

CHARLES CASTAING

MICHEL VALADIER

**Équations différentielles multivoques dans les  
espaces vectoriels localement convexes**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge*, tome 3, n<sup>o</sup> 1 (1969), p. 3-16.

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1969\\_\\_3\\_1\\_3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1969__3_1_3_0)

© AFCET, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES MULTIVOQUES DANS LES ESPACES VECTORIELS LOCALEMENT CONVEXES

par Charles CASTAING <sup>(1)</sup> et Michel VALADIER <sup>(2)</sup>

---

Résumé. — *Le but de cet article est d'étendre en dimension infinie le théorème (Plis Lasota-Opial, Castaing) d'existence, et de dépendance des conditions initiales, des solutions d'une équation différentielle multivoque, où le second membre est convexe compact, séparément mesurable par rapport au temps et semi-continu supérieurement par rapport à l'état. Divers résultats d'intégration vectorielle et de théorie des multi-applications ont leur intérêt propre.*

Le but final de ce papier est d'étendre en dimension infinie le théorème d'existence et de dépendance des conditions initiales de la solution d'une équation différentielle multivoque  $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ , où le second membre est convexe compact séparément mesurable par rapport au temps et semi-continu supérieurement par rapport à l'état (Cf. [4] [14] [15]). En route nous montrerons des résultats qui peuvent avoir leur intérêt propre. Ce travail a fait l'objet d'une note aux Comptes Rendus [7 bis].

### 1. Intégration vectorielle

Soit  $E$  un espace vectoriel topologique localement convexe réel séparé. Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré avec  $\mu$  positive  $\sigma$ -finie.

**Théorème 1.** — *Si  $f : \Omega \rightarrow E$  est scalairement intégrable, si  $\Omega$  se partitionne en un négligeable et une suite de mesurables  $\Omega_n$  tels que  $f(\Omega_n)$  soit contenu dans un compact convexe équilibré  $Q_n$ , et si  $E$  est séquentiellement faiblement complet, alors  $\int f \mu$  appartient à  $E$ .*

---

(1) Faculté des Sciences, Montpellier, Hérault.

(2) I.R.I.A. Département d'Automatique et d'Informatique Économique, Rocquencourt, Yvelines.

*Démonstration.* — La mesure étant  $\sigma$ -finie on peut se ramener au cas où les  $\Omega_n$  sont de mesure finie. On a  $\int_{\Omega_n} f \mu \in E$  pour tout  $n$ . En effet, soit  $x'$  un élément du polaire  $Q_n^0$  de  $Q_n$ . On a

$$\langle x' , \int_{\Omega_n} f \mu \rangle = \int_{\Omega_n} \langle x' , f \rangle \mu \leq \mu(\Omega_n)$$

D'où  $\int_{\Omega_n} f \mu \in \mu(\Omega_n) Q_n$ . Pour tout  $x' \in E'$  on a :

$$\left| \langle x' , \sum_{n=0}^m f \chi_{\Omega_n} \rangle \right| \leq \left| \langle x' , f \rangle \right|$$

et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle x' , \sum_{n=0}^m f \chi_{\Omega_n} \rangle = \langle x' , f \rangle \quad \text{p.p.}$$

où  $\chi_{\Omega_n}$  désigne la fonction caractéristique de  $\Omega_n$ .

D'après le théorème de Lebesgue, on a :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int \langle x' , \sum_{n=0}^m f \chi_{\Omega_n} \rangle \mu = \int \langle x' , f \rangle \mu$$

Cela entraîne que  $\int f \mu$  appartient à  $E$  puisqu'il est limite faible des  $\int \sum_{n=0}^m f \chi_{\Omega_n} \mu$  qui appartiennent à  $E$ .

Voici quelques cas où ce théorème s'applique :

1)  $f$  prend ses valeurs dans la réunion d'une suite croissante  $(A_n)$  de compacts convexes équilibrés, et il existe  $(e'_n)$  dans  $E'$  séparant les points de ces compacts, et  $E$  est séquentiellement faiblement complet.

En effet, considérons l'espace  $G$  engendré par la suite  $(A_n)$ . Il existe un ensemble  $\mathcal{F}$  dénombrable, dense dans  $G'$  pour la topologie de Mackey. En effet soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des  $e'_n|_{\sigma}$ . La fermeture  $\bar{\mathcal{F}}$  pour la topologie de Mackey contient l'espace vectoriel engendré par les  $e'_n|_{\sigma}$ . Comme cet espace est faiblement dense dans  $G'$ , il est également dense pour la topologie de Mackey. On a bien  $\bar{\mathcal{F}} = G'$  (voir également [6], théorème 5).

Par suite on a :

$$A_n = \{ x \in G \mid \langle x' , x \rangle \leq \sup_{a \in A_n} \langle x' , a \rangle , \forall x' \in \mathcal{F} \}$$

Il en résulte que  $f^{-1}(A_n)$  est mesurable.

Les conditions ci-dessus sont réalisées si  $E$  est le dual faible d'un espace localement convexe métrisable séparable tonnelé (Cf. [1] proposition 7, p. 109).

2) Si  $E$  est un Frechet séparable séquentiellement faiblement complet.

