

M. BORDENAVE

A. RIGAL

**Solution numérique de l'équation des ondes d'Alfven  
avec un terme de dissipation par résistance**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge*, tome 3, n<sup>o</sup> 3 (1969), p. 85-97.

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1969\\_\\_3\\_3\\_85\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1969__3_3_85_0)

© AFCET, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DES ONDES D'ALFVEN AVEC UN TERME DE DISSIPATION PAR RESISTANCE

par M. BORDENAVE <sup>(1)</sup> et A. RIGAL <sup>(1)</sup>

Résumé. — *L'étude du phénomène de diffusion du champ magnétique dans un plasma magnéto-hydrodynamique conduit à l'équation des ondes d'Alfven à une dimension d'espace dans le cas de conductivité finie et constante. Cette équation aux dérivées partielles du troisième ordre a été discrétisée et étudiée par les méthodes classiques pas-à-pas dans un domaine indéfini.*

### I. INTRODUCTION

On se propose ici de résoudre l'équation des ondes d'Alfven lorsque le milieu présente une conductivité finie. On considère donc un plasma placé dans un champ magnétique extérieur constant  $\vec{B}_0$ , qui vérifie les hypothèses et les équations magnéto-hydrodynamiques développées dans (1) et que nous résumons brièvement ici. On aboutit au système :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{j} \wedge \vec{B} - \nabla p \\ \text{rot } \vec{b} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{avec } \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b} \\ \text{rot } \vec{E} = -\partial_t \vec{b} \\ \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \end{array} \right.$$

<sup>(1)</sup> Institut de Calcul Numérique de Toulouse.

où on a

$\rho$  densité du fluide,

$\vec{v}$  vitesse d'écoulement,

$\vec{j}$  densité de courant induit

$\vec{b}$  induction magnétique créée par le courant.

$\vec{E}$  champ électrique dans le fluide (on suppose le courant de déplacement  $\partial_t \vec{E}$  négligeable devant le courant de conduction  $\vec{j}$ ).

$\sigma$  conductivité du milieu,

$p$  pression.

Maintenant, si on suppose que  $\vec{B}_0$  est porté par l'axe des  $z$  et que tous les vecteurs ne dépendent que de  $z$  et  $t$ , on arrive au système simplifié :

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -j_x B_0 \\ -\frac{\partial b_y}{\partial z} = \mu_0 j_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial b_y}{\partial t} \\ j_x = \sigma(E_x + v_y B_0) \end{array} \right. \quad \text{puisque} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = v_z = 0 \\ j_y = j_z = 0 \\ b_x = b_z = 0 \end{array} \right.$$

et par élimination à l'équation :

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 b_y}{\partial t^2} - \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho} \frac{\partial^2 b_y}{\partial z^2} - \frac{1}{\sigma \mu_0} \frac{\partial^3 b_y}{\partial z^2 \partial t} = 0$$

où  $\sigma$  est la conductivité dans le sens des  $z$ .

On peut mettre l'équation (1.3) sous la forme :

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 b_y}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial^3 b_y}{\partial z^2 \partial t} = \beta \frac{\partial^2 b_y}{\partial t^2} \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{\rho}{\sigma B_0^2} \quad \beta = \frac{\mu_0 \rho}{B_0^2}$$

Lorsque  $\sigma = \infty$ , on retombe bien sur l'équation classique de l'onde d'Alfvén, de vitesse  $\frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} = V_A$ .

Ceci étant posé, notre étude comprendra trois parties. Tout d'abord l'établissement des équations aux différences finies équivalentes discrètement à l'équation (1.4), ensuite l'étude de la stabilité du processus numérique correspondant, et, enfin, l'étude numérique d'un exemple physique avec comparaison des cas  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha = 0$ .

II. EQUATIONS AUX DIFFERENCES FINIES

On se propose d'obtenir une approximation au second ordre de l'équation aux dérivées partielles (2.1) détaillées dans le — I —, par la méthode des différences finies.

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 b_y}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial^3 b_y}{\partial z^2 \partial t} = \beta \frac{\partial^2 b_y}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\rho}{\sigma B_0^2} \quad \beta = \frac{\mu_0 \rho}{B_0^2}$$

avec les conditions initiales  $b_y(z, 0) = f(z), \frac{\partial b_y}{\partial t}(z, 0) = g(z)$

Pour cela, on discrétisera les intervalles de variation en  $z$  et  $t$ , en  $n$  et  $p$  parties égales de longueurs respectives :

$$\Delta z = \frac{L}{n} \text{ et } \Delta t = \frac{T}{p}$$

$L$  et  $T$  étant les dimensions où on se restreint pour l'étude numérique.

