

B. GERMAIN-BONNE

Calcul de pseudo-inverses

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge, tome 3, n^o 2 (1969), p. 3-13.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1969__3_2_3_0

© AFCET, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CALCUL DE PSEUDO-INVERSES

par B. GERMAIN-BONNE (1)

Résumé. — *Les méthodes décrites dans cet article, qui sont présentées comme une généralisation des méthodes d'inversion, sont bien adaptées au calcul sur ordinateur; des expériences numériques ont par ailleurs montré que les erreurs de calcul sont analogues à celles que l'on obtient en utilisant les méthodes d'inversion.*

INTRODUCTION

Le but de cet article est d'exposer des algorithmes de calcul de pseudo-inverse de matrice; les méthodes décrites dans la section 1 sont inspirées par la méthode d'élimination de Jordan.

Dans la section 2, on montre comment on peut utiliser un algorithme de pseudo-inversion pour résoudre de grands systèmes par relaxation.

SECTION 1

METHODE DE PSEUDO-INVERSION

a) Rappel

On sait (cf. Penrose) que le pseudo-inverse A^+ d'une matrice A_{mn} de rang r est l'unique solution du système matriciel

$$\begin{cases} AA^+A = A \\ A^+AA^+ = A^+ \\ (AA^+)^* = AA^+ \\ (A^+A)^* = A^+A \end{cases} \quad \begin{array}{l} A^* \text{ désigne la matrice conjuguée} \\ \text{transposée de la matrice } A \end{array}$$

On peut démontrer le théorème suivant :

(cf. Blattner, Germain-Bonne)

(1) Faculté des Sciences de Lille.

Théorème

Si A est une matrice de dimensions (m, n) et de rang r , on peut trouver deux matrices U (de dimensions $(n, n-r)$) et V (de dimensions $(m, m-r)$) telles que :

$$\begin{aligned} AU &= 0 \\ V^*A &= 0 \end{aligned} \quad \text{et que} \quad \begin{pmatrix} A & V \\ U^* & O \end{pmatrix} \quad \text{soit régulière}$$

Dans ce cas

$$\begin{pmatrix} A & V \\ U^* & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^+ & (U^*)^+ \\ V^+ & O \end{pmatrix}$$

b) Description de la méthode de pseudo-inversion

La méthode est basée sur le théorème précédent. Pour se ramener à un calcul d'inverse, il suffit de déterminer deux matrices U et V de rang maximum telles que :

$$\begin{cases} AU = 0 \\ V^*A = 0 \end{cases}$$

Pratiquement, nous considérerons ici des matrices à éléments réels et A^* sera notée A^T (transposée de A).

Détermination de V telle que $V^T A = 0$

La méthode utilisée est fondée sur l'algorithme de Jordan.

La méthode de Jordan, appliquée à une matrice A_{mn} de rang r , consiste à déterminer une matrice régulière Q telle que :

$$QA = \begin{array}{|ccc|} \hline I_r & \Delta & - \\ \hline & 0 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} r \\ m-r \end{array}$$

Pratiquement, la matrice Q s'obtient à partir d'une matrice unité d'ordre m , dont les lignes suivent la même transformation que les lignes de A . On fait donc la transformation sur un tableau de m lignes et $m+n$ colonnes, ce qui peut se symboliser de la manière suivante :

$$\begin{array}{|cc|} \hline n & m \\ \hline \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline m & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|cc|} \hline A & I \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|ccc|} \hline I_r & \Delta & - \\ \hline & 0 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} Q_1 \\ Q_2 \end{array} \begin{array}{l} r \\ m-r \end{array}$$

La sous-matrice Q_2 est une sous-matrice de Q qui est régulière. Elle est telle que $Q_2A = 0$; c'est donc la matrice V^T qui intervient dans le théorème précédent.