Il suffit d'établir le résultat pour  $\mu$  abstraite bornée. On applique facilement le théorème 1 si  $\mu$  est de Radon. Or on a le lemme suivant qui permet de passer de  $\mu$  abstraite bornée à  $\mu$  de Radon :

**Lemme :**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et  $(\Omega', \mathcal{A}', P')$  deux espaces de probabilité dont les algèbres métriques quotients (1)  $\mathcal{A}(P)$  et  $\mathcal{A}'(P')$  sont isomorphes. Soit  $X$  un espace polonais et  $f : \Omega \rightarrow X$  mesurable. Il existe  $f' : \Omega' \rightarrow X$ , mesurable, unique modulo l'égalité sur un négligeable, telle que pour tout borélien  $B$  de  $X$  les classes dans les algèbres quotients de  $f^{-1}(B)$  et  $f'^{-1}(B)$  se correspondent (2).

*Démonstration.* — Soit  $d$  une distance d'espace complet sur  $X$  compatible avec sa topologie. Montrons d'abord l'unicité. Soit  $f'$  et  $f''$  deux applications mesurables vérifiant la propriété énoncée. Soit  $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une partition de  $X$  en ensembles boréliens de diamètre  $< \epsilon$ . Alors  $f'^{-1}(B_n)$  et  $f''^{-1}(B_n)$  sont équivalents à  $f^{-1}(B_n)$  dans l'isomorphisme des algèbres quotients. Il en résulte que

$$P'(d(f', f'') > \epsilon) = 0 \quad \text{quel que soit} \quad \epsilon > 0,$$

d'où  $f' = f''$  p.p.. Montrons l'existence. L'existence est triviale pour les fonctions dénombrablement étagées. Soit  $f : \Omega \rightarrow X$  une application mesurable. Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions dénombrablement étagées convergeant simplement vers  $f$ . Alors  $(f_n)$  est une suite de Cauchy pour la convergence en probabilité, et il en est de même pour les  $f'_n$  correspondant aux  $f_n$ . Soit  $f'$  la limite de  $(f'_n)$  ([2], proposition 19, p. 197). Il existe une suite  $(f'_{n_k})$  qui converge presque sûrement vers  $f'$ . L'ensemble des parties  $B$  de  $X$  telles que  $f^{-1}(B)$  et  $f'^{-1}(B)$  se correspondent dans l'isomorphisme est une  $\sigma$ -algèbre. De plus cet ensemble contient les fermés. En effet, soit  $F$  un fermé et soit :

$$B_m = \left\{ x \in X \mid d(x, F) < \frac{1}{m} \right\}$$

En vertu de ([17], tome 1, p. 469-470) on a

$$f'^{-1}(F) = \bigcap_m \bigcup_k \bigcap_{p \geq k} f'_{n_p}{}^{-1}(B_m),$$

et on a la même formule avec  $f$  et  $f_{n_p}$ .

(1) Voir ([10], lemme 1, p. 158).

(2) Si  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  est donné on peut toujours trouver  $\Omega'$  compact et  $P'$  de Radon en prenant le spectre de  $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Il en résulte que si  $X = E$  et si  $f$  est scalairement intégrable (donc mesurable)  $f'$  est scalairement intégrable et  $\int fP = \int f'P'$  car on a :

$$\int \langle x' , f(\omega) \rangle P(d\omega) = \int \langle x' , f'(\omega') \rangle P'(d\omega') , \quad \forall x' \in E'.$$

3) Si  $\Omega$  est localement compact, si  $f$  est  $\mu$ -mesurable, si l'enveloppe convexe fermée de toute partie compacte de  $E$  est complète et si  $E$  est séquentiellement faiblement complet.

Les hypothèses sur  $E$  sont vérifiées si  $E$  est un Fréchet réflexif ou un espace  $L^1$ .

Soit  $\Gamma$  une multi-application définie sur  $\Omega$  à valeurs dans les convexes compacts non vides de  $E$ . On désigne par  $\mathcal{M}_\Gamma$  l'ensemble des sections scalairement mesurables de  $\Gamma$ . On pose pour toute partie  $K$  de  $E$  et tout  $x' \in E'$ ,  $\varphi(x', K) = \sup \{ \langle x' , k \rangle \mid k \in K \}$ .

**Théorème 2.** — a) Si les  $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$  sont intégrables, on pose

$$A = \left\{ \xi \in E'^* \mid \langle x' , \xi \rangle \leq \int \varphi(x', \Gamma(\cdot)) \mu, \forall x' \in E' \right\}.$$

Alors  $A$  est convexe non vide,  $\sigma(E'^*, E')$  compact; toute  $f \in \mathcal{M}_\Gamma$  est scalairement intégrable et  $\int f \mu \in A$ .

b) S'il existe  $(e'_n)$  dans  $E'$  séparant les points de  $A \cap E$  et de  $\Gamma(\omega)$ ,  $\forall \omega$ , et si  $\int f \mu \in E$ ,  $\forall f \in \mathcal{M}_\Gamma$ , alors

$$A \cap E = \left\{ \int f \mu \mid f \in \mathcal{M}_\Gamma \right\} \quad \text{et} \quad \max_{x \in A \cap E} \langle x' , x \rangle = \int \varphi(x' , \Gamma(\cdot)) \mu.$$

c) Si de plus  $E$  est semi-réflexif  $A$  est contenu dans  $E$ .

Ce théorème améliore légèrement le théorème 1 de [18]. La démonstration est la même.