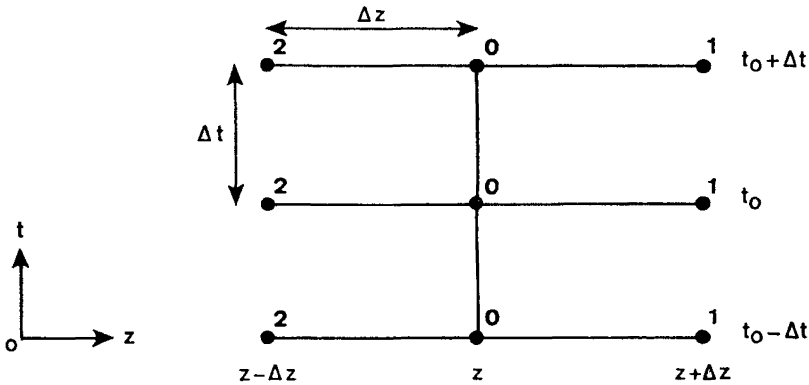


Figure 0

On cherche donc à approcher d'une manière générale la solution du problème en un point d'abscisse  $Z = i\Delta z (1 \leq i \leq n)$  à un instant

$$t_0 = j\Delta t (1 \leq j \leq p)$$

$$U_2^{t_0 + i\Delta t}, \quad U_0^{t_0 + i\Delta t}, \quad U_1^{t_0 + i\Delta t}$$

sont les valeurs de la fonction aux points  $Z - \Delta z, Z, Z + \Delta z$ , aux instants  $t_0 + i\Delta t, i = -1, 0, +1$  (fig. 0).

On développe la fonction  $b_y(z, t)$  solution de (2.1) en série de Taylor, jusqu'à l'ordre 6, autour du point  $(Z, t_0)$ .

Toutes les dérivées seront considérées comme prises au point central 0, à l'instant  $t_0$ . Pour ne pas alourdir davantage les expressions intermédiaires, on n'a pas écrit dans celles-ci, les termes d'ordre supérieur à 4.

Les expressions (2.2), (2.3) et (2.4) donnent respectivement les approximations de  $\frac{\partial^2 b_y}{\partial z^2}(z, t)$  aux instants  $t_0 - \Delta t$ ,  $t_0$ ,  $t_0 + \Delta t$ , (2.5) celle de  $\frac{\partial^2 b_y}{\partial t^2}(z, t)$  pour  $z = Z$ , et (2.6) celle de  $\frac{\partial^3 b_y(z, t)}{\partial t \partial z^2}$

$$(2.2) \quad U_1^{t_0 - \Delta t} + U_2^{t_0 - \Delta t} - 2U_0^{t_0 - \Delta t} \\ = \Delta z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \Delta z^2 \Delta t \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} + \frac{\Delta z^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{\Delta t^2 \Delta z^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2}$$

(où  $U = b_y(z, t)$  dans (2.2) et toutes les expressions suivantes).

$$(2.3) \quad U_1^{t_0} + U_2^{t_0} - 2U_0^{t_0} = \Delta z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\Delta z^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4}$$

$$(2.4) \quad U_1^{t_0 + \Delta t} + U_2^{t_0 + \Delta t} - 2U_0^{t_0 + \Delta t} \\ = \Delta z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \Delta z^2 \Delta t \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} + \frac{\Delta z^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{\Delta t^2 \Delta z^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2}$$

$$(2.5) \quad U_0^{t_0 + \Delta t} + U_0^{t_0 - \Delta t} - 2U_0^{t_0} = \Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$$

$$(2.6) \quad [(U_1^{t_0 + \Delta t} + U_2^{t_0 + \Delta t} - 2U_0^{t_0 + \Delta t}) - (U_1^{t_0 - \Delta t} + U_2^{t_0 - \Delta t} - 2U_0^{t_0 - \Delta t})] \\ = 2\Delta t \Delta z^2 \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} + \frac{\Delta z^4 \Delta t}{6} \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} + \frac{\Delta z^2 \Delta t^3}{3} \frac{\partial^5 u}{\partial z^2 \partial t^3}$$

