

MARC DUC-JACQUET

**Brève communication. Sur la fonctionnelle erreur  
attachée à une formule de quadrature dans  $C^r [0, 1]$**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge*, tome 4, n<sup>o</sup> 3 (1970), p. 111-117.

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1970\\_\\_4\\_3\\_111\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_3_111_0)

© AFCET, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LA FONCTIONNELLE ERREUR ATTACHÉE A UNE FORMULE DE QUADRATURE DANS $C^r[0,1]$

par Marc DUC-JACQUET (1)

Résumé. — On s'intéresse dans  $C^r[0,1]$  normé par

$$\|\varphi\|_{C^r} = \text{Max} \{ |f(0)|, |f'(0)|, \dots, |f^{(r-1)}(0)|, \text{Max}_{t \in [0,1]} |f^{(r)}(t)| \}$$

à la norme de la fonctionnelle erreur  $R$ , attachée à la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^N A_i f(x_i) + R(f).$$

On montre que le choix des nœuds  $x_i$  et des poids  $A_i$   $i = 1, 2, \dots, N$  qui minimise  $\|R\|$ , implique pour la formule associée un degré de validité  $r - 1$ . Ceci permet la recherche de ces nœuds et poids optimaux en utilisant la technique des multiplicateurs de Lagrange comme il est indiqué dans KRYLOV, Approximate calculations of integrals.

On note  $C_{[0,1]}^r$  l'ensemble des fonctions continûment dérivables jusqu'à l'ordre  $r$  ( $r \geq 1$ ) (inclus) sur  $[0, 1]$ . On considère la formule d'intégration pour  $f \in C_{[0,1]}^r$

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^N A_i f(x_i) + R(f) \quad (N \geq r)$$

où  $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_n \leq 1$  et  $A_i \in \mathbf{R}$   $i = 1, 2, \dots, N$ .

Nous nous proposons d'étudier le comportement de la fonctionnelle erreur  $R$  en fonctions des nœuds  $x_i$  et des poids  $A_i$   $i = 1, 2, \dots, N$ .

$C_{[0,1]}^r$  sera normé en prenant

$$\|f\|_{C^r} = \text{Max} \{ |f(0)|, |f'(0)|, \dots, |f^{(r-1)}(0)|, \text{Max}_{t \in [0,1]} |f^{(r)}(t)| \}.$$

---

(1) Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble.

## I. REPRESENTATION ET ETUDE DE LA FONCTIONNELLE ERREUR

Dans  $C_{[0,1]}^r$  on peut utiliser la formule de Taylor et on obtient ainsi l'expression classique

$$R(f) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(0) * \left( \frac{1}{i+1} - \sum_{j=1}^N A_j x_j^i \right) + \int_0^1 K(t) f^{(r)}(t) dt$$

où

$$K(t) = \frac{(1-t)^r}{r!} - \frac{1}{(r-1)!} * \sum_{j=1}^N A_j (x_j - t)_{+}^{r-1} \quad \text{avec} \quad E_{+} = E \text{ si } E > 0 \\ = 0 \text{ sinon}$$

$K(t)$  est donc une fonction polynomiale par morceaux et est continûment dérivable jusqu'à l'ordre  $r-2$  sur  $[0, 1]$ . En remarquant que dans tous les cas  $K(t)$  est indéfiniment dérivable au voisinage de l'origine, on peut encore écrire

$$\boxed{R(f) = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{r-i-1} f^{(i)}(0) K^{(r-i-1)}(0) + \int_0^1 K(t) f^{(r)}(t) dt} \quad (1)$$

On a alors la majoration

$$|R(f)| \leq \|f\| * \left[ \sum_{i=0}^{r-1} |K_{(0)}^{(i)}| + \int_0^1 |K(t)| dt \right]$$

soit pour la fonctionnelle  $R$  :

$$\|R\| \leq \sum_{i=0}^{r-1} |K_{(0)}^{(i)}| + \int_0^1 |K(t)| dt.$$

Montrons que cette borne pour  $\|R\|$  peut être atteinte. A cet effet considérons la fonction  $\varphi$  définie par les relations :

$$\varphi^{(r)}(t) = \text{signe}(K(t))$$

$$\varphi^{(i)}(0) = \text{signe} [(-1)^{r-i-1} K^{(r-i-1)}(0)] \quad i = 0, 1, 2, \dots, r-1$$