Lorsque  $A$  est contenu dans  $E$  on notera  $A = \int \Gamma \mu$ . Sous les hypothèses du b), si  $\left\{ \int f \mu \mid f \in \mathcal{M}_\Gamma \right\}$  est faiblement relativement compact,  $A$  est contenu dans  $E$ . Si de plus pour un  $Z \in \mathcal{A}$  il existe  $f_0 \in \mathcal{M}_\Gamma$  telle que  $\int_Z f_0 \mu \in E$ ,

l'ensemble  $A_Z$  obtenu par restriction à  $Z$  est contenu dans  $E$  car

$$\left\{ \int_Z f \mu \right\} \subset A - \int_{\Omega-Z} f_0 \mu \quad (1).$$

## 2. Compacité de l'ensemble des sections

Lorsqu'il existe ( $e'_n$ ) séparant les points de  $\Gamma(\omega)$ ,  $\forall \omega$ , l'égalité scalairement presque partout équivalent à l'égalité presque partout pour les éléments de  $\mathcal{M}_\Gamma$ . On désignera par  $M_\Gamma$  le quotient de  $\mathcal{M}_\Gamma$  par cette relation d'équivalence.

**Théorème 3.** — *Si les  $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$  sont intégrables.*

1) *Si  $\forall Z \in \mathcal{A}$ ,  $A_Z$  est contenu dans  $E$  et s'il existe ( $e'_n$ ) dans  $E'$  séparant les points de  $\Gamma(\omega)$ ,  $\forall \omega$ , et de  $A_Z$ ,  $\forall Z$ , alors  $M_\Gamma$  est compact pour la topologie de la convergence simple sur  $\mathcal{E}_{E'}$ , (fonctions étagées mesurables prenant un nombre fini de valeurs).*

2) *Si  $\Gamma(\omega) \subset g(\omega)K$ ,  $\forall \omega$ , où  $g \in \mathcal{L}_+^1$  et  $K$  est convexe équilibré faiblement complet, et s'il existe ( $e'_n$ ) séparant les points de  $K$ ,  $M_\Gamma$  est compact pour la topologie de la convergence simple sur  $L_{\mathbf{R}}^\infty \otimes E'$ .*

REMARQUES. — 1) On peut mettre ces topologies sur l'espace vectoriel des applications scalairement intégrables. L'image canonique de  $\mathcal{M}_\Gamma$  dans l'espace vectoriel quotient séparé s'identifie à  $M_\Gamma$ .

En effet si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $\mathcal{M}_\Gamma$  on a :

$$\begin{aligned} f = g \quad \text{p.p.} &\Leftrightarrow \int_Z \langle x', f - g \rangle \mu = 0, \forall Z \in \mathcal{A}, \forall x' \in E' \\ &\Leftrightarrow \int \langle h, f - g \rangle \mu = 0, \forall h \in \mathcal{E}_{E'} \text{ (resp. } \forall h \in L_{\mathbf{R}}^\infty \otimes E') \\ &\Leftrightarrow f - g \in \overline{\{0\}}. \end{aligned}$$

2) La topologie du 1) (resp. 2) est la moins fine rendant faiblement continues les

$$f \mapsto \int_Z f \mu \quad \left( \text{resp. } f \mapsto \int h f \mu, h \in L_{\mathbf{R}}^\infty \right).$$

(1) Nous nous sommes aperçus que, pour nos besoins, on peut se passer du lemme de ce paragraphe. En effet, lorsque  $E$  est souslinien (au sens de Schwartz) et semi-réflexif, l'image d'une mesure abstraite bornée est une mesure de Radon concentrée sur la réunion d'une suite de convexes faiblement compacts. Alors si  $f$  est scalairement intégrable,  $\int f \mu$  appartient à  $E$ , et l'ensemble  $A$  du théorème 2 est contenu dans  $E$ .

*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur  $M_\Gamma$ . Soit  $F_n$  l'espace vectoriel engendré par  $(e'_0, \dots, e'_n)$ . A  $f \in M_\Gamma$  on associe  $f_n \in L_{F_n}^1$  défini par la restriction de  $\langle \cdot, f(\omega) \rangle$  à  $F_n$ . Les  $f_n$  restent dans une partie latticiellement bornée de  $L_{F_n}^1$ . Soit  $\bar{f}_n$  la limite de  $f_n$  pour  $\sigma(L_{F_n}^1, L_{F_n}^\infty)$  ([5], lemme 7.1). On a  $\bar{f}_{n+1}(\omega)|_{F_n} = \bar{f}_n(\omega)$  p.p. En effet, pour  $i \leq n$  et  $Z \in \mathcal{A}$  on a :

$$\begin{aligned} \int_Z \langle e'_i, \bar{f}_{n+1} \rangle \mu &= \lim \int_Z \langle e'_i, f_{n+1} \rangle \mu \\ &= \lim \int_Z \langle e'_i, f_n \rangle \mu = \int_Z \langle e'_i, \bar{f}_n \rangle \mu \end{aligned}$$

Posons  $\Gamma_{-1} = \Gamma$  et pour  $n \geq 0$

$$\Gamma_n(\omega) = \{ x \in \Gamma_{n-1}(\omega) \mid \langle e'_n, x \rangle = \langle e'_n, \bar{f}_n(\omega) \rangle \text{ p.p.} \}$$

Alors  $\bigcap \Gamma_n(\omega)$  est réduite à un point  $\bar{f}(\omega)$ , et  $\bar{f}$  est scalairement mesurable d'après ([18], lemmes 1 et 2).

1) Soit  $Z \in \mathcal{A}$ . Soit  $\xi = \lim_{\mathcal{U}} \int_Z f \mu \in A_Z$ .