On effectue une combinaison linéaire de ces 5 équations, de façon à faire apparaître l'équation (2.1) en second membre : (2.2) et (2.4) seront multipliées par  $\theta/\Delta z^2$ , (2.3) par  $(1 - 2\theta)/\Delta z^2$ , (2.5) par  $-\beta/\Delta t^2$ , (2.6) par  $\alpha/2\Delta t \Delta z^2$

$$(2.7) \\ \frac{(1 - 2\theta)}{\Delta z^2} (U_1^{t_0} + U_2^{t_0} - 2U_0^{t_0}) \\ + \frac{\theta}{\Delta z^2} (U_1^{t_0 - \Delta t} + U_2^{t_0 - \Delta t} + U_1^{t_0 + \Delta t} + U_2^{t_0 + \Delta t} - 2U_0^{t_0 - \Delta t} - 2U_0^{t_0 + \Delta t}) \\ + \frac{\alpha}{2\Delta t \Delta z^2} [(U_1^{t_0 + \Delta t} + U_2^{t_0 + \Delta t} - 2U_0^{t_0 + \Delta t}) - (U_1^{t_0 - \Delta t} + U_2^{t_0 - \Delta t} - 2U_0^{t_0 - \Delta t})] \\ - \frac{\beta}{\Delta t^2} (U_0^{t_0 + \Delta t} + U_0^{t_0 - \Delta t} - 2U_0^{t_0}) = \mathcal{E}(\Delta t, \Delta z)$$

où  $\varepsilon(\Delta t, \Delta z)$  est un polynôme qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\Delta t, \Delta z) &= \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta z^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{\Delta t^2}{12} \beta \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \\
 (2.8) \quad &+ \alpha \frac{\Delta z^2}{12} \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} + \alpha \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^5 u}{\partial z^2 \partial t^3} + \Delta t^2 \theta \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\Delta z^4}{360} \frac{\partial^6 u}{\partial z^6} \\
 &- \frac{\Delta t^4 \beta}{360} \frac{\partial^6 u}{\partial t^6} + \frac{\Delta t^2 \Delta z^2 \theta}{12} \frac{\partial^6 u}{\partial z^4 \partial t^2} + \frac{\Delta t^4 \theta}{12} \frac{\partial^6 u}{\partial z^2 \partial t^4} + \frac{\Delta t^4 \alpha}{120} \frac{\partial^7 u}{\partial z^2 \partial t^5} \\
 &+ \frac{\Delta t^2 \Delta z^2 \alpha}{72} \frac{\partial^7 u}{\partial z^4 \partial t^3} + \frac{\Delta z^4 \alpha}{360} \frac{\partial^7 u}{\partial z^6 \partial t}
 \end{aligned}$$

En passant aux valeurs approchées, on peut écrire la formule aux différences finies (2.9) déduite de (2.7)

$$\begin{aligned}
 V_0^{t_0 + \Delta t} \left( 1 + 2\lambda\theta + \frac{\lambda\alpha}{\Delta t} \right) &= (V_1^{t_0 + \Delta t} + V_2^{t_0 + \Delta t}) \left( \lambda\theta + \frac{\lambda\alpha}{2\Delta t} \right) + (V_1^{t_0 - \Delta t} + V_2^{t_0 - \Delta t}) \\
 (2.9) \quad &\left( \lambda\theta - \frac{\lambda\alpha}{2\Delta t} \right) + (V_1^{t_0} + V_2^{t_0}) [\lambda(1 - 2\theta)] + V_0^{t_0 - \Delta t} \left( \frac{\lambda\alpha}{\Delta t} - 2\lambda\theta - 1 \right) \\
 &+ V_0^{t_0} (4\lambda\theta + 2 - 2\lambda) \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{\Delta t^2}{\beta \Delta z^2}
 \end{aligned}$$

Pour calculer le premier niveau de temps :  $t_0 = 0$ , on ne peut appliquer la formule (2.9) : on écrira donc une formule permettant de le calculer.