$\varphi$  n'appartient pas à  $C_{[0,1]}^r$ , mais  $R(\varphi)$  est défini et

$$R(\varphi) = \sum_{i=0}^{r-1} |K_{(0)}^{(i)}| + \int_0^1 |K(t)| dt$$

et par ailleurs on peut toujours construire une suite  $\varphi_n(r)$  de fonctions de  $C_{[0,1]}^r$  qui vérifie les conditions :

$$\varphi_n^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(0) \quad i = 0, 1, 2, \dots, r-1$$

$$\varphi_n^{(r)} \rightarrow \varphi^{(r)} \quad \text{au sens de } L_1$$

$$\|\varphi_n\| = 1 \quad \forall n.$$

Dans ces conditions on a :

$$R(\varphi) - R(\varphi_n) = R(\varphi_n - \varphi) = \int_0^1 K(t)(\varphi_n^{(r)} - \varphi^{(r)}) dt \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty$$

et par conséquent on a l'égalité

$$\|R\| = \sum_{i=0}^{r-1} |K^{(i)}(0)| + \int_0^1 |K(t)| dt \tag{2}$$

## II. ETUDE DE LA NORME DE LA FONCTIONNELLE ERREUR

Que peut-on dire de  $\|R\|$  lorsque les  $x_i$  ou les  $A_i$  varient? Intéressons-nous au préalable au problème suivant :

*Déterminer (pour des nœuds fixés) les poids  $A_i$   $i = 1, 2, \dots, N$  pour lesquels  $\|R\|$  est minimum.*

Il s'agit en effet bien d'un minimum car  $\|R\|$  est une fonction convexe des  $A_i$   $i = 1, 2, \dots, N$ . De façon plus précise nous allons démontrer le :

**Théorème 1.** — *Pour des nœuds fixés (distincts dans 0,1), si  $\|R\|$  est minimum alors nécessairement  $K^{(i)}(0) \ i = 0, 1, 2, \dots, r - 1$ .*

Écrivons  $\|R\| = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{i!} * \left| \frac{1}{i+1} - \sum_{j=1}^N A_j x_j^i \right| + \int_0^1 |K(t)| dt = \|R(A)\|$   
avec, rappelons-le,

$$K(t) = \frac{(1-t)^r}{r!} - \sum_{j=1}^N \frac{1}{(r-1)!} * A_j (x_j - t)_+^{r-1}$$

posons

$$\lambda_i = \frac{1}{i!} \left( \frac{1}{i+1} - \sum_{j=1}^N A_j x_j^i \right) \quad i = 0, 1, 2, \dots, r - 1$$

et supposons qu'il existe  $p, 0 \leq p \leq r - 1$  tels que  $\lambda_p \neq 0$ .

Considérons alors le système linéaire défini par

$$(S) \begin{cases} \sum_{j=1}^r \delta A_j x_j^i = 0 & i = 0, 1, 2, \dots, r - 1 \quad i \neq p \\ \sum_{j=1}^r \delta A_j x_j^p = \omega * p! \text{ signe } (\lambda_p) \text{ où } 0 < \omega < |\lambda_p| \\ \delta A_j = 0 & j = r + 1, \dots, N. \end{cases}$$

Dans ces conditions on peut écrire

$$\delta \|R\| = \|R(A + \delta A)\| - \|R(A)\| = |\lambda_p - \omega \text{ signe } (\lambda_p)| - |\lambda_p| + M$$

où

$$M = \int_0^{x_r} \left\{ \left| \frac{(1-t)^r}{r!} - \frac{1}{(r-1)!} \sum_{j=1}^N A_j(x_j - t)_+^{r-1} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{(r-1)!} \sum_{j=1}^N \delta A_j(x_j - t)_+^{r-1} \right| \right. \\ \left. - \left| \frac{(1-t)^r}{r!} - \frac{1}{(r-1)!} \sum_{j=1}^N A_j(x_j - t)_+^{r-1} \right| \right\} dt \\ \left( M = \int_0^1 \{ |K(A + \delta A)| - |K(A)| \} dt \right).$$

