

MARC ATTEIA

**Fonctions «spline» et noyaux reproduisants
d'Aronszajn-Bergman**

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge, tome 4, n^o 3 (1970), p. 31-43.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_3_31_0

© AFCET, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS « SPLINE » ET NOYAUX REPRODUISANTS D'ARONSZAJN-BERGMAN

par Marc ATTEIA (1)

Résumé. — *Les travaux récents sur les fonctions « spline » associent ces fonctions au noyau d'un opérateur linéaire et continu d'un espace de Hilbert X dans un espace de Hilbert Y .*

On montre dans cet article comment, plus généralement, on peut associer une fonction « spline » à un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique localement convexe.

Cette généralisation permet de mettre en évidence le lien qui existe entre les fonctions « spline » et les noyaux d'Aronszajn-Bergman.

0. SOUS-ESPACES HILBERTIENS D'ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES. NOYAUX REPRODUISANTS

Toutes les définitions et les propositions de ce paragraphe sont contenues dans un article de L. Schwartz [4].

a) *Espaces et anti-espaces*

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe, séparé sur \mathbb{C} .

Définition : On dira qu'un espace vectoriel topologique localement convexe F est un *anti-espace* de E , s'il existe un anti-isomorphisme de E sur F .

A un isomorphisme près, il n'existe donc qu'un seul anti-espace de E .

Notations : On notera \bar{E} un anti-espace de E .

L'anti-isomorphisme de E sur \bar{E} qu'on appelle généralement conjugaison sera noté : $e \mapsto \bar{e}$.

E est un anti-espace de \bar{E} pour l'anti-isomorphisme réciproque : $\bar{e} \mapsto e$.

(1) Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Toulouse.

EXEMPLE : Notons : $e \rightarrow \lambda e$ la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbf{C}$ qui est définie sur E .

Laissant inchangées, la structure de groupe additif et la topologie initiale de E , remplaçons le produit : $e \rightarrow \lambda e$ par le produit $e \rightarrow \lambda \times e$ tel que : $\lambda \times e = \bar{\lambda}e \quad \lambda \in \mathbf{C}$.

On obtient ainsi un nouvel espace vectoriel qui est un anti-espace de E .

b) *Dual d'un anti-espace*

Soit \bar{E} un anti-espace de E , et E' le dual de E .

On notera $\langle e, e' \rangle$ le produit scalaire canonique de $e \in E$ par $e' \in E'$.

Quel que soit $e' \in E'$, l'application : $\bar{\varphi}_{e'} : \bar{e} \mapsto \langle \bar{e}, e' \rangle$ (resp. $\varphi_e : e \mapsto \langle e', e \rangle$) est une forme linéaire et continue sur \bar{E} (resp. sur E).

Si on note u l'anti-isomorphisme de E sur \bar{E} : $\varphi_e = \bar{\varphi}_{e'} \circ u$. Notons \bar{e}' l'élément du dual \bar{E}' de \bar{E} , défini par $\bar{\varphi}_{e'}$.

L'application : $e' \mapsto \bar{e}'$ est un anti-isomorphisme de E' sur \bar{E}' . \bar{E}' est donc un anti-espace de E' et on a la règle :

$$\bar{E}' = \overline{E'} \quad \text{avec} \quad \langle \bar{e}', \bar{e} \rangle = \langle e', e \rangle.$$

c) *Sous-espaces hilbertiens*

Définition :

On appelle sous-espace hilbertien de E , E quasi-complet, un sous-espace vectoriel de E muni d'une structure hilbertienne pour laquelle son injection naturelle dans E est continue.

Notation : Si \mathcal{H} est un sous-espace hilbertien de E , on notera : $(x, y) \rightarrow (x|y)_{\mathcal{H}}$, la forme hermitienne définie positive sur \mathcal{H} qui est linéaire en x et anti-linéaire en y .

REMARQUE : On sait qu'à toute forme linéaire et continue sur \mathcal{H} $k : h \rightarrow k(h)$, on peut faire correspondre un élément $k \in \mathcal{H}$ tel que : $k(h) = (h|k)_{\mathcal{H}}$ et réciproquement.

