REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE, SÉRIE ROUGE

C. LENORMAND
J. F. PERROT

Note sur le théorème des demi-degrés

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge, tome 4, n° 2 (1970), p. 29-31.

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_2_29_0>

R.I.R.O.
4e année, R-2, 1970, p. 29-31)

NOTE SUR LE THEOREME DES DEMI-DEGRES *

par C. LENORMAND (1) et J. F. PERROT (2)

Résumé. — *On fournit une démonstration directe du théorème des demi-degrés donnant naturellement naissance à un algorithme permettant de construire, si c'est possible, un graphe admettant un système de demi-degrés donné.*

On sait que la famille des demi-degrés d'un graphe satisfait à certaines conditions (théorème des demi-degrés, cf. infra). Le problème se pose donc de décider si une famille d'entiers donnés constitue le système des demi-degrés d'un graphe, en d'autres termes, si elle est réalisable comme système des demi-degrés d'un graphe, et, dans l'affirmative, soit d'exhiber un tel graphe, soit de les construire tous d'une manière systématique.

Le théorème des demi-degrés (Berge [1], p. 85) s'énonce comme suit :

Deux suites $\underline{r} = (r_i)_{i=1}^{i=n}$ et $\underline{s} = (s_j)_{j=1}^{j=n}$ de n entiers positifs ou nuls constituent le système des demi-degrés d'un graphe à n sommets si et seulement si la suite $\underline{d}$, duale de la suite $\underline{r}$ ($d_k = \text{card}\,(\{ i\ ;\ r_i \geqslant k \})$) et la suite $\underline{t}$ obtenue en rangeant les éléments de $\underline{s}$ en ordre décroissant vérifient les conditions :

— pour tout entier q, $1 \leqslant q < n$, on a $d_1 + d_2 + \dots + d_q \geqslant t_1 + t_2 + \dots + t_q$;

— $d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1} + d_n = t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} + t_n$.

Berge l'obtient comme cas particulier d'un résultat plus général qu'il établit en faisant appel à la théorie des réseaux de transport. Nous nous proposons d'en donner une démonstration élémentaire d'où se déduit immédiatement un algorithme simple permettant d'exhiber un graphe, s'il en existe, admettant un système de demi-degrés donné, en utilisant une méthode déjà mise en œuvre par Hakimi [2] dans un problème analogue.

(*) Cette étude a été effectuée dans le cadre de la Convention de Recherche DGRST 65 FR 002 (cf. [4]).

(1) Centre Universitaire Expérimental de Vincennes, Département d'Informatique.
(2) Faculté des Sciences de Paris, Institut de Programmation.

Soit m la quantité $s_1 + s_2 + ... + s_n$: nous procédons par récurrence sur m.

Le résultat est trivial pour $m = 0$; supposons-le donc vrai pour tout $m \leqslant M$ et soit $m = M + 1$.

Les conditions du théorème sont nécessaires, car si G est un graphe admettant $\underline{r}$ et $\underline{s}$ comme système de demi-degrés, m est le nombre d'arcs de G; comme par hypothèse $m \geqslant 1$, il existe, dans G, p sommets ayant un demi-degré intérieur positif, ($p > 0$); soit donc x un sommet de G ayant un demi-degré intérieur positif minimum, a un arc admettant x pour extrémité terminale, et G' le graphe partiel de G obtenu en supprimant l'arc a; si $\underline{r}'$ et $\underline{s}'$ constituent le système de demi-degrés de G', on a $t'_i = t_i$ pour $i \neq p$, $t'_p = t_p - 1$ et si k est le demi-degré extérieur de l'extrémité initiale de l'arc a, $d'_j = d_j$ pour $j \neq k$, $d'_k = d_k - 1$.

Or k ne peut excéder p, puisque G est un 1-graphe, et il suffit de reporter les valeurs précédentes dans les relations obtenues en appliquant l'hypothèse de récurrence à G' pour en tirer les mêmes relations pour G.

