour les méthodes de Laasonen ( $\theta = 1$ ) et Crank et Nicholson ( $\theta = \frac{1}{2}$ ) on voit grâce à l'expression du rayon spectral de la matrice  $B$  et de  $\lambda$  données respectivement par (15) et (4) que, si on considère la maille par rapport à  $x$  constante et si on diminue la maille par rapport au temps  $t$ ,  $\rho(B)$  tend vers 0, ce qui explique la convergence plus rapide par ligne dans ce cas. Le contraire va se passer si on fixe la maille par rapport à  $t$  et si on la diminue par rapport à  $x$ .

Pour la méthode implicite améliorée ( $\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{12\lambda}$ ) si on fait décroître  $\lambda$ , le rayon spectral de la matrice  $B$  va passer par un minimum nul pour  $\lambda = \frac{1}{6}$ , et augmenter pour  $\lambda < \frac{1}{6}$ , ce qui explique l'augmentation du nombre d'itérations dans la dernière ligne du tableau VI.



On remarque également sur le tableau V et sur la formule donnant  $\theta$  optimal que lorsque  $\lambda$  croît,  $\theta$  tend vers  $\frac{1}{2}$ , la méthode implicite améliorée tend donc vers celle de Crank et Nicholson, ce qui est normal car  $\Delta t$  devenant prépondérant par rapport à  $(\Delta x)^2$  l'erreur en  $(\Delta t)^2$  est prépondérante dans  $\varepsilon_I = 0(\Delta t)^2 + 0(\Delta x)^4$  qui est donc voisine de  $\varepsilon_{CN} = 0(\Delta t)^2 + 0(\Delta x)^2$ . L'approximation de la méthode implicite améliorée tend vers celle de Crank et Nicholson quand  $\lambda$  croît.

TABLEAU I. —  $\theta = 1$  Méthode de Laasonen

N	P	ITÉRATIONS PAR LIGNE	TEMPS TOTAL		$\rho(B)$	W OPTIMAL
			Secondes	Tierces		
20	10	18	1	7	0,73313	1,1904
20	40	13	3	23	0,41345	1,0468
20	60	12	4	51	0,32033	1,0270
20	80	10	6	4	0,26145	1,0177
20	120	9	8	32	0,19117	1,0093

TABLEAU II

N	P	ITÉRATIONS PAR LIGNE	TEMPS TOTAL		$\rho(B)$	W OPTIMAL
			Secondes	Tierces		
10	20	8	0	53	0,25175	1,0164
20	20	15	1	55	0,58290	1,1034
40	20	28	5	22	0,84944	1,3092
80	20	53	17	51	0,95766	1,5529
100	20	66	26	10	0,97249	1,6221

TABLEAU III. — *Méthode implicite de Crank et Nicholson* :  $\theta = \frac{1}{2}$ 

N	P	ITÉRATIONS PAR LIGNE	TEMPS TOTAL		$\rho(B)$	W OPTIMAL
			Secondes	Tierces		
10	20	9	1	3	0,14508	1,0053
20	20	16	2	22	0,41345	1,0468
40	20	29	6	52	0,73998	1,1957
80	20	56	23	38	0,91942	1,4354
100	20	69	35	29	0,94690	1,5134

TABLEAU IV

N	P	ITÉRATIONS PAR LIGNE	TEMPS TOTAL		$\rho(B)$	W OPTIMAL
			Secondes	Tierces		
20	10	20	1	26	0,58290	1,1034
20	20	16	2	22	0,41345	1,0468
20	40	13	4	5	0,26145	1,0177
20	60	12	5	48	0,19117	1,0093
20	80	11	7	17	0,15066	1,0057
20	120	11	10	46	0,10582	1,0028

TABLEAU V. — *Méthode implicite améliorée.*

$$\theta = \theta \text{ optimal} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12\lambda}.$$

N	P	$\theta$ OPTIMAL	ITÉRATIONS PAR LIGNE	TEMPS TOTAL		$\rho(B)$	W OPTIMAL
				Secondes	Tierces		
10	20	0,03704	6	0	53	0,01251	1,0000
20	20	0,38426	15	2	16	0,35184	1,0330
40	20	0,47106	29	6	47	0,72845	1,1868
80	20	0,49277	56	23	37	0,91834	1,4328
100	20	0,49537	69	36	6	0,94644	1,5118