De plus $(h|k)_{\mathcal{H}}$ étant anti-linéaire en k , il existe un anti-isomorphisme de \mathcal{H} sur \mathcal{H}' . Ainsi \mathcal{H}' est un anti-espace de \mathcal{H} et \mathcal{H}' est isomorphe à \mathcal{H} .

d) *Noyau d'un sous-espace hilbertien*

Définition : Soit \mathcal{H} un sous-espace hilbertien de E , j son injection dans E . Alors l'application adjointe j^* de j , est une application faiblement continue de \bar{E}' dans $\bar{\mathcal{H}}'$.

Si θ est l'isomorphisme canonique de $\bar{\mathcal{H}}'$ sur \mathcal{H} alors $H = j \circ \theta \circ j^*$ est une application linéaire continue de \bar{E}' muni de la topologie $\sigma(\bar{E}', \bar{E})$ dans E muni de la topologie $\sigma(E, E')$.

Nous dirons que H est le *noyau* associé à \mathcal{H} ou simplement le noyau de \mathcal{H} . On a le schéma suivant :

$$\bar{E}' \xrightarrow{j^*} \bar{\mathcal{H}}' \xrightarrow{\theta} \mathcal{H} \xrightarrow{j} E$$

On montre aussi que H est fortement continu de \bar{E}' dans E et que $\theta \circ j^*$ est fortement continu de \bar{E}' dans \mathcal{H} .

Dans la suite nous confondrons H et $\theta \circ j^*$.

Proposition : Le noyau H de \mathcal{H} est l'unique application de \bar{E}' dans \mathcal{H} telle que :

$$\text{quels que soient } e' \in E' \text{ et } h \in \mathcal{H} \text{ on ait } (h | H\bar{e}')_{\mathcal{H}} = \langle h, e' \rangle.$$

En particulier, quels que soient $e' \in E'$ et $f' \in E'$ on a :

$$(H\bar{f}' | H\bar{e}')_{\mathcal{H}} = \langle H\bar{f}', e' \rangle, \text{ donc : } \| H\bar{e}' \|^2_{\mathcal{H}} = \langle H\bar{e}', e' \rangle \geq 0.$$

On dira que H est un *noyau positif*.

L. Schwartz a montré qu'il existe une bijection entre l'ensemble des sous-espaces hilbertiens de E et l'ensemble des noyaux positifs de E c'est-à-dire des applications H de \bar{E}' dans E telles que : $\langle H\bar{e}', e' \rangle \geq 0$ quel que soit $e' \in E'$.

Proposition : Soit \mathcal{H} un sous-espace hilbertien de E , et soit $(e_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne de \mathcal{H} . Alors le noyau de \mathcal{H} est $\sum_{i \in I} e_i \otimes \bar{e}_i$, cette série étant sommable dans $\mathcal{L}_s(\bar{E}', E)$.

e) *Noyaux reproduisants d'Aronszajn-Bergman*

Soit X un ensemble, et $E = C^X$, l'espace des fonctions complexes sur X , muni de la topologie de la convergence simple.

Le dual $E' = (C^X)'$ est l'espace des mesures à support fini sur X .

De telles mesures sont de la forme : $\mu = \sum_{x \in X} c_x \delta_x$ où δ_x est la mesure de Dirac du point x et où les coefficients $c_x \in C$ sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

$$\text{Ainsi pour } f \in C^X : \langle \mu, f \rangle = \sum_x c_x f(x).$$

Proposition : Il existe un isomorphisme entre l'ensemble $\mathcal{H}(C^X)$ des sous-espaces hilbertiens de C^X et le cône convexe saillant de $C^{X \times X}$ formé des fonctions de type positif c'est-à-dire telles que : $\sum_{x, \xi} c_x \bar{c}_\xi A(x, \xi) \geq 0$ — un nombre fini de coefficients $c_x, \bar{c}_\xi \in C$ étant non nuls.

La fonction A sur $X \times X$ associée au sous-espace hilbertien \mathcal{H} de \mathbb{C}^X est caractérisée par la condition :

$$\text{quels que soient } h \in \mathcal{H} \text{ et } x \in X : (h | A(, x))_{\mathcal{H}} = h(x).$$

En particulier :

$$\begin{aligned} \text{quels que soient } x \in X \text{ et } \xi \in X : (A(, \xi) | A(, x))_{\mathcal{H}} &= A(x, \xi) \text{ et} \\ \| A(, x) \|_{\mathcal{H}}^2 &= A(x, x). \end{aligned}$$

$$\text{De plus : } | h(x) | \leq \| h \|_{\mathcal{H}} (A(x, x))^{\frac{1}{2}}.$$

1. FONCTIONS SPLINE. LISSAGE

a) Soit E , un espace vectoriel topologique séparé quasi-complet défini sur \mathbb{C} et N un sous-espace vectoriel fermé dans E .