Compte tenu des relations (S) on peut écrire

$$|\lambda_p - \omega \text{ signe } (\lambda_p)| - |\lambda_p| = -\omega$$

Par ailleurs si on pose

$$\delta K(t) = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{j=1}^N \delta A_j(x_j - t)_+^{r-1}, \quad M \text{ s'écrit}$$

$$M = \int_0^{x_r} \{ |K(t) - \delta K(t)| - |K(t)| \} dt$$

ce qui permet la majoration  $M \leq \int_0^{x_r} (|K - \delta K| - |K|) dt \leq \int_0^{x_r} |\delta K(t)| dt$   
soit en définitive

$$\boxed{\delta \|R\| \leq -\omega + \int_0^{x_r} |\delta K(t)| dt} \quad (3)$$

*Étude de la fonction  $\delta K(t)$*

Posons

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_r \\ & & & \\ & & & \\ x_1^{r-1} & x_2^{r-1} & & x_r^{r-1} \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \\ u_r \end{pmatrix} \quad \text{avec } u_i = (x_i - t)_+^{r-1}$$

et  $e_i$  le  $i$ -ème vecteur de la base canonique dans  $\mathbf{R}^r$ .

On peut écrire matriciellement

$$\begin{aligned} \delta K(t) &= \frac{1}{(r-1)!} * \omega * p! \text{ signe } (\lambda_p) * u^t M^{-1} e_{p+1} \\ &= \pm \omega * \frac{p!}{(r-1)!} e_{p+1}^t M^t u^{-1} = \pm \omega * \frac{p!}{(r-1)!} a_p \end{aligned}$$

où  $a_p$  représente le coefficient de  $x^p$  dans l'expression du polynôme  $P_i(x)$  de degré inférieur ou égal à  $r - 1$  et vérifiant  $P_i(x_i) = (x_i - t)_+^{r-1}$   $i = 1, 2, \dots, r$ . Autrement dit  $P_i(x)$  est le polynôme d'interpolation, basé sur les abscisses  $x_1, x_2, \dots, x_r$ , de la fonction  $\theta(x) = (x - t)_+^{r-1}$ ,  $t$  étant considéré comme un paramètre dans  $[0, 1]$ . On peut alors prouver le :

**Théorème 2.** — *Le polynôme  $P(x)$  de degré inférieur ou égal à  $r - 1$ , qui vérifie  $P(x_i) = \theta(x_i)$   $i = 1, 2, \dots, r$  est tel que :*

$$|P^{(i)}(0)| \leq (r-1)! \quad i = 0, 1, 2, \dots, r-1.$$

On démontre cette propriété en utilisant d'une part l'expression de  $P(x)$  sur la base canonique  $\{1, x, x^2, \dots, x^{r-1}\}$ , d'autre part, l'expression de  $P(x)$  sous la forme de Newton. En exprimant les différences divisées de la deuxième forme, et en la développant pour identifier à la première forme, on obtient par majorations et minorations le résultat indiqué.

Mais  $|P^{(i)}(0)| = |a_i| i!$  (on a supposé  $P_i(x)$  écrit sous la forme  $P_i(x) = \sum_{i=r-1}^0 a_i x^i$ ) d'où

$$|a_i| i! \leq (r-1)! \Rightarrow |a_i| \leq \frac{(r-1)!}{i!} \quad i = 0, 1, 2, \dots, r-1$$

et en particulier

$$|a_p| \leq \frac{(r-1)!}{p!} \Rightarrow |\delta K(t)| \leq \omega$$

*Conséquence*

En utilisant (3) on obtient  $\delta \|R\| \leq -\omega + \omega x_r$   
 si  $r < N$  alors  $x_r < x_N \leq 1$  donc  $\|\delta R\| \leq -\omega(1 - x_r) < 0$   
 si  $r = N$  alors si  $x_N < 1$  on a de même  $\|\delta R\| < 0$   
 sinon si  $x_N = 1$  on doit remarquer que  $\delta K(t)$  vérifie  $|\delta K(t)| \leq \omega \forall t \in [0, 1]$   
 et  $\delta K$  est égale dans  $[x_{N-1}, 1]$  à  $\frac{1}{(r-1)!} \delta A_N (1-t)^{r-1}$ , et vérifie dans cet

intervalle  $\int_{x_{N-1}}^1 |\delta K(t)| < (1 - x_{N-1})$  ce qui entraîne encore

$$\int_0^{x_N=1} |\delta K(t)| < \omega \quad \text{et} \quad \|\delta R\| < 0.$$