Méthode de pseudo-inversion

Méthode fondamentale

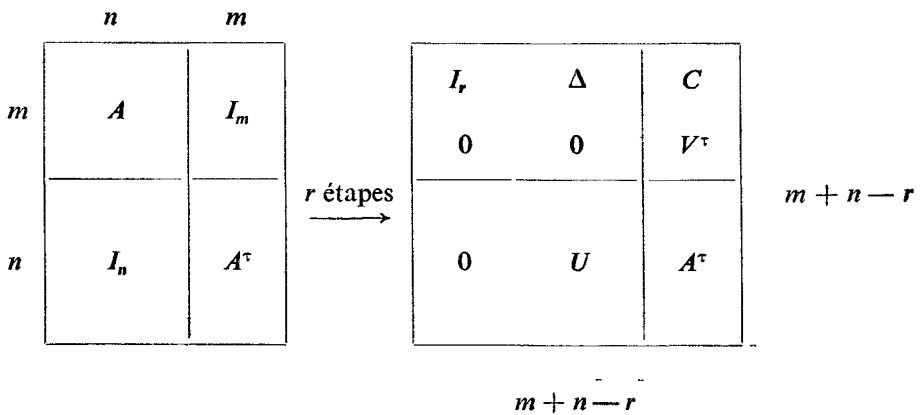
En appliquant la méthode de Jordan aux matrices A et A^T , on peut déterminer U et V telles que :

$$AU = 0$$

$$V^T A = 0$$

Disposition pratique :

On range dans un tableau carré de dimensions $(m + n, m + n)$ les matrices A, A^T, I_m, I_n et on transforme par la méthode de Jordan les matrices A, I_m, I_n ; on obtient les matrices U et V au bout de r étapes.



On inverse ensuite la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & V^T \\ U & A^T \end{pmatrix}$$

Variante

Elle est fondée sur la formule :

$$A^+ = (A^T A)^+ A^T$$

La détermination du pseudo-inverse de A exige celle de $A^T A$, qui est une matrice symétrique, de même rang que A . Le calcul du pseudo-inverse de $A^T A$ se fait par la méthode fondamentale, qui se simplifie dans ce cas particulier.

La matrice $A^T A$ étant symétrique, U et V telles que $A^T A U = 0$ et $V^T A^T A = 0$ sont telles que $U = V$; il suffit donc de chercher V telle que $V^T (A^T A) = 0$. On opère comme plus haut :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 \begin{array}{c} n \\ A^T A \end{array} & \begin{array}{c} n \\ I_n \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \xrightarrow{r \text{ étapes}}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 \begin{array}{c} I_r \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} B \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} C \\ \\ \\ \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} O \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} V^T \\ \\ \\ \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Nous devons maintenant inverser la matrice régulière :

$$\begin{array}{|c|c|}
 \hline
 A^T A & V \\
 \hline
 V^T & O \\
 \hline
 \end{array}$$

Utilisons la méthode de Jordan; l'inversion complète de cette matrice consisterait à faire la transformation :

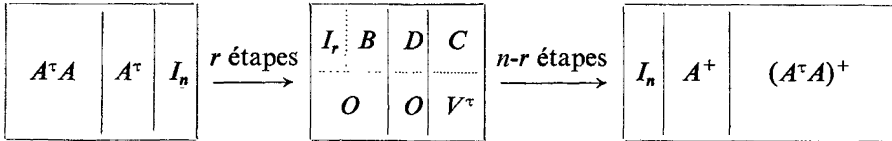
$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 A^T A & V & I_n & O \\
 \hline
 V^T & O & O & I_{n-r} \\
 \hline
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 I_n & O & (A^T A)^+ & (V^T)^+ \\
 \hline
 O & I_{n-r} & V^+ & O \\
 \hline
 \end{array}$$

Comme nous voulons uniquement $(A^T A)^+$, on peut se borner à déterminer n lignes indépendantes de la matrice :

$$\begin{array}{|c|}
 \hline
 A^T A \\
 \hline
 V^T \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}
 \hline
 A^T A & I_n \\
 \hline
 V^T & O \\
 \hline
 \end{array}
 \xrightarrow{r \text{ étapes}}
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 I_r & B & C \\
 \hline
 O & V^T & \\
 \hline
 V^T & O & \\
 \hline
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 I_r & B & C \\
 \hline
 V^T & O & \\
 \hline
 O & V^T & \\
 \hline
 \end{array}
 \xrightarrow{n-r \text{ étapes}}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 I_n & (A^T A)^+ \\
 \hline
 O & V^T \\
 \hline
 \end{array}$$