Notons F l'ensemble quotient E/N et φ la surjection canonique de E sur F .

Nous supposons dans la suite que F est muni de la topologie quotient. Ainsi tout ouvert Ω de F est tel que $\varphi^{-1}(\Omega)$ soit un ouvert de E . E étant séparé, et N étant fermé, F est séparé.

b) Soit G un ensemble convexe fermé non vide de E . Notons M_1 l'adhérence dans E de la variété affine engendrée par G .

Soit M le sous-espace vectoriel déduit de M_1 par translation.

Nous supposons dans la suite que M est muni de la topologie induite par celle de E .

Définition 1 : A étant un ensemble convexe fermé non vide de E , on appelle *cône asymptote* de A , l'ensemble $A_\infty = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda(A - a)$, $a \in A$.

Théorème 0 : (cf. [3]). Soient E un espace vectoriel topologique séparé défini sur \mathbb{R} , A et B deux ensembles convexes fermés non vides dans E .

On suppose A localement compact et $A_\infty \cap B_\infty = \theta_E$.

Dans ces conditions, $B-A$ est fermé dans E .

Hypothèses :

$$h_1) G \cap N = \Phi$$

$$h_2) G_\infty \cap N = \theta_E \text{ (}\theta_E \text{ élément neutre de } E\text{)}$$

$$h_3) E \text{ est métrisable, } M + N \text{ est fermé dans } E \text{ et } \dim(M \cap N) < +\infty$$

$$h'_3) G \text{ est localement compact dans } E \text{ ou } \dim N < +\infty.$$

Lemme : $\tilde{G} = \varphi(\tilde{G})$ est fermé dans F ssi $G + N$ est fermé dans E .

Preuve : $G + N = \bar{\varphi}^1(\tilde{G})$. Or on sait que \tilde{G} est fermé dans F ssi $\bar{\varphi}^1(\tilde{G})$ est fermé dans E .

Théorème 1 : Si les hypothèses h_1, h_2 et l'une des hypothèses h_3 ou h_3' , sont vérifiées alors \tilde{G} est fermé dans F .

Preuve :

(i) Supposons h_1, h_2, h_3' , vérifiées.

Comme G (resp. N) est localement compact convexe fermé, comme N (resp. G) est convexe fermé et comme $G_\infty \cap N = \theta_E$, on déduit du théorème 0 que $G + N$ est fermé.

(ii) Supposons h_1, h_2, h_3 vérifiées.

Notons H le translaté de G , dans la translation qui transforme M_1 en M . Pour que \tilde{G} soit fermé dans F , il faut et il suffit que $\varphi(H)$ soit fermé dans F .

Notons Ψ la restriction de φ à M . Comme E est métrisable, \tilde{G} sera fermé dans F ssi $\Psi(H)$ est fermé dans F , ou encore ssi $H + (M \cap N)$ est fermé dans M .

Or G étant fermé dans E il en est de même de H .

De plus $M \cap N$ est localement compact dans M puisque $\dim(M \cap N) < +\infty$.

Du théorème 0, il résulte que $H + (M \cap N)$ est fermé dans M , donc que \tilde{G} est fermé dans F .

c) Soit \mathcal{H} un sous-espace hilbertien de F .

Nous noterons $(\cdot|\cdot)_{\mathcal{H}}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ respectivement le produit scalaire et la norme sur \mathcal{H} .

Posons $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{H} \cap \tilde{G}$.

Proposition : \tilde{G} est fermé dans \mathcal{H} .

Preuve : Notons \mathcal{T}_1 la topologie de \mathcal{H} induite par celle de F et \mathcal{T}_2 la topologie de \mathcal{H} liée à sa structure hilbertienne.

Puisque l'injection naturelle de \mathcal{H} dans F est continue, \mathcal{T}_2 est plus fine que \mathcal{T}_1 .

Notons $\bar{\mathcal{C}}_1$ (resp. $\bar{\mathcal{C}}_2$) l'adhérence de $\tilde{\mathcal{C}}$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{T}_1)$ (resp. $\mathcal{H}(\mathcal{T}_2)$).

On sait que $\bar{\mathcal{C}}_1 \supset \bar{\mathcal{C}}_2 \supset \tilde{\mathcal{C}}$. Or $\tilde{\mathcal{C}} \subset \tilde{G}$ puisque \tilde{G} est fermé dans F .