On a :

$$\langle e'_n, \int_Z \bar{f} \mu \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle e'_n, \int_Z f \mu \rangle, \quad \forall n.$$

D'où :

$$\langle e'_n, \int_Z \bar{f} \mu \rangle = \langle e'_n, \xi \rangle, \quad \forall n.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_Z \bar{f} \mu &= \xi \quad \text{et par suite} \\ \langle x', \int_Z \bar{f} \mu \rangle &= \lim_{\mathcal{U}} \langle x', \int_Z f \mu \rangle, \quad \forall x' \in E'. \end{aligned}$$

2) Soit  $h \in L_{\mathbb{R}}^\infty$  et  $f \in \mathcal{M}_\Gamma$ . On a :

$$\int f h \mu \in N_\infty(h) N_1(g) K.$$

En effet soit  $K^0 \subset E'$  le polaire de  $K$  et soit  $x' \in K^0$ . On a :

$$\begin{aligned} \langle x', \int f h \mu \rangle &= \int \langle x', f(\omega) \rangle h(\omega) \mu(d\omega) \\ &\leq N_\infty(h) \int g(\omega) \mu(d\omega) = N_\infty(h) N_1(g) \end{aligned}$$

Par suite :

$$\int fh\mu \in N_\infty(h)N_1(g)K^{\circ\circ}$$

où  $K^{\circ\circ}$  est le polaire de  $K^\circ$  dans  $E'^*$ . Mais comme  $K$  est convexe faiblement complet,  $K^{\circ\circ}$  est identique à  $K$  et on a bien :

$$\int fh\mu \in N_\infty(h)N_1(g)K.$$

Montrons maintenant que pour  $h$  fixé dans  $L_{\mathbb{R}}^\infty$  l'ensemble des  $\int fh\mu$  ( $f \in \mathcal{M}_\Gamma$ ) est borné, donc faiblement précompact, donc faiblement relativement compact puisqu'il est contenu dans la partie faiblement complète

$$N_\infty(h)N_1(g)K.$$

En effet on a :

$$\langle x', \int fh\mu \rangle \leq N_\infty(h) \int \sup [\varphi(x', \Gamma(\cdot)), \varphi(-x', \Gamma(\cdot))] \mu$$

quel que soit  $x' \in E'$ .

Soit  $\xi$  la limite faible suivant  $\mathcal{U}$  de  $\int fh\mu$ .

On a :

$$\langle e'_n, \int \tilde{f}h\mu \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle e'_n, \int fh\mu \rangle, \quad \forall n.$$

D'où la même conclusion que précédemment.

**Corollaire.** — *Sous les hypothèses du 2), si  $\mu = |\mu_1| + \dots + |\mu_p|$  où  $\mu_i$  sont des mesures réelles, l'ensemble*

$$\left\{ \left( \int f\mu_1, \dots, \int f\mu_p \right) \mid f \in \mathcal{M}_\Gamma \right\}$$

*est contenu dans  $E^p$  et faiblement compact.*

Le théorème suivant améliore le théorème 8.7 de [7].

**Théorème 4.** — *Soit  $E$  le dual faible  $F'_s$  d'un espace localement convexe  $F$ . Soit  $K$  une partie équicontinue, convexe équilibrée fermée métrisable non vide de  $E$ . On suppose  $\Gamma(\omega) \subset K$ ,  $\forall \omega$ , et les  $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$  mesurables  $\forall x' \in F$ . Alors  $M_\Gamma$  est  $\sigma(L_{F'_s}^\infty, L_F^1)$  compact.*

*Démonstration.* — On a  $L_F^1 = L_{\mathbb{R}}^1 \hat{\otimes} F$ . Montrons que  $M_\Gamma$  est équicontinu dans  $L_{F'_s}^1$ . Il est équivalent de montrer que  $M_\Gamma$  est un ensemble équicontinu

de formes linéaires sur  $L_{\mathbb{R}}^1 \otimes F$ . En effet, soit  $h \in L_{\mathbb{R}}^1$  telle que  $N_1(h) \leq 1$  et  $x' \in K^\circ$  (voisinage de l'origine dans  $F$ ). Pour tout  $f \in M_\Gamma$  on a alors :

$$\left| \langle f, h \otimes x' \rangle \right| = \left| \int \langle x', f \rangle h \mu \right| \leq 1$$

Montrons que  $M_\Gamma$  est fermé dans  $L_{F_i}^\infty$  faible. Soit  $\mathcal{F}$  un filtre sur  $M_\Gamma$  convergeant vers un élément  $\bar{f}$  de  $L_{F_i}^\infty$ . On a :

$$\int \langle \bar{f}, g \rangle \mu = \lim_{\mathcal{F}} \int \langle f, g \rangle \mu \quad , \quad \forall g \in L_F^1.$$

En particulier si  $\mu(Z) < +\infty$  et si  $g \in \mathcal{E}_F$  on a :

$$\int_Z \langle \bar{f}, g \rangle \mu = \lim_{\mathcal{F}} \int_Z \langle f, g \rangle \mu$$

Le théorème précédent montre que  $\bar{f}(\omega) \in \Gamma(\omega)$  p.p. sur  $Z$ . Comme  $Z$  est arbitraire cela prouve que  $\bar{f}$  appartient à  $M_\Gamma$ .