Dans cette série de transformations, uniquement les n premières lignes du tableau ont été transformées, et on obtient au bout de r étapes la matrice V^r , qu'il n'était pas nécessaire de calculer préalablement. D'autre part, nous voulons calculer $(A^r A)^+ A^r$; pour éviter de faire une multiplication après avoir obtenu $(A^r A)^+$, il est préférable d'opérer de la manière suivante :



REMARQUE : Pour obtenir $A^+ b$, meilleure solution du système $Ax = b$, il suffit dans la méthode précédente, de remplacer A^r par $A^r b$.

Nombre d'opérations des deux méthodes

— *Méthode fondamentale* : Détermination de U et V :

$$\left[m + n + 1 - \frac{r + 1}{2} \right] nr$$

multiplications; on doit ajouter un nombre de multiplications de l'ordre de $(m + n - r)^3$ pour inverser $\begin{pmatrix} A & V \\ U^r & O \end{pmatrix}$

Variante

$$\frac{nm(m + 1)}{2} + (m - 1) \left[\frac{m(m - 1)}{2} + nm + \frac{r(r + 1)}{2} \right] \quad \text{multiplications}$$

Pour m, n et r sensiblement égaux, le calcul de A^+ demande environ $2,5 m^3$ multiplications, dans les deux cas.

Précision des méthodes

Les méthodes décrites donnent un degré de précision analogue à celui qu'on obtient avec les méthodes d'inversion classiques; nous avons le même problème que celui rencontré avec les méthodes d'inversion : comment apprécier si une ligne est combinaison linéaire des précédentes. Le « rang numérique » d'une matrice est fonction du zéro machine que l'on se fixe.

EXEMPLE : Résolution de $Ax = a$ par la seconde méthode.

$$A = \begin{pmatrix} 0,990 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0,992 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0,994 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0,996 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0,999 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Nous avons résolu ce système en faisant varier le zéro machine.

ZERO MACHINE	x (SOLUTION)	RESIDU $a - Ax$
10^{-6} (calcul de $A^{-1}a$)	0,30983671 0,39330913 0,52483740 0,77552250 2,9995336	- 0,00000097 0,000047 0,000050 0,000003 - 0,000099
10^{-5} (calcul de pseudo inverse)	0,55080339 0,71200920 0,98740690 1,5986901 1,1560253	0,0006 0,0008 0,0010 0,0020 - 0,0003
10^{-3} (calcul de pseudo inverse)	1,0003317 1,0007136 1,0011151 1,0015167 1,0021195	0,005 0,003 0,001 - 0,001 - 0,004

SECTION 2

APPLICATION DES METHODES DE PSEUDO-INVERSION A LA RESOLUTION DE GRANDS SYSTEMES PAR RELAXATION

Nous étudions dans cette section la résolution d'un grand système $Ax = a$ par une méthode mixte utilisant une méthode de relaxation et une méthode de pseudo inversion.

Le principe est basé sur un partitionnement de A : $A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$, tel que la matrice P soit carrée régulière; si on partitionne également le second membre a en $\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$ et le vecteur inconnu x en $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on se ramène au système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Px_1 + Qx_2 = Q_1 \\ Rx_1 + Sx_2 = Q_2 \end{cases}$$

Pour résoudre un tel système matriciel, on est amené à déterminer l'inverse de P et le pseudo inverse de $(S - RP^{-1}Q)$.

Il faudra déterminer une solution particulière de $Ax = a$ et la solution générale de $Ax = 0$.

Résolution d'un système compatible $Ax = a$

Soient (m, n) les dimensions de A et r son rang.