Donc $\bar{\mathcal{C}}_2 \subset \tilde{G}$ et puisque $\bar{\mathcal{C}}_2 \subset \mathcal{H}$ on en déduit que :

$$\bar{\mathcal{C}}_2 \cap \tilde{G} \subset \tilde{G} \cap \mathcal{H} = \tilde{\mathcal{C}} \text{ c'est-à-dire que } \bar{\mathcal{C}}_2 = \tilde{\mathcal{C}}.$$

Ainsi $\tilde{\mathcal{C}}$ est fermé dans \mathcal{H} .

d) Notons $\tilde{\sigma}$ l'élément de $\tilde{\mathcal{C}}$ à plus courte distance de $\theta_{\mathcal{H}}$, élément neutre de \mathcal{H} .

Définition : On appellera fonction « spline » (f.s.) relativement à N et G , tout représentant de la classe $\tilde{\sigma}$ qui est un élément de G .

Si σ est un tel élément, on dira qu'il réalise un *lissage* des éléments de G .

Supposons que N admette un supplémentaire topologique L dans E .

Soit $\mathcal{K} = \{ u \in L : \varphi(u) \in \mathcal{J} \}$ ($\mathcal{K} \neq \Phi$ car $\theta_E \in \mathcal{K}$).

L'application $(u, v) \rightarrow (\varphi(u) | \varphi(v))_{\mathcal{J}}$ est une forme hermitienne définie positive sur \mathcal{K} .

Il est facile de vérifier que :

(i) \mathcal{K} muni du produit scalaire $(u|v)_{\mathcal{K}} = (\varphi(u) | \varphi(v))_{\mathcal{J}}$ est un sous-espace hilbertien de L donc de E .

(ii) La restriction de φ à \mathcal{K} est une isométrie de \mathcal{K} sur \mathcal{J} . Notons ψ cette restriction. Posons $G_{\mathcal{K}} = \psi^{-1}(\tilde{C})$.

$G_{\mathcal{K}}$ est fermé dans \mathcal{K} puisque \tilde{C} est fermé dans \mathcal{J} .

Ainsi un représentant de la classe $\tilde{\sigma}$ sera de la forme :

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{\mathcal{K}} \quad \sigma_N \in N \quad \sigma_{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$$

$\sigma_{\mathcal{K}}$ est l'élément *unique* de \mathcal{K} tel que : $(\sigma_{\mathcal{K}} | \sigma_{\mathcal{K}} - g_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}} \leq 0$ quel que soit $g_{\mathcal{K}} \in G_{\mathcal{K}}$.

2. APPLICATIONS

1^{er} Problème

α) Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^2 borné et étoilé. Supposons que sa frontière $\partial\Omega$ soit une courbe régulière dont aucun point n'est intérieur à la fermeture de Ω .

Soit E l'ensemble des fonctions réelles définies sur Ω , muni de la topologie de la convergence simple. E est séparé et complet.

Nous noterons dans la suite : $t = (t_1, t_2)$ un point de Ω et

$$t \mapsto u(t) = u(t_1, t_2)$$

une fonction réelle définie sur Ω .

Soit N le sous-espace vectoriel fermé de E engendré par les fonctions : $t \mapsto 1, t \mapsto t_1, t \mapsto t_2$. $F = E/N$ est séparé. (Soit φ l'homomorphisme canonique de E sur F .)

Considérons n points distincts de Ω dont 3 ne sont pas alignés t^1, \dots, t^n et :

$$G = \{ u \in E : u(t^i) = \alpha_i \quad 1 \leq i \leq n \}.$$

Nous supposerons que :

(i) les nombres α_i sont tels que $G \cap N = \Phi$

(ii) $n \geq 3$.

De cette dernière hypothèse, on déduit immédiatement que $G_\infty \cap N = \theta_E$ car $G_\infty = \{ u \in E : u(t) = 0 \quad 1 \leq i \leq n \}$.

Comme $\dim(N) < +\infty$, l'hypothèse, h_3 du paragraphe 2 est vérifiée.

β) Notons \mathcal{U} le sous-espace vectoriel de E , formé des (classes de) fonctions définies et continues sur Ω , dont les dérivées du 1^{er} et du 2^e ordre, au sens des distributions sont des éléments de $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

$\mathcal{K} = \varphi(\mathcal{U})$ est un sous-espace vectoriel de $F = E/N$.