REMARQUE. — On peut retrouver facilement le 2) du théorème 3 à partir du théorème 4 lorsque  $E$  est le dual faible  $F'_s$  d'un espace localement convexe  $F$  et lorsque  $K$  est une partie équilibrée convexe équilibrée fermée métrisable non vide de  $E$ . En effet, soit  $(\Omega_n)$  une partition de  $\Omega$  en ensembles intégrables tels que  $g$  soit bornée sur chaque  $\Omega_n$ . Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur  $M_\Gamma$ . D'après le théorème 4 la restriction de  $\mathcal{U}$  à  $\Omega_n$  converge pour la convergence simple sur  $L_{\mathbb{R}}^\infty(\Omega_n) \otimes E'$ . Soit  $f_\infty$  la fonction définie sur  $\Omega$  par recollement des limites sur chaque  $\Omega_n$ . On a pour  $h \in L_{\mathbb{R}}^\infty(\Omega) \otimes E'$

$$\begin{aligned} \left| \int \langle f - f_\infty, h \rangle \mu \right| &\leq \sum_{n \leq n_0} \left| \int_{\Omega_n} \langle f - f_\infty, h \rangle \mu \right| \\ &\quad + \sum_{n > n_0} \left| \int_{\Omega_n} \langle f - f_\infty, h \rangle \mu \right| \end{aligned}$$

Le deuxième terme est  $< \frac{\varepsilon}{2}$  pour  $n_0$  assez grand car  $\langle f - f_\infty, h \rangle$  est latticiellement borné par un multiple de  $g$ , et le premier terme tend vers 0 suivant  $\mathcal{U}$  pour  $n_0$  fixé.

Par cette méthode, si  $E$  est de dimension finie, on retrouve de façon élémentaire, à partir du théorème d'Alaoglu, le fait que les parties latticiellement bornées de  $L_E^1$  sont faiblement relativement compactes.

### 3. Primitive d'une multi-application

Désignons par  $\mathcal{C}_E([0, T])$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[0, T]$  dans  $E$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur  $[0, T]$ .

**Théorème 5.** — Soit  $\Omega = [0, T]$ ,  $\mu$  la mesure de Lebesgue sur  $\Omega$ . Supposons que  $\Gamma$  vérifie les hypothèses 1) du théorème 3. Soit  $M$  un compact non vide de  $E$ . Posons :

$$\mathfrak{X} = \left\{ X : [0, T] \rightarrow E \mid X(0) \in M, X(t) = X(0) + \int_0^t X'(s) ds, X' \in M_\Gamma \right\}.$$

On a une bijection  $(X(0), X') \rightarrow X$  de  $M \times M_\Gamma$  sur  $\mathfrak{X}$ . Si on munit  $\mathfrak{X}$  de la borne supérieure des topologies de la convergence de  $X$  dans  $C_{E\sigma}([0, T])$  et de la convergence simple de  $X'$  sur  $\mathfrak{E}_{E'}$ ,  $\mathfrak{X}$  est compact (et métrisable si  $M$  est métrisable).

*Démonstration.* — Montrons d'abord que l'ensemble  $\mathfrak{X}$  est relativement compact dans  $C_{E\sigma}([0, T])$ . D'après le théorème d'Ascoli il suffit de prouver que  $\mathfrak{X}$  est équicontinu et que pour tout  $t \in [0, T]$  l'ensemble des  $X(t)$  ( $X \in \mathfrak{X}$ ) est relativement  $\sigma(E, E')$  compact. Montrons l'équicontinuité. Soit  $t \in [0, T]$ . Pour  $t' \in [t, T]$  on a :

$$X(t') - X(t) \in A_{[t, t']} \quad , \quad \forall X \in \mathfrak{X}$$

Pour tout voisinage faible  $V$  de l'origine, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $t' \in [t, t + \varepsilon]$  entraîne  $A_{[t, t']} \subset V$ . En effet si  $V$  est de la forme

$$\{ x \in E \mid \langle x'_i, x \rangle \leq \delta, i = 1, \dots, n \},$$

il suffit de prendre  $\varepsilon$  tel que  $\int_t^{t+\varepsilon} \varphi(x'_i, \Gamma(\theta)) d\theta \leq \delta$  (<sup>1</sup>). On a ainsi établi l'équicontinuité « à droite ».

Le même raisonnement vaut « à gauche ». Enfin pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $X \in \mathfrak{X}$ ,  $X(t) \in M + A_{[0, t]}$  qui est  $\sigma(E, E')$  compact.

Soit  $\mathfrak{U}$  un ultrafiltre sur  $\mathfrak{X}$  convergeant vers un élément  $\bar{X} \in C_{E\sigma}([0, T])$ . Pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $x' \in E'$  on a alors :

$$\begin{aligned} \langle x', \bar{X}(t) - \bar{X}(0) \rangle &= \lim_{\mathfrak{U}} \langle x', X(t) - X(0) \rangle \\ &= \lim_{\mathfrak{U}} \langle x', \int_0^t X'(s) ds \rangle \quad (X' \in M_\Gamma) \end{aligned}$$

D'après le 1) du théorème 3 on a :

$$\lim_{\mathfrak{U}} \langle x', \int_Z X'(s) ds \rangle = \langle x', \int_Z f(s) ds \rangle \quad \text{avec} \quad f \in M_\Gamma.$$

(1) De fait on a démontré en passant que la multi-application  $t \mapsto A_{[t, t']}$  est semi-continue supérieurement en  $t$ . Plus généralement si  $A$  est une multi-application définie sur un espace topologique à valeurs dans les convexes compacts d'un espace faible  $E$  et si les  $\varphi(x', A(\cdot))$  sont semi-continues supérieurement,  $A$  est semi-continue supérieurement (et réciproquement).

Il en résulte (avec  $Z = [0, t]$ ) que  $\bar{X}(t) - \bar{X}(0) = \int_0^t f(s) ds$ . D'où la compacité de  $\mathfrak{X}$ .

Si  $M$  est métrisable,  $M + A_{[0, t]}$  est métrisable,  $\forall t \in [0, T]$  et la topologie de  $\mathfrak{X}$  est identique à la topologie de la convergence simple sur une partie dense de  $[0, T]$  (qui peut être choisie dénombrable), donc est métrisable.