On conservera (2.3) et (2.4), mais on remplacera (2.2) par (2.10), (2.5) par (2.11) et (2.6) par (2.12) ( $U_{it}$  est la dérivée en  $t$  au point  $i$ ).

$$(2.10) \quad \Delta t (U_{1t}^0 + U_{2t}^0 - 2U_{0t}^0) = \Delta t \Delta z^2 \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} + \frac{\Delta t \Delta z^4}{12} \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t}$$

$$(2.11) \quad U_0^{\Delta t} - U_0^0 - \Delta t U_{0t}^0 = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$$

$$\begin{aligned}
 (2.12) \quad &[(U_1^{\Delta t} + U_2^{\Delta t} - 2U_0^{\Delta t}) - (U_1^0 + U_2^0 - 2U_0^0)] \\
 &= \Delta t \Delta z^2 \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} + \frac{\Delta t^2 \Delta z^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\Delta t \Delta z^4}{12} \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} + \frac{\Delta t^3 \Delta z^2}{6} \frac{\partial^5 u}{\partial z^2 \partial t^3}
 \end{aligned}$$

On effectue une combinaison linéaire en multipliant :

$$(2.3) \text{ par } \frac{(1 - \theta_1)}{\Delta z^2}, \quad (2.2) \text{ par } \frac{\theta_1}{\Delta z^2}, \quad (2.10) \text{ par } \frac{\theta_2}{\Delta z^2}, \quad (2.11) \text{ par } \frac{-2\beta}{\Delta t^2},$$

(2.12) par  $\frac{\alpha}{\Delta t \Delta z^2}$ ; il vient en ajoutant :

(2.13)

$$\frac{\theta_1}{\Delta z^2} (U_1^{\Delta t} + U_2^{\Delta t} - 2U_0^{\Delta t}) + \frac{1 - \theta_1}{\Delta z^2} (U_1^0 + U_2^0 - 2U_0^0) + \frac{\Delta t \theta_2}{\Delta z^2} (U_{1t}^0 + U_{2t}^0 - 2U_{0t}^0) \\ + \frac{\alpha}{\Delta t \Delta z^2} [(U_1^{\Delta t} + U_2^{\Delta t} - 2U_0^{\Delta t}) - (U_1^0 + U_2^0 - 2U_0^0)] - \frac{2\beta}{\Delta t^2} (U_0^{\Delta t} - U_0^{0\text{m}} - \Delta t U_{0t}^0) = \varepsilon(\Delta t, \Delta z)$$

$$(2.14) \quad \varepsilon(\Delta t, \Delta z) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\alpha \partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \\ + \left[ \Delta t (\theta_1 + \theta_2) \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} - \beta \frac{\Delta t}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\alpha \Delta t}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} \right] \\ + \left[ \frac{\Delta z^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{\Delta t^2 \theta_1}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} + \alpha \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^5 u}{\partial z^2 \partial t^3} + \frac{\alpha \Delta z^2}{12} \frac{\partial^5 u}{\partial z^4 \partial t} - \frac{\beta \Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right]$$

En passant aux valeurs approchées, on écrit la formule aux différences finies pour le calcul du premier niveau :

(2.15)

$$V_0^{\Delta t} \left( 2\lambda \theta_1 + \frac{2\lambda \alpha}{\Delta t} + 2 \right) = (V_1^{\Delta t} + V_2^{\Delta t}) \left( \lambda \theta_1 + \frac{\lambda \alpha}{\Delta t} \right) \\ + (V_1^0 + V_2^0) \left[ \lambda (1 - \theta_1) - \frac{\lambda \alpha}{\Delta t} \right] \\ + \Delta t \lambda \theta_2 (V_{1t}^0 + V_{2t}^0) + V_0^0 \left[ \frac{2\lambda \alpha}{\Delta t} - 2\lambda (1 - \theta_1) + 2 \right] \\ + V_{0t}^0 (2\Delta t - 2\Delta t \lambda \theta_2)$$

On va traiter numériquement un problème de conditions initiales dans un domaine indéfini : on ne pourra donc utiliser que des formules explicites qui seront obtenues pour

$$\theta = -\frac{\alpha}{2\Delta t} \quad \text{pour la formule générale}$$

$$\theta_1 = -\frac{\alpha}{\Delta t} \quad \text{pour le calcul du premier niveau.}$$