Considérons la forme bilinéaire sur \mathcal{U} :

$$J(u, v) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t_2^2} \right) d\omega(t)$$

Quels que soient $\tilde{u} \in u$ et $v \in \tilde{v}$, $J(u, v)$ garde la même valeur.

Ainsi, l'application : $(\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto (\tilde{u} | \tilde{v})_{\mathcal{K}} = J(u, v)$ définit-elle une forme bilinéaire définie positive sur \mathcal{K} , et l'application :

$$\tilde{u} \mapsto \| \tilde{u} \|_{\mathcal{K}} = \sqrt{(\tilde{u} | \tilde{u})_{\mathcal{K}}} \text{ est une norme sur } \mathcal{K}.$$

De plus \mathcal{K} est séparable puisque, \mathcal{U} est séparable.

Proposition : \mathcal{K} est complet.

Preuve : Considérons une suite de Cauchy (\tilde{u}_n) dans \mathcal{K} .

A chaque élément \tilde{u}_n , associons un représentant de cette classe que nous noterons u_n .

La suite $\frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1^2}$ (resp. $\frac{\partial^2 u_n}{\partial t_1 \partial t_2}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial t_2^2}$) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Elle converge donc dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ vers l'élément v_{20} (resp. v_{11}, v_{02}).

Comme l'application $T : u \rightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \right)$ de \mathcal{U} dans $[\mathcal{L}^2(\Omega)]^3$ est surjective [cf. 1], il existe un élément $v \in \mathcal{U}$ tel que :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} = v_{20} \left(\text{ resp. } \frac{\partial^2 v}{\partial t_1 \partial t_2} = v_{11}, \frac{\partial^2 v}{\partial t_2^2} = v_{02} \right)$$

On en déduit que la suite (\tilde{u}_n) converge vers $\tilde{v} = \varphi(v)$ dans \mathcal{K} ; ainsi \mathcal{K} est complet.

Du théorème de Sobolev [5], il résulte facilement que l'injection de \mathcal{K} dans F est continue.

γ) Nous savons que le dual E' de E est l'espace des mesures de la forme : $\rho = \sum_{i \in \Omega} c_i \delta_i, c_i \in \mathbb{R}, \delta_i$, mesure de Dirac au point i .

Caractérisons $\tilde{C} = \mathcal{H} \cap \tilde{G}$ où $\tilde{G} = \psi(G)$.

Remarquons tout d'abord qu'il est possible de déterminer $(n-3)$ éléments linéairement indépendants de E' :

$$\rho_j = c_0^j \delta_{j,j} + c_1^j \delta_{j,j+1} + c_2^j \delta_{j,j+2} + c_3^j \delta_{j,j+3} \quad 1 \leq j \leq n-3$$

tels que :

$$\langle \rho_j, 1 \rangle = \langle \rho_j, t_1 \rangle = \langle \rho_j, t_2 \rangle = 0 \quad 1 \leq j \leq n-3$$

L'application $\tilde{u} \rightarrow \langle \rho_j, u \rangle$ de \mathcal{H} dans \mathbf{R} , est une fonctionnelle linéaire et continue. Il existe donc un élément $\tilde{\rho}_j$ de \mathcal{H}' , dual de \mathcal{H} , tel que :

$$\langle \rho_j, u \rangle = (\tilde{\rho}_j | \tilde{u})_{\mathcal{H}} \quad 1 \leq j \leq n-3.$$

Les éléments $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_{n-3}$ sont linéairement indépendants.

Posons :

$$\beta_j = c_0^j \alpha_j + c_1^j \alpha_{j+1} + c_2^j \alpha_{j+2} + c_3^j \alpha_{j+3} \quad 1 \leq j \leq n-3.$$

Quel que soit $\tilde{u} \in \tilde{C} : (\tilde{\rho}_j | u)_{\mathcal{H}} = \langle \rho_j, u \rangle = \beta_j$

Inversement, quel que soit $\tilde{u} \in \mathcal{H}$ tel que :

$(\tilde{\rho}_j | \tilde{u})_{\mathcal{H}} = \beta_j \quad 1 \leq j \leq n-3$, on peut trouver un élément $u \in \tilde{u}$ tel que $u \in G \cap \mathcal{U}$ donc $\tilde{u} \in \tilde{C}$.