REMARQUE. — La topologie de  $\mathfrak{X}$  est induite par la topologie de  $C_{E\sigma}([0, T])$ .

Voici une variante du théorème 5.

**Théorème 5'.** — *Les notations étant les mêmes que celles du théorème 5, supposons que  $\Gamma$  vérifie les hypothèses 2) du théorème 3 où le  $K$  dans ce théorème est une partie convexe équilibrée compacte non vide de  $E$ . Si on munit  $\mathfrak{X}$  de la borne supérieure des topologies de la convergence de  $X$  dans  $C_E([0, T])$  et de la convergence simple de  $X'$  sur  $L_{\mathbb{R}}^{\infty} \otimes E'$ ,  $\mathfrak{X}$  est compact (et métrisable si  $M$  est métrisable).*

*Démonstration.* — Montrons d'abord que l'ensemble  $\mathfrak{X}$  est relativement compact dans  $C_E([0, T])$ . D'après le théorème d'Ascoli il suffit de prouver que  $\mathfrak{X}$  est équicontinu et que pour tout  $t \in [0, T]$  l'ensemble des  $X(t)$  ( $X \in \mathfrak{X}$ ) est relativement compact dans  $E$ . L'équicontinuité « à droite » résulte du fait qu'étant donné un voisinage  $V$  de l'origine on peut trouver  $\varepsilon > 0$  tel que

$\left( \int_t^{t+\varepsilon} g(s) ds \right) K \subset V$ . On a également l'équicontinuité « à gauche ». Enfin pour tout  $t \in [0, T]$ , l'ensemble  $A_{[0, t]}$  est compact dans  $E$  car il est  $\sigma(E, E')$  compact et convexe d'après le 2) du théorème 3 et contenu dans l'ensemble compact convexe  $N_1(g)K$ . Il en résulte que pour tout  $t \in [0, T]$  l'ensemble  $\{X(t) \mid X \in \mathfrak{X}\}$  est compact car identique à l'ensemble compact  $M + A_{[0, t]}$ .

La démonstration se termine comme celle du théorème 5 [utiliser le 2 du théorème 3].

**Théorème 6.** — *Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème 5 (ou théorème 5') on a :*

$$\mathfrak{X} = \{ X : [0, T] \rightarrow E \mid X(0) \in M, X(t'') - X(t') \in A_{[t', t'']} \quad , \quad \forall t' \leq t'' \}.$$

Cet énoncé généralise la proposition 2 de Ghouila-Houri [13].

*Démonstration.* — Soit  $\mathfrak{X}_1$  l'ensemble défini dans l'énoncé par le second membre. On a  $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}_1$ . Il suffit de montrer que  $\mathfrak{X}$  est dense dans  $\mathfrak{X}_1$  pour la convergence simple sur  $[0, T]$ . Soit  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$ . Soit  $X \in \mathfrak{X}_1$  et  $f \in \mathcal{M}_{\Gamma}$  telle que (l'existence de  $f$  résulte du théorème 2)

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s) ds = X(t_{i+1}) - X(t_i). \text{ Posons :}$$

$$Y(t) = X(0) + \int_0^t f(s) ds.$$

On a  $Y(t_i) = X(t_i), \forall i$  et  $Y \in \mathfrak{X}$ .

Voici dans le même ordre d'idée un autre résultat avec  $\Omega$  quelconque.

**Théorème 7.** — *Supposons que  $\Gamma$  vérifie les hypothèses du 1) du théorème 3. Soit*

$$\mathfrak{X} = \left\{ m : \mathcal{A} \rightarrow E \mid m(Z) = \int_Z f \mu, f \in \mathcal{M}_\Gamma \right\}$$

et

$$\mathfrak{X}_1 = \left\{ m : \mathcal{A} \rightarrow E \mid m(Z) \in \int_Z \Gamma \mu, m \text{ additive.} \right\}$$

Alors  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1$  (1).

*Démonstration*

1) Il y a une bijection entre  $\mathfrak{X}$  et  $M_\Gamma$  car  $f \mapsto m$  est surjective, et si  $\int_Z f \mu = \int_Z g \mu, \forall Z$ , on a  $f = g$  scalairement p.p. donc p.p. Mettons sur  $\mathfrak{X}$  la topologie de la convergence simple (dans  $E_\sigma$ ) de  $m(Z)$  sur  $\mathcal{A}$ . Alors  $\mathfrak{X}$  est compact d'après le 1) du théorème 3.

2) Montrons que  $\mathfrak{X}$  est dense dans  $\mathfrak{X}_1$  (pour la même topologie).

Soit  $m \in \mathfrak{X}_1$  et  $Z_1, \dots, Z_n$  appartenant à  $\mathcal{A}$ . Soit  $B_1, \dots, B_p$  les atomes de l'algèbre engendrée par  $(Z_1, \dots, Z_n)$ . Il existe (théorème 2)  $f \in \mathcal{M}_\Gamma$  telle que  $m(B_j) = \int_{B_j} f \mu, \forall j$ , et par additivité on a  $m(Z_i) = \int_{Z_i} f \mu, \forall i$ .

#### 4. Équations différentielles multivoques

**Théorème 8.** — *Soit  $U$  un espace topologique. Soit  $F$  une multi-application définie sur  $\Omega \times U$  à valeurs dans les convexes compacts non vides de  $E$ , telle que  $\forall \omega, F(\omega, \cdot)$  soit SCS. Soit  $X_n$  et  $X$  appartenant à  $U^\Omega$ , et  $Y_n$  et  $Y$  des applications de  $\Omega$  dans  $E$  scalairement intégrables telles que  $Y_n(\omega) \in F(\omega, X_n(\omega))$  p.p.*

*On suppose*

a) *Il existe  $(e'_n)$  dans  $E'$  séparant les points de  $E$ .*

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$  p.p.