Les conditions sont aussi suffisantes : soit s_h un élément maximal de $\underline{s}$, et soient $r_{i_1}, r_{i_2}, ..., r_{i_{sh}}$ les s_h plus grands éléments de $\underline{r}$; considérons $\underline{r}'$ et $\underline{s}'$ déduites de $\underline{r}$ et $\underline{s}$:

$$r'_i = r_i \text{ pour } i \notin \{ i_1, ..., i_{sh} \} \text{ et } r'_i = r_i - 1 \text{ pour } i \in \{ i_1, ..., i_{sh} \} ;$$

$$s'_j = s_j \text{ pour } j \neq h,\ s'_h = 0.$$

On en tire, avec $t_1 = s_h$,

$$t'_1 + ... + t'_q = t_1 + ... + t_q - t_1 \text{ et } d'_1 + ... + d'_q \geqslant d_1 + ... + d_q - t_1,$$

de sorte que l'hypothèse de récurrence s'applique à $\underline{r}'$ et $\underline{s}'$ (car $m \geqslant 1$ entraîne $s_h \geqslant 1$, donc $m' \leqslant M$) pour donner un graphe G' dont le sommet h a un demi-degré intérieur nul : pour obtenir un graphe G solution du problème, il suffit d'adjoindre à G' les s_h arcs (i_l, h), $l = 1, 2, ..., s_h$.

Le théorème est donc complètement démontré.

S'il s'agit de construire effectivement G, on commencera par placer les s_h arcs en question, i.e. le complémentaire dans G du graphe partiel G', puis on construira G', qui a moins d'arcs que G. L'algorithme de construction consiste donc, à chaque pas, en la saturation d'un sommet de demi-degré intérieur maximal par des arcs issus des sommets de plus grands demi-degrés extérieurs.

Cet algorithme est manifestement rapide, mais il ne donne qu'un seul graphe réalisant la famille d'entiers donnée. Pour les obtenir tous, on procède par description d'aborescence (back-tracking).

Cette méthode permet en outre de construire des graphes satisfaisant une contrainte supplémentaire quelconque : par exemple, on peut énumérer tous les graphes sans boucle, s'il en existe, admettant le système de demi-degrés donné, ou encore tous les graphes non orientés (i.e. symétriques) sans boucle admettant un système de degrés donné.

A ce sujet, il convient de formuler deux réserves :

D'abord il faut distinguer entre graphe étiqueté et graphe « abstrait » : les procédures précédentes énumèrent des graphes étiquetés. Il serait vain de vouloir énumérer sans répétition les graphes abstraits correspondants, le problème de décider de l'isomorphie de deux graphes n'ayant pas reçu jusqu'ici de solution générale satisfaisante.

Ensuite, le nombre de graphes (étiquetés ou non) admettant un système de demi-degrés donné peut être très élevé, ce qui rend illusoire leur énumération en machine. Dans le cas des graphes non orientés, on peut donner des formules qui permettent d'évaluer le nombre de graphes en question (Netto [3], chap. 15) par exemple, le nombre de graphes cubiques à 10 sommets (non orientés) est de l'ordre de 11 millions.

Un certain nombre de procédures ALGOL utilisant l'algorithme précédent ainsi que les techniques de développement d'aborescence évoquées ci-dessus ont été écrites en 1967 [4] pour la calculatrice C.D.C. 3600 du C.N.R.S. (Institut Blaise Pascal).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERGE (C.). *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1963.

[2] HAKIMI (S. L.). « On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph », I. *SIAM Journal*, 10 (1968), 496-506; II. *idem*, 11 (1963), 135-147.

[3] NETTO (E.). *Lehrbuch der Kombinatorik* (1927) repr. Chelsea.

[4] Rapport final de la Convention de Recherche DGRST 65 FR 002, dit « Contrat Graphes ». Polycopié, Institut de Programmation, Faculté des Sciences de Paris. (1967).