Il en résulte que $\tilde{C} = \{ \tilde{u} \in \mathcal{H} : (\tilde{\rho}_j | \tilde{u})_{\mathcal{H}} = \beta_j \quad 1 \leq j \leq n-3 \}$ et que :

$$\tilde{\sigma} = \sum_{j=1}^{n-3} a_j \tilde{\rho}_j \quad (\text{si on identifie } \mathcal{H}' \text{ et } \mathcal{H}).$$

Supposons que nous sachions déterminer un sous-espace vectoriel \mathcal{K} de \mathcal{U} qui possède les propriétés suivantes :

(i) \mathcal{K} est un sous-espace hilbertien de E de noyau $K(t, \theta)$

(ii) $(u | v)_{\mathcal{K}} = J(u, v)$.

Les fonctions « spline » relatives à G, N et \mathcal{K} sont de la forme :

$$\sigma(t) = p(t) + \sum_{j=1}^{n-3} a_j (\rho_j(\theta) | K(t, \theta))_{\mathcal{K}} \quad p \in N$$

c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(t) = p(t) + \sum_{j=1}^{n-3} a_j [c_0^j K(t, t^j) + c_1^j K(t, t^{j+1}) + c_2^j K(t, t^{j+2}) + c_3^j K(t, t^{j+3})] \\ p \in N \end{array} \right.$$

δ) EXEMPLES :

EXEMPLE 1 : Ω est le rectangle de sommets $A(a, c)$, $B(b, c)$, $C(b, d)$, $D(a, d)$.

Alors :

$$\mathcal{K} = \left\{ u \in \mathcal{U} : \int_{\partial\Omega} u \, dl = \int_{\partial\Omega} \left(ut_1 + \frac{\partial u}{\partial t_1} \right) dl = \int_{\partial\Omega} \left(ut_2 + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right) dl = 0 \right\}$$

$$(u | v)_{\mathcal{K}} = J(u, v)$$

$$\text{avec } K(t, \theta) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sin \left(m\pi \frac{t_1 - a}{b - a} \right) \sin \left(n\pi \frac{t_2 - c}{d - c} \right) \sin \left(m\pi \frac{\theta_1 - a}{b - a} \right) \sin \left(n\pi \frac{\theta_2 - c}{d - c} \right)$$

$$\text{et } \gamma_{m,n} = \frac{2(b-a)(d-c)\sqrt{(b-a)(d-c)}}{\pi^2[m^2(d-c)^2 + n^2(b-a)^2]}$$

EXEMPLE 2 : Ω est le cercle de centre l'origine et de rayon R

$$\mathcal{K} = \left\{ u \in \mathcal{U} : \int_{\partial\Omega} u \, dl = \int_{\partial\Omega} ut_1 \, dl = \int_{\partial\Omega} ut_2 \, dl = 0 \right\}, (u | v)_{\mathcal{K}} = J(u, v).$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\rho, \alpha) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho_1^2}{2R} - \frac{R}{2} \right) \left(\frac{\rho_2^2}{2R} - \frac{R}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{12\pi} \left[\left(\frac{\rho_{12}^3}{R} - \rho_1 \right) \left(\frac{\rho_2^3}{R^2} - \rho_2 \right) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{n-1}}{n^2+2} \frac{\rho_1^{n+2}}{R^{n+1}} - \frac{1}{n\sqrt{n-1}} \frac{\rho_1^n}{R^{n-1}} \right) \left(\frac{2\sqrt{n-1}}{n^2+2} \frac{\rho_2^{n+2}}{R^{n+1}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n} \frac{\rho_2^n}{n-1 R^{n-1}} \right) \cos [n(\alpha_1 - \alpha_2)] \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} |z_1 - z_2|^2 \text{Log} \left| \frac{\bar{z}_1 z_2 - 1}{z_1 - z_2} \right| + \frac{1}{2} (|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1) \} \\ &\quad \text{avec } z_1 = \rho_1 e^{i\alpha_1} \quad z_2 = \rho_2 e^{i\alpha_2} \end{aligned} \tag{2}$$

2^e Problème

α) Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^2 vérifiant les mêmes hypothèses que dans l'exemple ci-dessus.

Soit E l'espace vectoriel formé des (classes de) fonctions définies et continues sur Ω , dont les dérivées du 1^{er} et du 2^e ordre, au sens des distributions sont des éléments de $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Munissons E du produit scalaire $(u | v)_E = \int_{\Omega} (uv + \Delta u \cdot \Delta v) d\omega(t)$ où $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}$ et $t = (t_1, t_2)$.