La formule (2.9) s'écrit alors :

$$(2.16) \quad V_0^{t_0+\Delta t} = (V_1^{t_0} + V_2^{t_0}) \left( \lambda + \frac{\lambda\alpha}{\Delta t} \right) + V_0^{t_0-\Delta t} \left( \frac{2\lambda\alpha}{\Delta t} - 1 \right) \\ - (V_1^{t_0-\Delta t} + V_2^{t_0-\Delta t}) \frac{\lambda\alpha}{\Delta t} + V_0^{t_0} \left( 2 - \frac{2\lambda\alpha}{\Delta t} - 2\lambda \right)$$

et (2.15) :

$$2V_0^{\Delta t} = \lambda(V_1^0 + V_2^0) + (2 - 2\lambda)V_0^0 + \Delta t \lambda \theta_2 (V_{1t}^0 + V_{2t}^0 - 2V_{0t}^0) + 2\Delta t V_0^0$$

On peut constater sur l'expression de  $\xi(\Delta t, \Delta z)$  (2.8) que l'on obtient pour  $\theta$  quelconque une approximation en  $O(\Delta t^2 + \Delta z^2)$  et que pour

$$\theta = \frac{1}{12} \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right)$$

en particulier, on obtient une approximation en  $O(\Delta t^2 + \Delta z^4)$ .

### III. ETUDE DE LA STABILITE DU PROCESSUS NUMERIQUE

On n'insistera pas outre mesure sur cette étude. Rappelons simplement les conclusions de l'article de Douglas (2) : le processus considéré sera stable si les racines  $\rho$  de l'équation :

$$(3.1) \quad \lambda_A \rho^2 + \lambda_B \rho + \lambda_C = 0$$

sont de module inférieur (ou égal pour une racine) à 1. On a ici

$$\lambda_A = K \left( \lambda \theta + \frac{\lambda\alpha}{2\Delta t} \right) - 1$$

$$\lambda_B = K(\lambda(1 - 2\theta)) + 2$$

$$\lambda_C = K \left( \lambda \theta - \frac{\lambda\alpha}{2\Delta t} \right) - 1$$

( $A, B, C$  matrices des systèmes aux différences finies aux niveaux  $t_0 + \Delta t$ ,  $t_0$  et  $t_0 - \Delta t$ )

avec

$$K = -2 \left( 1 - \cos \frac{i\pi}{N} \right) \quad 1 \leq i \leq N-1$$

soit

$$K = -4 \sin^2 \frac{i\pi}{2N}$$



On aboutit alors facilement à la condition  $\left(\lambda = \frac{\Delta t^2}{\beta \Delta z^2}\right)$

$$(3.2) \quad \lambda \leq \frac{-4}{K \left(1 - 4\theta + \frac{\alpha^2}{\Delta t^2}\right)}$$

soit encore :

$$(3.3) \quad \lambda \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{i\pi}{2N} \left(1 - 4\theta + \frac{\alpha^2}{\Delta t^2}\right)}$$

Notons ici que pour  $\alpha = 0$ , on retombe sur la condition de stabilité classique de l'équation des ondes (3).

Dans le cas particulier de la méthode explicite  $\theta = -\frac{\alpha}{2\Delta t}$  la condition de stabilité s'écrit :

$$(3.4) \quad \lambda \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{i\pi}{2N} \left(1 + \frac{\alpha}{\Delta t}\right)^2}$$

en prenant  $\sin^2 \frac{i\pi}{2N}$  majoré par 1 — condition de stabilité forte — ;

$$\lambda = \frac{\Delta t^2}{\beta \Delta z^2} \Rightarrow \Delta t^2 + 2\alpha \Delta t + \alpha^2 - \beta \Delta z^2 \leq 0 :$$

pour qu'on puisse avoir la stabilité, il faudra qu'on ait une racine en  $\Delta t > 0$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \beta \Delta z^2 \text{ doit être } > 0$$

d'où  $\Delta z > \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$ . Si  $\Delta z$  vérifie cette condition.

On aura stabilité pour toute valeur de  $\Delta t$  telle que :

$$(3.5) \quad \Delta t \leq \Delta z \sqrt{\beta} - \alpha$$

— Dans le cas particulier, où on veut avoir de plus :

$$(3.6) \quad \theta = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \Rightarrow \Delta t = \sqrt{3\alpha^2 + \beta \Delta z^2} - 3\alpha$$

$\Delta t$  et  $\Delta z$  sont fixés et uniques. La stabilité aura alors lieu si  $\Delta t \geq \frac{\alpha}{4}$ .