Le système $Ax = a$ est compatible s'il existe au moins un x_0 tel que $Ax_0 = a$. Soient x_0 une solution particulière de $Ax = a$ et $x_1, x_2 \dots x_{n-r}$, $(n - r)$ vecteurs linéairement indépendants entre eux tels que $Ax_i = 0$ ($i = 1 \dots n - r$).

Soit X la matrice formée par les vecteurs colonnes x_i ($i = 1 \dots n - r$); on peut montrer que la solution $z = A^+ a$ cherchée s'écrit :

$$z = (I - XX^+)x_0$$

Une telle formule peut être intéressante si les x_i tels que $Ax_i = 0$ et x_0 tel que $Ax_0 = a$ sont faciles à obtenir et peu nombreux (cas d'une matrice de grande dimension et de rang assez élevé).

REMARQUE

Lorsque le système n'est pas compatible, le vecteur a , qui n'appartient pas à l'espace des colonnes de A peut se décomposer :

$$a = (I - XX^+)a + XX^+a$$

$(I - XX^+)a$ appartient à l'espace des colonnes de A .

XX^+a appartient à l'espace orthogonal.

On peut donc se ramener à un système compatible :

$$Ax = (I - XX^+)a, \quad \text{dont la solution est } z = A^+ a$$

Résolution d'un système linéaire compatible $Ax = a$ par utilisation d'une méthode de résolution

Hypothèses :

- 1) La matrice A est de dimensions (m, n) et de rang r .
- 2) Le système $Ax = a$ est compatible.
- 3) La matrice A se décompose en B et D telles que $A = B + D$ et $\rho(D^+B) < 1$, ρ désignant le rayon spectral de la matrice D^+B .

On peut démontrer les propriétés suivantes :

Propriété 1. La matrice D^+A et la matrice D ont même rang.

Propriété 2. La solution générale de $D^+Ax = 0$ peut se déduire de la solution générale de $Dx = 0$.

En effet, si z est tel que $Dz = 0$, la formule itérative $y_{n+1} = z - D^+By_n$ permet d'obtenir y (limite de y_n) tel que $D^+Ay = 0$.

Le nombre de vecteurs linéairement indépendants z tels que $Dz = 0$ est égal au nombre des y tels que $D^+Ay = 0$. On peut donc obtenir la solution générale de $D^+Ax = 0$.

Propriété 3. La solution générale de $Ax = 0$ peut se déduire de la solution générale de $D^+Ax = 0$.

En effet, l'ensemble des x tels que $Ax = 0$ est inclus dans l'ensemble des y tels que $D^+Ay = 0$.

Résolution de $Ax = a$

En utilisant les trois propriétés précédentes, on peut déterminer la solution générale de $Ax = a$.

Il suffit alors de déterminer une solution particulière de $Ax = a$.

Cette recherche peut se faire en deux étapes :

- 1) *Solution particulière de $D^+Ax = D^+a$*

Il suffit d'utiliser la formule :

$$y_{n+1} = D^+a - D^+By_n$$

Les y_n convergent vers y tel que $D^+Ay = D^+a$.