Alors E est un espace de Hilbert séparé et complet pour la topologie associée à la norme $\|u\|_E = \sqrt{(u | u)_E}$.

Soit N l'espace vectoriel formé des classes de fonctions de E qui sont harmoniques. N est fermé dans E .

$\partial\Omega$ étant la frontière de Ω , f et h deux fonctions de $\mathcal{L}^2(\partial\Omega)$, soit

$$G = \left\{ u \in E : u = f \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \nu} = h \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

$\frac{\partial}{\partial \nu}$ étant la dérivée normale à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω .

G est un sous-ensemble *convexe* de E .

De plus G se déduit par translation du sous-espace vectoriel $M = H_0^2(\Omega)$ qui est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E .

Donc G est fermé dans E .

— Nous supposons que f et h sont telles que $G \cap N = \Phi$.

— De la théorie du potentiel, il résulte, d'autre part que :

$$G_{\infty} \cap N = M \cap N = \theta_E.$$

— Donc $\dim(M \cap N) < +\infty$.

Enfin, $M + N$ est *fermé* dans E .

Preuve : Considérons une suite (w_n) d'éléments de $M + N$ qui converge vers un élément $w \in E$.

$$\left\{ \begin{array}{l} w_n = u_n + a_n \\ u_n = \frac{\partial u_n}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } \Delta a_n = 0. \end{array} \right.$$

Notons $\mathcal{K} = \{u \in E : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$. Du théorème de Sobolev, on déduit que \mathcal{K} est fermé dans E . \mathcal{K} est donc un espace hilbertien avec la topologie induite par celle de E . Notons T la restriction de l'opérateur Δ à \mathcal{K} . L'opérateur T applique \mathcal{K} sur $\mathcal{L}^2(\Omega)$ si Ω est suffisamment régulier.

T étant injectif sur \mathcal{K} est donc opérateur bijectif de \mathcal{K} sur $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Il résulte d'un théorème dû à Banach que T est inversible et que son inverse est continu.

Soit u la solution du problème :

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta w \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$u = T^{-1}(\Delta w).$$

Nous savons que Δu_n converge vers Δw dans $L^2(\Omega)$. Donc u_n converge vers u dans E . Comme $u_n \in M$ qui est fermé dans E , il en est de même de u .

Donc

$$\begin{cases} w = u + a \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } \Delta a = 0. \end{cases}$$

Les hypothèses $h_1, h_2,$ et h_3 du paragraphe 2 sont donc vérifiées.

$$\beta) \mathcal{K} = \varphi(E) = F = E/N.$$

Considérons la forme bilinéaire sur E :

$$J(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v \, d\omega(t)$$

Quels que soient $\tilde{u} \in u$ et $v \in \tilde{v}$, $J(u, v)$ garde la même valeur.

L'application $(\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto (\tilde{u} | \tilde{v})_{\mathcal{K}} = J(u, v)$ définit donc un produit scalaire sur \mathcal{K} et $\tilde{u} \mapsto \|\tilde{u}\|_{\mathcal{K}} = \sqrt{J(u, u)}$ est une norme sur \mathcal{K} .

\mathcal{K} est séparable puisque E est séparable.

\mathcal{K} est complet.

Preuve : Considérons une suite de Cauchy (\tilde{u}_n) dans \mathcal{K} .

Si (u_n) est une suite d'éléments de E telle que $u_n \in \tilde{u}_n$, Δu_n est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$.

Donc Δu_n converge dans $L^2(\Omega)$ vers un élément $h \in L^2(\Omega)$.

On sait qu'il existe un élément $v \in E$ tel que $\Delta v = h$.

Donc \tilde{u}_n converge vers \tilde{v} dans \mathcal{K} .

D'autre part l'injection de \mathcal{K} dans F est continue puisque $\mathcal{K} = F$.

$$\gamma) \text{ Posons } \mathcal{K} = \{ u \in E : u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

$$\text{et } (u | v)_{\mathcal{K}} = J(u, v).$$

\mathcal{K} est isomorphe à \mathcal{K} .

Un représentant de la classe $\tilde{\sigma}$ sera donc de la forme :

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_K$$

où $\int_{\Omega} \Delta \sigma_K \cdot \Delta (\sigma_K - g_K) d\omega(t) = 0$ quel que soit $g_K \in G_K$.

c'est-à-dire $\int_{\Omega} \Delta \sigma_K \cdot \Delta v d\omega(t) = 0$ quel que soit $v \in H^2(\Omega)$.