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Z \langle x', Y_n(\omega) \rangle \mu(d\omega) = \int_Z \langle x', Y(\omega) \rangle \mu(d\omega), \forall x' \in E', \forall Z \in \mathcal{A}.$$

(1) Résultat à rapprocher du théorème 7 de [14 bis], dans sa partie  $C'' \Rightarrow 1^\circ$ .

Alors  $Y(\omega) \in F(\omega, X(\omega))$  p.p.

*Démonstration.* — La condition c) entraîne que la suite  $\langle x', Y_n(\cdot) \rangle$  est équi-intégrable dans  $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  et cette suite converge faiblement vers  $\langle x', Y(\cdot) \rangle$  (1). Par suite il existe une suite  $(Z_m)$  ( $Z_m$  combinaison convexe de  $\langle x', Y_m \rangle, \langle x', Y_{m+1} \rangle, \dots$ ) convergeant fortement vers  $\langle x', Y \rangle$ , et de la suite  $Z_m$  on peut extraire une suite partielle convergeant presque partout vers  $\langle x', Y(\cdot) \rangle$ . D'après la condition b) il existe un négligeable  $N$  tel que  $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$  pour  $\omega \notin N$ . Désignons, pour tout ensemble  $B$ ,  $\gamma(B)$  son enveloppe convexe. Compte tenu du fait que  $F(\omega, x)$  est convexe compact, il résulte de la SCS de  $F(\omega, \cdot)$  qu'il existe  $N_{x'}$  négligeable contenant  $N$ , tel que

$$\begin{aligned} \langle x', Y(\omega) \rangle &\in \bigcap_k \overline{\gamma\left(\bigcup_{m \geq k} \{ \langle x', Y_m(\omega) \rangle \}\right)} \\ &\subset \bigcap_k \overline{\gamma\left(\bigcup_{m \geq k} x' \circ F(\omega, X_m(\omega))\right)} \\ &\subset x' \circ F(\omega, X(\omega)) \quad \text{si} \quad \omega \notin N_{x'}. \end{aligned}$$

En faisant parcourir à  $x'$  un ensemble dénombrable dense dans  $E'$  pour  $\tau(E', E)$  on voit que  $Y(\omega) \in F(\omega, X(\omega))$  p.p. ([6] théorème 5).

Ce théorème intervient dans l'étude de l'optimisation et généralise le théorème de fermeture de [9].

Soit  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $M$  un convexe compact métrisable contenu dans  $U$ ,  $[0, T_0]$  un intervalle ( $T_0 > 0$ ),  $\Gamma$  une multi-application de  $[0, T_0]$  à valeurs dans les convexes compacts non vides de  $E$  telle que les  $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$  soient intégrables. On suppose qu'il existe dans  $E'$  une suite  $(e'_n)$  séparant les points de  $E$ . Soit  $F$  une multi-application définie sur  $[0, T_0] \times U$  à valeurs dans les convexes compacts non vides de  $E$  telle que :

- $\forall t, \forall x, F(t, x) \subset \Gamma(t)$
- $\forall x, \forall x', \varphi(x', F(\cdot, x))$  est mesurable
- $\forall t, x \mapsto F(t, x)$  est semi-continue supérieurement.

On appelle *solution* de l'équation  $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$  sur  $[0, T_0]$  une application  $X : [0, T_0] \rightarrow U$ , primitive d'une application  $X'$ , telle que l'on ait  $X'(t) \in F(t, X(t))$  p.p.

Soit  $T \in ]0, T_0]$  tel que  $M + A_{[0, T]} \subset U$ .

L'existence d'un tel  $T$  est assurée soit :

- 1) si  $\Gamma$  vérifie les hypothèses du théorème 5 et si  $E$  est un espace faible;
- 2) si  $\Gamma$  vérifie les hypothèses du théorème 5'.

(1) Cf. [14 *ter*], proposition IV-2-2, p. 109.

En effet, soit  $V$  un voisinage de l'origine tel que  $M + V \subset U$ .

1) Il suffit de choisir  $T$  tel que  $A_{[0, T]} \subset V$  (cf. démonstration du théorème 5).

2) Il suffit de choisir  $T$  tel que  $\left(\int_0^T g(t) dt\right)K \subset V$  (cf. démonstration et notation du théorème 5'). On aura alors

$$M + A_{[0, T]} \subset M + \left(\int_0^T g(t) dt\right)K \subset M + V \subset U.$$

Nous supposons l'une de ces hypothèses vérifiées.

**Théorème 9.** — *Quel que soit  $\xi \in M$ , l'ensemble  $S_\xi$  des solutions  $X$  sur  $[0, T]$  vérifiant  $X(0) = \xi$  est compact non vide dans  $C_E([0, T])$  et  $\xi \mapsto S_\xi$  est semi-continue supérieurement.*

*Démonstration.* — Soit  $\mathfrak{X}$  l'espace défini dans le théorème 5 (ou 5') associé à  $\Gamma$  et à  $M$ . C'est un convexe compact métrisable. Les solutions de l'équation appartiennent à cet ensemble. On va montrer que les solutions sont les points fixes d'une multi-application définie sur  $\mathfrak{X}$  à valeurs dans les convexes compacts non vides de  $\mathfrak{X}$  et semi-continue supérieurement.