## IV. APPLICATION NUMERIQUE

L'exemple choisi est un plasma indéfini dont les caractéristiques sont celles de la photosphère solaire (1), soit (en M.K.S.).

$$B_0 = 24,96 \times 10^{-4} \text{ Tesla ;}$$

$\rho = 1,67 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^3$ , ce qui correspond à une densité ionique de  $10^{22} \text{ particules/m}^3$ .

$$\mu_0 = 1,257 \times 10^{-6} \text{ Henry/m ;}$$

$$\sigma = 81,5 \text{ Mho/m.}$$

On en déduit :

$$\alpha = 3,3 \times 10^{-2} \text{ s}$$

$$\beta = 3,289 \times 10^{-6} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

$$V_A = \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 549 \text{ m/s}$$

On étudiera trois sortes d'impulsions initiales :

— *une impulsion sinusoïdale*

$$b_y(z, 0) = b_{y0} \cos \frac{\omega z}{V_A}, \quad |z| \leq V_A \times \frac{1}{2} \text{ s}$$

( $\omega$  étant la pulsation)

$$b_y(z, 0) = 0, \quad |z| > V_A \times \frac{1}{2} \text{ s}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t}(z, 0) = 0 \quad \forall z$$

— *une impulsion carrée :*

$$b_y(z, 0) = b_{y0}, \quad |z| \leq V_A \times \frac{1}{2} \text{ s}$$

$$b_y(z, 0) = 0, \quad |z| > V_A \times \frac{1}{2} \text{ s}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t}(z, 0) = 0 \quad \forall z$$

— *une impulsion « pointue » :*

$$b_y(z, 0) = b_{y0} \left( 1 - \frac{2}{V_A} |z| \right), \quad |z| \leq V_A \times \frac{1}{2} \text{ s}$$

$$b_y(z, 0) = 0, \quad |z| > V_A \times \frac{1}{2} \text{ s}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t}(z, 0) = 0 \quad \forall z$$

La perturbation  $b_{y0}$  maximum est égale à l'amplitude de l'induction magnétique correspondant aux granulations solaires : environ  $3 \times 10^{-2}$  Tesla (on notera qu'elle est nettement supérieure au champ  $B_0$ ).