Puisque :

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v d\omega(t) = \int_{\Omega} \Delta^2 u d\omega(t) - \int_{\partial\Omega} \left(\Delta u \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} - \partial \left(\frac{\Delta u}{\partial \nu} \right) \cdot v \right) d\omega(t).$$

Il en résulte que $\Delta^2 \sigma_K = 0$ $\sigma_K = 0$ sur $\partial\Omega$.

Ainsi pour déterminer σ on procédera ainsi :

On déterminera d'abord σ_N solution du problème :

$$\left| \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = f \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

puis σ_K solution du problème :

$$\left| \begin{array}{l} \Delta^2 u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \nu} = h - \frac{\partial \sigma_N}{\partial \nu} \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

3^e Problème

α) Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^2 simplement connexe, dont la frontière est régulière et $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques dans Ω .

Soit E l'ensemble des fonctions complexes définies sur Ω muni de la topologie de la convergence simple. E est séparé et complet.

Soit N le sous-espace vectoriel fermé de E engendré par les fonctions $z \rightarrow 1, z \rightarrow z$.

$F = E/N$ est séparé. Notons φ l'homomorphisme canonique de E sur F , z_1, \dots, z_n étant n points distincts de Ω , considérons :

$$G = \{f \in E : u(z_i) = \gamma_i \in \mathbf{C} \quad 1 \leq i \leq n\}$$

Nous supposons que

(i) les nombres γ_i sont tels que $G \cap N = \Phi$

(ii) $n \geq 2$ ce qui implique $G_{\infty} \cap N = \theta_E$.

L'hypothèse h_3 du paragraphe 2 est vérifiée puisque $\dim(N) < +\infty$.

β) Soit $\mathcal{U} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : \int_{\Omega} |f(z)|^2 d\omega < +\infty,$

$$\int_{\Omega} |f'(z)|^2 d\omega < +\infty, \quad \int_{\Omega} |f''(z)|^2 d\omega < +\infty \}$$

$\mathcal{H} = \varphi(\mathcal{U})$ est un sous-espace vectoriel de $F = E/N$.

Considérons sur \mathcal{U} la forme bilinéaire :

$$J(f, g) = \int_{\Omega} f''(z) \cdot \bar{g}''(z) d\omega$$

Quels que soient $f \in \tilde{f}$ et $g \in \tilde{g}$, $J(u, v)$ garde la même valeur et l'application $(\tilde{u}, \tilde{v}) \mapsto (\tilde{u}|\tilde{v})_{\mathcal{H}} = J(u, v)$ définit un produit scalaire sur \mathcal{H} ,

il est facile de vérifier que \mathcal{H} est complet et que son injection dans F est continue.

γ) Comme on l'a fait au paragraphe γ) du 1^{er} problème, on déterminerait \tilde{G} et \tilde{C} .

$$\text{Soit } \mathcal{K} = \{f \in \mathcal{U} : \int_{\Omega} f(z) d\omega = \int_{\Omega} z \bar{f}(z) d\omega = 0 \}$$

\mathcal{K} est un sous-espace hilbertien de E isomorphe à \mathcal{H} .

Connaissant le noyau $K(z, \bar{t})$ de \mathcal{K} , on détermine σ comme on l'a fait dans le 1^{er} problème.

δ) EXEMPLE :

Ω est le cercle de centre 0 et de rayon 1.

$$\text{Alors } K(z, \bar{t}) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n \bar{t}^n}{n^2(n-1)}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ATTEIA, *Étude de certains noyaux et théorie des fonctions « spline » en Analyse Numérique*. Thèse Grenoble, 1966.
« Fonctions " spline " définies sur un ensemble convexe », Num. Math., vol. 12, 1968, p. 192-210.
- [2] BERGMAN-SCHIFFER, *Kernel functions and differential equations*, Academic Press, 1953.
- [3] J. DIEUDONNE, « Sur la séparation des ensembles convexes », Math. Annalen, 163, 1-3 (1966).
- [4] L. SCHWARTZ, « Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés », J. d'Analyse Mathématique, Jérusalem, 1964.
- [5] SOBOLEV, « Applications of functional Analysis in Mathematical physics », Am. Math. Soc., 1963.