TABLEAU VI

N	P	$\theta$ OPTIMAL	ITÉRATIONS PAR LIGNE	TEMPS TOTAL		$\rho(B)$	W OPTIMAL
				Secondes	Tierces		
20	10	0,44213	19	1	23	0,55322	1,0910
20	20	0,38426	15	2	16	0,35124	1,0330
20	40	0,26852	12	3	50	0,16002	1,0064
20	60	0,15278	10	5	8	0,06748	1,0011
20	80	0,03704	7	5	45	0,01299	1,0000
20	120	-0,19444	9	9	39	0,04835	1,0005

Le tableau suivant permettra de constater la convergence des 3 méthodes itératives employées, en prenant pour chacune la valeur obtenue au point central  $\left(x = \frac{l}{2}, t = 1 \text{ heure}\right)$ .

La valeur analytique donnée par (20) est, en ce point, avec 10 chiffres exacts

$$U(l/2, T) = 180,46593455$$

TABLEAU VII

N	P	LAASONEN		CRANK ET NICHOLSON		IMPLICITE AMÉLIORÉE	
		Valeur	Erreur	Valeur	Erreur	Valeur	Erreur
20	10	181,483988	1,018054	180,577943	0,112008	180,469216	0,003282
40	40	180,726639	0,260704	180,493398	0,027464	180,466137	0,000203
80	160	180,531549	0,065615	180,472768	0,006833	180,465947	0,000013
Loi d'erreur		$\varepsilon_L = 0(\Delta t) + 0(\Delta x)^2$		$\varepsilon_{CN} = 0(\Delta t)^2 + 0(\Delta x)^2$		$\varepsilon_I = 0(\Delta t)^2 + 0(\Delta x)^4$	

La convergence s'effectue bien suivant l'ordre d'approximation, en remarquant cependant que, pour la méthode de Crank et Nicholson, on a  $\Delta t^2 = \frac{\lambda^2 \cdot \Delta x^4}{a} \leq \Delta x^2$  pour  $\lambda$  petit, ce qui est le cas ici ( $\lambda = 1,44$ ); ceci explique que dans la convergence, seul le terme en  $\Delta x^2$  influe. La supériorité de la méthode implicite améliorée au point de vue de la précision, apparaît clairement. Connaissant les lois d'Erreur, une extrapolation à trois points permettrait d'améliorer les résultats.

Il faut cependant signaler que la méthode explicite classique pour  $\theta = 0$ , réduit le calcul de la solution à une suite de produits matriciels, et est donc, nettement plus rapide, mais son usage est limité car elle n'est stable que pour  $\lambda \leq \frac{1}{2}$  [5].

On remarque aussi que  $\theta_{\text{optimal}} = 0$  pour  $\lambda = \frac{1}{6}$ , on aura donc une approximation du 4<sup>e</sup> ordre en  $x$  et du second ordre en  $t$ , par une méthode explicite pour  $\lambda = \frac{1}{6}$ . Bien qu'on soit très limité, au point de vue valeur de mailles par  $\lambda$  fixé, cela peut quand même être très intéressant dans les problèmes de ce genre où le domaine d'intégration a une limite,  $t = T$ , qui peut être choisie librement.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. K. SAULYEV, *Integration of equation of parabolic type by the method of nets* (Pergamon Press).
- [2] R. D. RICHTMYER, *Difference methods for initial values problems* (Interscience Publishers Inc.).
- [3] E. DURAND, *Solutions Numériques des équations algébriques*, T. II (Masson).
- [4] R. VARGA, *Matrix Iterative Analysis* (Prentice Hall).
- [5] G. E. FORSYTHE et W. R. WASOW, *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations* (John Wiley & Sons).
- [6] J. RIBEIRO DOS SANTOS et A. RIGAL, *Solution numérique de l'Équation de la chaleur à une dimension, par la méthode de sur-relaxation*, compte rendu à l'Académie des Sciences, Série A : Mathématiques appliquées, 3 janvier 1968.