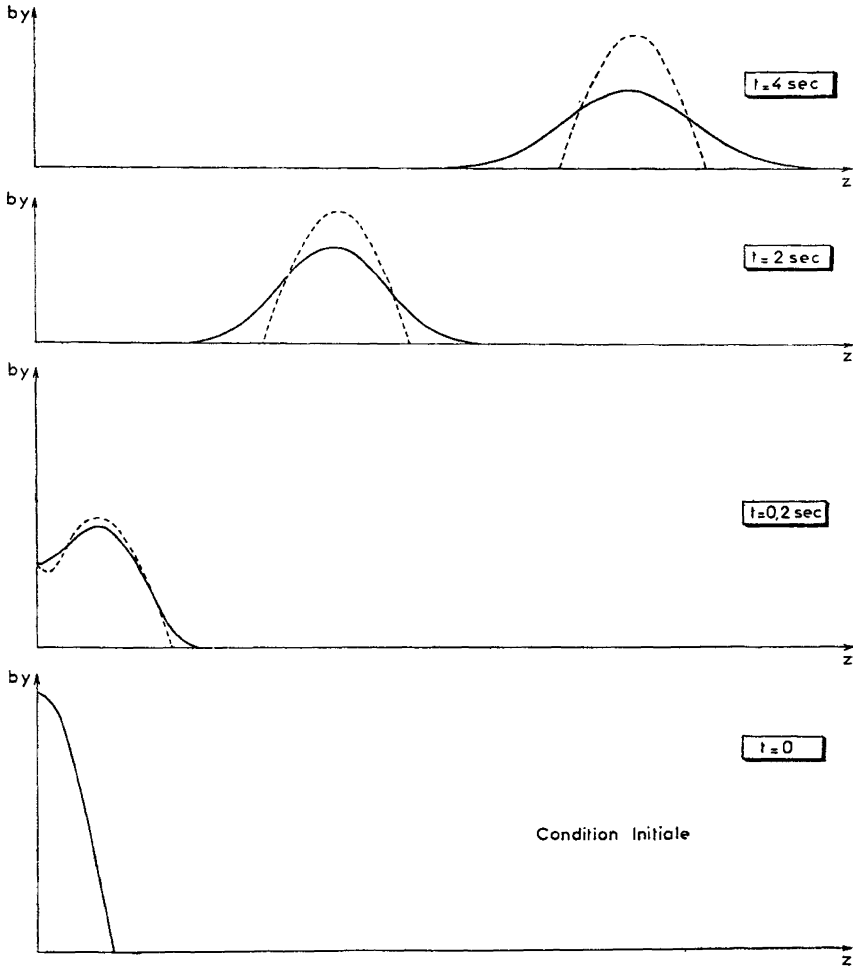


Figure 1

La solution du problème est alors entièrement définie dans le domaine de dépendance des conditions initiales. Au point de vue numérique, nous étudierons un domaine de longueur totale 8 784 m dans le sens des  $z$ , avec un pas  $\Delta z = 54,9$  m pendant l'intervalle de temps  $T = 6,624$  s, avec un pas  $\Delta t = 4,14 \times 10^{-2}$  s, donné par (3.6), ce qui correspond à la meilleure approximation dans le cas  $\alpha \neq 0$ , soit  $\theta = \frac{1}{12} - \frac{1}{12\lambda}$  et  $\mathcal{E}(\Delta z, \Delta t) = O(\Delta t^2) + O(\Delta z^4)$ .

La largeur de l'impulsion initiale est 549 m (ce qui implique  $\omega = \pi$  dans le cas sinusoïdal) et si on la situe au centre du domaine d'observation, on peut se restreindre, pour les calculs et par raison de symétrie, à la moitié de ce

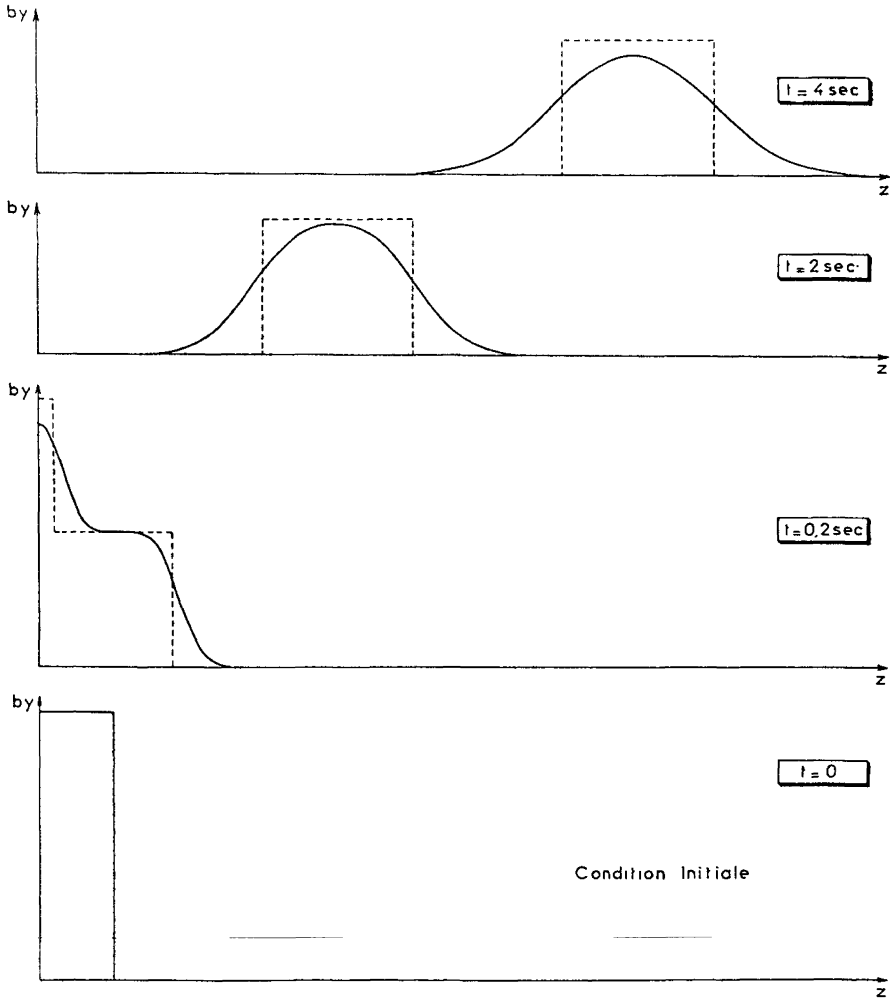


Figure 2

domaine dans le sens des  $z$ . Les figures 1, 2 et 3 (correspondant respectivement aux trois impulsions initiales choisies) donnent l'aspect du phénomène de propagation à quatre instants successifs considérés comme caractéristiques. Les courbes en pointillés et en traits pleins correspondent respectivement aux cas  $\alpha = 0$  et  $\alpha \neq 0$ .

