Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge

Michel Gondran

Brèves communications. Programmation entière non linéaire

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge, tome 4, n° 3 (1970), p. 107-110.

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_3_107_0>

R.I.R.O.
(4e année, R-3, 1970, p. 107-110)

Brèves communications

PROGRAMMATION ENTIERE NON LINEAIRE

par Michel GONDRAN (1)

Résumé. — *On montre ici qu'une grande famille de programmes en nombres entiers à fonction économique non linéaire et à contraintes linéaires se ramène à un problème d'allocation à une ressource qu'on peut résoudre par programmation dynamique (cf. Gomory* [2] *pour le cas linéaire).*

Considérons le programme entier non linéaire :

$$(P) \qquad \begin{cases} \text{Min } \hat{\varphi}(x) = cx + \sum_{i \in I} \varphi_i[L_i(x)] \\ \text{sous les contraintes } L_i(x) \geqslant 0 \qquad \text{pour} \qquad i \in J,\ x \in Z^n \end{cases}$$

ou

- les $L_i(x)$ sont des fonctions linéaires indépendantes à coefficients entiers, ce qui entraîne en particulier

$$(1) \qquad r = |I \cup J| \leqslant n$$

(I et J pouvant avoir une intersection non vide),

- $c = (c_k)$ est $1 \times n$ vecteur à composantes réelles,
- les φ_i sont des fonctions convexes.

REMARQUE. — La condition (1) sera toujours vérifiée dans le cas d'un programme quadratique sans contraintes.

Faisons alors le changement de variable

$$s_i = L_i(x) \qquad \text{pour } i \in I \cup J$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad s = Lx + L^{\circ}$$

(1) Électricité de France, Direction des Études et Recherches, service informatique et mathématiques appliquées.

cherchons alors, à quelles conditions sur les variables s, x est entier. Dans [4], Smith donne la construction de deux matrices unimodulaires G (dim $r \times r$) et F (dim $n \times n$) permettant d'obtenir la matrice de Smith de la matrice L par

$$G\,L\,F = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \varepsilon_r \end{bmatrix}$$

avec $\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}$. Voir la construction dans [1].

De plus $\Delta = \Delta(L) = \prod_{i=1}^{r} \varepsilon_i$ est le pgcd de la matrice L, c'est-à-dire le pgcd de tous les r sous-déterminants de L.

En posant $y = F^{-1}\,x$ l'équation (2) devient après multiplication à gauche par G

$$G(s - L^0) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_r y_r \end{pmatrix} \tag{3}$$

Comme F est unimodulaire, x entier équivaut à y entier et l'équation (3) s'écrit

$$\sum_{i \in I \cup J} g^i s_i - \sum_{i \in I \cup J} g^i L_i^0 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{dans } G_\Delta)$$

- où G_Δ est le groupe somme directe des classes Z_{ε_i}(Z_{ε_i} étant la classe résiduelle des entiers modulo ε_i),
- $\equiv$ sera l'égalité dans G_Δ.

En posant

$$\sum_{i \in I \cup J} g^i L_i^0 \equiv g^0$$

le problème (P) est équivalent au problème

$$(Q) \begin{cases} \text{Min } \varphi(s) = \sum_{i\in I} \varphi_i(s_i) + \sum_{i\in J} \lambda^i s_i \\ \text{sous les contraintes } s \in Z^n,\ s_J \geqslant 0 \\ \sum_{i\in I\cup J} g^i s_i \equiv g^0 \end{cases}$$

avec $\lambda_i \geqslant 0$ (condition de possibilité).

Remarque sur le problème (Q) [3]

L'ordre du groupe G_Δ est $\prod_{i=1}^{r} \varepsilon_i = \Delta$.

Soit $\hat{s}_i$ la valeur continue qui minimise $\varphi_i(s_i)$.

Dans le cas où $\hat{s}_i$ est entier et où $I \cap J = \varnothing$

Il existe une solution optimale s de (Q) tel que

$$\sum_{i\in J} s_i + \sum_{i\in I} |s_i - \hat{s}_i| \leqslant \Delta - 1$$

Si r_i est l'ordre du sous-groupe engendré par g^i il existe alors une solution optimale s de (Q) tel que

$$0 \leqslant s_i \leqslant r_i - 1 \qquad \text{pour } i \in J - I$$

$$[\hat{s}_i] - r_i \leqslant s_i \leqslant [\hat{s}_i] + r_i \qquad \text{pour } i \in I$$

La résolution du problème (Q) par programmation dynamique [3] se fera en moins de $3\,|J|\,\Delta + 2\,|I|\,\Delta^2$ opérations.

On obtient x solution de (P) à partir d'une solution optimale s de (Q) en résolvant l'équation (2) (cf. [1]).

EXEMPLE

$$(P) \begin{cases} \text{Min } \hat{\varphi}(x) = 3(x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4)^2 \\ \qquad + 5(2x_1 + 3x_2 + x_3 - 17)^2 + 7(3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 25)^2 \\ \text{avec } x \in Z^3 \end{cases}$$

Le changement de variable donne

$$(Q) \begin{cases} \text{Min } \varphi(s) = 3s_1^2 + 5s_2^2 + 7s_3^2 \\ \text{sous la contrainte} \quad s_1 + s_3 \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

D'où $s = (1, 0, 0)$ la solution de (Q).

On déduit alors la valeur de $x_{\text{opt}} = (3, 3, 2)$

$$\hat{\varphi}_{\text{opt}} = 3$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] FIOROT (J. Ch.) et GONDRAN (M.), « *Résolution d'un système linéaire en nombres entiers* », Bulletin des Études et Recherches de l'E.D.F., série C, 1969, n° 2, p. 65-116.

[2] GOMORY (R. E.), *On the relation between integer and non integer solutions to linear programs*. Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 53 (1965), p. 260-265.

[3] GONDRAN (M.), *Dualité diophantienne*, Électricité de France, note HI 364/2 du 7 août 1970.

[4] SMITH (J. H. S.), « *On systems of linear indeterminate equations and congruences* ». Philosophical Transactions, CLI (1861), p. 293-326.