Soit  $G$  l'ensemble des  $(\xi, X, Y) \in M \times \mathfrak{X}^2$  tels que  $X(0) = Y(0) = \xi$  et  $Y'(t) \in F(t, X(t))$  p.p. On posera  $\Phi(X) = \{Y \mid (\xi, X, Y) \in G\}$ . On voit que  $\Phi(X)$  est convexe.

Montrons que  $\Phi(X)$  est non vide. Soit  $X \in \mathfrak{X}$ . Comme  $X$  est continue sur  $[0, T]$ ,  $X$  est limite pour la convergence simple d'une suite de  $f_n : [0, T] \rightarrow E$  étagées (ou même en escalier). On a :

$$\emptyset \neq \bigcap_k \overline{\gamma\left(\bigcup_{n \geq k} F(t, f_n(t))\right)} \subset F(t, X(t))$$

Posons :

$$\Sigma(t) = \bigcap_k \overline{\gamma\left(\bigcup_{n \geq k} F(t, f_n(t))\right)}$$

On a :

$$\varphi(x', \overline{\gamma\left(\bigcup_{n \geq k} F(t, f_n(t))\right)}) = \sup_{n \geq k} \varphi(x', F(t, f_n(t)))$$

Par suite ([18], lemme 1) les fonctions  $\varphi(x', \Sigma(\cdot))$  sont mesurables. En vertu de ([18], lemme 4),  $\Sigma$  admet une section scalairement mesurable  $\sigma$ . Comme  $\Sigma(t) \subset \Gamma(t)$ ,  $\forall t \in [0, T]$  cette section est scalairement intégrable. Posons

$$Y(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(s) ds, \forall t \in [0, T]$$

Alors  $Y \in \Phi(X)$ . Montrons que  $G$  est fermé. Soit  $(\xi_k, X_k, Y_k)$  une suite dans  $G$  convergeant vers  $(\xi, X, Y) \in M \times \mathfrak{X}^2$ . On a  $X(0) = Y(0) = \xi$ . D'après

le théorème 8 on a  $Y'(t) \in F(t, X(t))$  p.p. Donc  $G$  est fermé. Il en résulte que la multi-application  $\Phi$  est semi-continue supérieurement. La démonstration se termine comme dans [4].

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] AHMAD (S.), « Éléments aléatoires dans les espaces vectoriels topologiques », *Annales IHP*, section B II-2 (1965), 95-135.
- [2] BOURBAKI (N.), *Intégration*, chap. I, II, III, IV, 2<sup>e</sup> éd.
- [3] BOURBAKI (N.), *Intégration*, chap. VI, 1<sup>re</sup> éd.
- [4] CASTAING (Ch.), « Sur les équations différentielles multivoques », *C.R.A.S.*, 263 (1966), 63-66.
- [5] CASTAING (Ch.), « Sur les multi-applications mesurables », *Revue inf. Rech. Op.* 1 (1967), 91-126.
- [6] CASTAING (Ch.), « Sur un théorème de représentation intégrale lié à la comparaison des mesures », *C.R.A.S.* 264 (1967) 1059-1062.
- [7] CASTAING (Ch.), Sur les multi-applications mesurables (multigraphié). Thèse 1967.
- [7 bis] CASTAING (Ch.) et VALADIER (M.). « Équations différentielles multivoques dans les espaces localement convexes », *C.R.A.S.*, 266 (1968), 985-987.
- [8] CESARI (L.), « Existence theorem for optimal solution in Lagrange and Pontrjagin problems », *Siam J. Control*, 3 (1966), 475-498.
- [9] CESARI (L.), *Existence theorems for multidimensional problems of optimal control. Differential equations and dynamical systems*, 1967, Academic Press, p. 115-132.
- [10] DUNFORD (N.) et SCHWARTZ (J. T.), *Linear Operators*, part I.
- [11] FILIPPOV (A. F.), Differential equations with multi-valued discontinuous right-hand side, *Dokl. Ak. Nauk. SSSR*, 151 (1963) 65-68.
- [12] FILIPPOV (A. F.), Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side. *Siam. J. Control*, 5-4 (1967), 609-621.
- [13] GHOUILA-HOURI (A.), « Équations différentielles multivoques », *C.R.A.S.*, 261 (1965), 2568-2571.
- [14] LASOTA (A.) et OPIAL (Z.), « An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equation », *Bull. Ac. Pol. Sc. Math.*, 13 (1965), 781-786.
- [14 bis] MÉTIVIER (M.), « Martingales à valeurs vectorielles. Application à la dérivation des mesures vectorielles », *Ann. Inst. Fourier*, 17-2 (1967), 175-208.
- [14 ter] NEVEU (J.), *Bases mathématiques du calcul des probabilités.*, Masson, 1964.
- [15] PLIS (A.), « Measurable orientor fields », *Bull. Ac. Pol. Sc. Math.*, 13-8 (1965), 565-569.
- [16] ROXIN (A.), « On a generalized dynamical system defined by contingent equations », *Journal of differential equations*, 1(1965), p. 188-205.
- [17] SCHWARTZ (L.), Cours d'Analyse (Hermann).
- [18] VALADIER (M.), « Sur l'intégration d'ensembles convexes compacts en dimension infinie », *C.R.A.S.*, 266 (1968), 14-16.
- [19] WARGA (J.), « Relaxed variational problems », *J. Math. Analysis and Applications*, 4 (1962), 111-128.
- [20] WAZEWSKI (T.), *On an optimal control problem*. Proc. Conf. « Differential equations and their applications ». Prague, 1962, p. 229-292, Academic Press.