En conséquence nous avons montré que si pour un jeu de poids  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  l'une des quantités  $\lambda_p$  est telle que  $\lambda_p \neq 0$  alors on peut trouver un jeu de poids  $A_i + \delta A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  telle que  $\|R(A + \delta A)\| < \|R(A)\|$ . Ainsi, lorsque  $\|R\|$  est minimum nous avons nécessairement  $\lambda_i = 0$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, r - 1$  ou en revenant à la définition de  $\lambda_i$ ,  $K^{(i)}(0) = 0$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, r - 1$  ce qui constitue bien le résultat annoncé.

Nous devons remarquer que (sauf dans le cas  $r = N$ ) les  $A_i$  optimaux ne se trouvent donc pas entièrement déterminés puisqu'ils vérifient seulement les  $r$  relations

$$\frac{1}{i+1} - \sum_{j=1}^N A_j x_j^i = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, r - 1.$$

On peut interpréter notre résultat de la manière suivante en énonçant :

**Théorème 1'.** — Une formule de quadrature à  $N$  points dans  $C_{[0,1]}^r$ ,  $r \leq N$ , optimale au sens de la norme choisie dans  $C_{[0,1]}^r$ , est une formule exacte sur les polynômes de degré au plus égal à  $r - 1$ .

Notons  $\rho_{N,r} = \min_{A_1, \dots, A_N} \|R\|$ . On peut écrire si les  $A_i^*$  sont les poids optimaux

$$\forall f \in C_{[0,1]}^r \left| \int_0^1 f(x) dx - \sum_{i=1}^N A_i^* f(x_i) \right| \leq \rho_{N,r} \|f\|$$

mais la formule est de degré de validité  $r - 1$ , donc

$$\boxed{\forall f \in C_{[0,1]}^r \left| \int_0^1 f(x) dx - \sum_{i=1}^N A_i^* f(x_i) \right| \leq \rho_{N,r} * \max_{t \in [0,1]} |f^{(r)}(t)|} \quad (4)$$

Or il se trouve que dans les cas  $r = 1$  et  $r = 2$  le problème suivant a été résolu et explicité (cf. [\*]).

« Trouver la borne inférieure des nombres  $\rho_{N,r}$  satisfaisant à (4) et ceci pour  $A_i \in \mathbf{R}$   $i = 1, 2, \dots, N$  mais aussi pour les  $x_i$  variables dans  $[0,1]$ . »

En conséquence nous n'améliorons pas les résultats connus, mais nous avons relié deux notions importantes qui semblaient *a priori* être différentes, dans la théorie de l'intégration numérique approchée :

- \* la notion de formule optimale au sens de la norme choisie,
- \* la notion de meilleure formule parmi les formules de degré de validité  $r - 1$  ;

et nous pouvons énoncer les résultats de [1] sous la forme :

**Théorème 3.** — Dans  $C_{[0,1]}^1$  si nous considérons la formule d'intégration

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_1^N A_i f(x_i) + R(f)$$

alors il existe un jeu unique de nœuds  $x_i = \frac{2i-1}{2N}$

$$\text{et de poids } A_i = \frac{1}{N} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

pour lequel  $\|R\|$  est minimum et on a l'estimation de l'erreur

$$\forall f \in C_{[0,1]}^1 |R(f)| \leq \frac{1}{4N} \max_{t \in [0,1]} |f'(t)|.$$

**Théorème 4.** — Dans  $C_{[0,1]}^2$  si nous considérons la formule d'intégration

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^N A_i f(x_i) + R(f)$$

alors il existe un jeu unique de nœuds  $x_i = \frac{\sqrt{3} + 4(i-1)}{2} h \quad i = 1, 2, \dots, N$

$$\text{et de poids } \left\{ \begin{array}{l} A_i = 2h \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \\ A_1 = A_N = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} h \end{array} \right.$$

avec  $h = [\sqrt{3} + 2(N-1)]^{-1}$

pour lequel  $\|R\|$  est minimum, et on a l'estimation de l'erreur

$$\forall f \in C_{[0,1]}^2 |R(f)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{t \in [0,1]} |f''(t)|$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. I. KRYLOV, *Approximate calculation of integrals*, The Mac Millan Company, New York, pp.