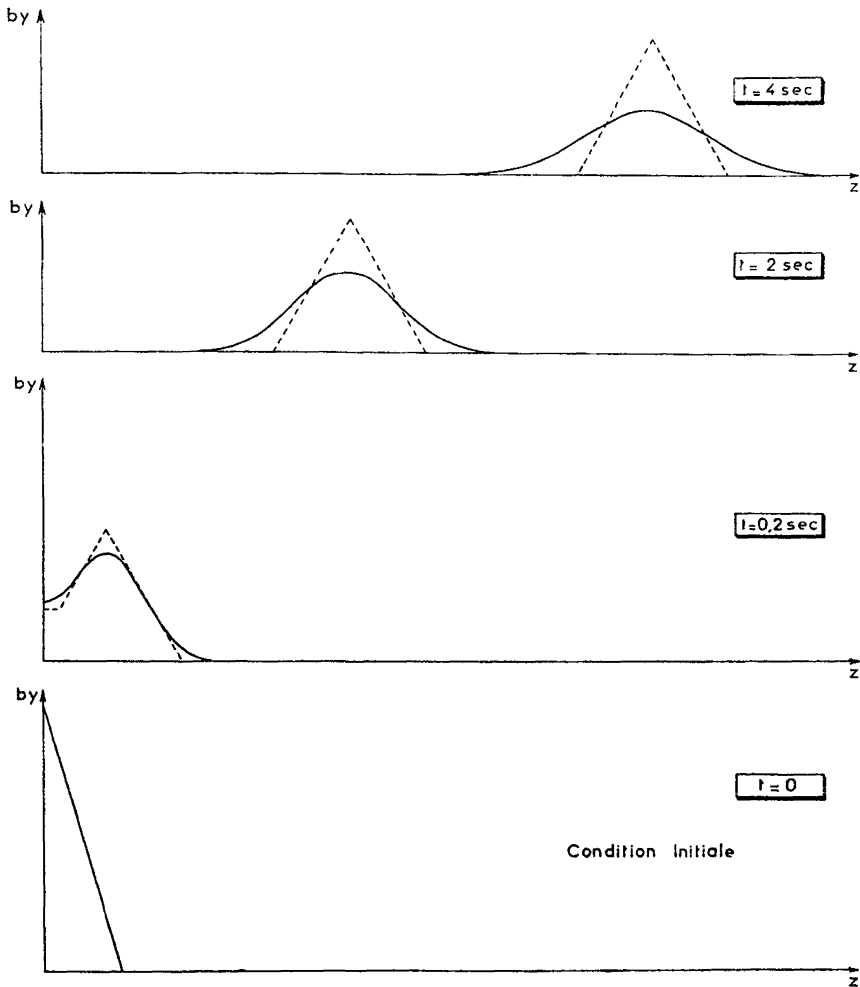


Figure 3

## V. CONCLUSION

On n'a pas abordé ici les problèmes de conditions aux limites, celles-ci étant encore trop controversées en Physique des Plasmas pour donner objet à une étude satisfaisante des phénomènes. Le principal intérêt de cette étude, à notre avis, est la mise en évidence dans un cadre numérique général, de l'important phénomène de diffusion du champ magnétique à travers le plasma dans le cas de conductivité finie et constante.

Nous tenons à exprimer ici notre gratitude envers M. le Professeur E. Durand, Directeur de l'Institut de Calcul Numérique de Toulouse, qui dirige nos travaux, et M. le Professeur Thibault, du Laboratoire de Mathématiques, pour leur aide amicale et leurs conseils précieux.

Les calculs ont été effectués sur l'Ordinateur IBM 7044 de l'Institut de Calcul Numérique.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. ALFVEN, *Cosmical Electrodynamics*, Clarendon Press, Oxford (1950).
- [2] J. DOUGLAS, « On the relation between stability and convergence in the numerical solution of linear parabolic and hyperbolic differential equations », *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 4 (1956).
- [3] O'BRIEN, HYMAN et KAPLAN, « A study of the numerical solution of partial differential equations », *J. Math. Phys.*, 29 (1951).