- 2) *Solution particulière de $Ax = a$*

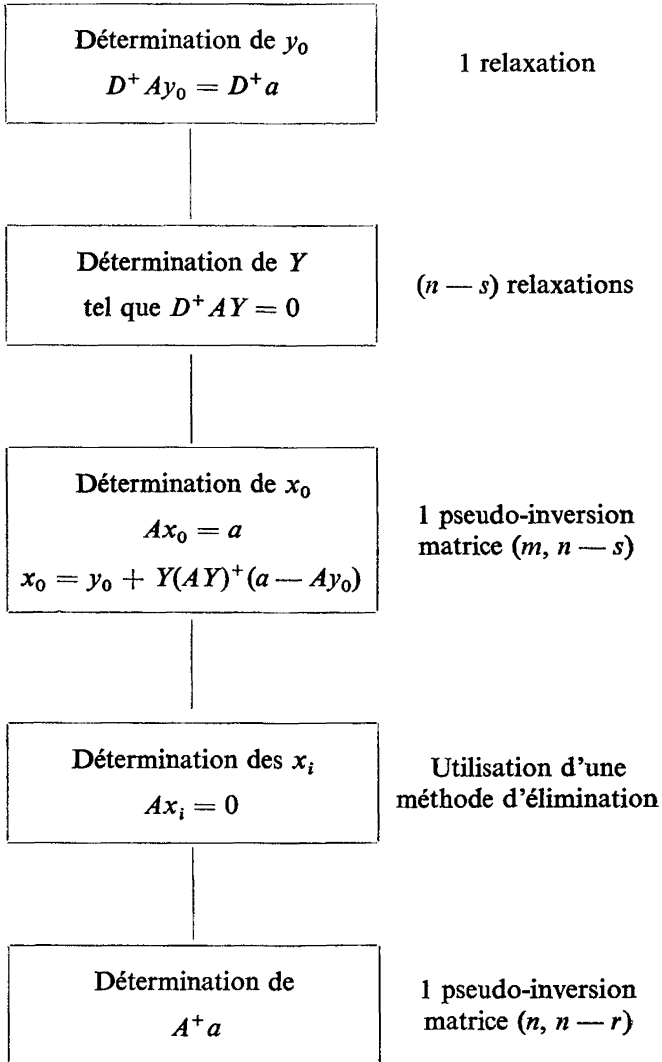
Nous connaissons une solution particulière de $D^+Ax = D^+a$ et la solution générale de $D^+Ax = 0$. Il suffit d'imposer à une solution de $D^+Ax = D^+a$, de vérifier $Ax = a$. C'est un problème de pseudo-inversion.

Ayant une solution particulière de $Ax = a$ et la solution générale de $Ax = 0$, on peut déterminer A^+a par une pseudo-inversion.

Décompte des opérations

r : rang de A

s : rang de D



REMARQUES

La méthode décrite n'offre d'intérêt que dans la mesure où le calcul de D^+ est facile.

Ceci peut se produire dans le cas suivant, par exemple :

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} D_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} && B_1 \text{ et } D_1 \text{ carrées} \\
 & && D_1 \text{ régulière} \\
 &= D + B && \rho(D_1^{-1}B_1) < 1 \\
 D^+ &= \begin{pmatrix} D^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On peut de cette manière améliorer la méthode de Jacobi, en ne gardant dans la matrice D que les éléments dominants.

Exemple

Résolution de

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{dont la solution est} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons pris :

$$D = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cas 1
Cas 2
Cas 3

Nombre de relaxations		Solution trouvée
Cas 1	11	1,00000000001
		1,00000000004
		0,99999999937
		0,99999999937
		0,99999999937
Cas 2	27	0,99999999988
		0,99999999987
		1,00000000002
		1,00000000002
		1,00000000002
Cas 3	73	1,00000000004
		1,00000000004
		1,00000000008
		1,00000000001
		1,00000000005

BIBLIOGRAPHIE

BEN-ISRAEL et CHARNES, Contributions to the theory of generalized inverses, *J. Siam*, 1963, vol. 11, n° 3, pp. 667-699.

J. W. BLATTNER, Bordered matrices, *J. Siam*, 1962, vol. 10, n° 3, pp. 528-536.

GERMAIN-BONNE, Méthodes de calcul de pseudo-inverses, Thèse, Faculté des Sciences de Lille.

GREVILLE, The pseudo-inverse of rectangular or regular matrix and its applications to the solution of systems of linear equations, *Siam Rev.*, 1959, vol. 1, pp. 38-43.

A. KORGANOFF et M. PAVEL-PARVU, Méthodes de calcul numérique : tome 2, *Éléments de théorie des matrices carrées et rectangles en analyse numérique*, Dunod, 1967.

PENROSE, A generalized inverse for matrices, *Proc. Cam. Phil. Soc.*, 1955, vol. 51, pp. 406-413.

RHODE, Generalized inverses of partitioned matrices, *J. Siam*, 1965, vol. 13, n° 4, pp. 1033-1035.