

MICHEL SAINT-ANDRÉ

**Brève communication. Calcul de la moyenne  
d'une fonction presque-périodique. Application  
au calcul d'intégrales**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge*, tome 4, n° 3 (1970), p. 141-146.

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1970\\_\\_4\\_3\\_141\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_3_141_0)

© AFCET, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CALCUL DE LA MOYENNE D'UNE FONCTION PRESQUE-PERIODIQUE APPLICATION AU CALCUL D'INTEGRALES

par Michel SAINT-ANDRÉ

*Résumé. — Pour calculer la moyenne d'une fonction presque-périodique sur  $\mathbb{R}^n$  au sens de Bohr dont le développement en série de Fourier est normalement convergent, on propose, soit d'utiliser un quadrillage de l'hypercube de  $\mathbb{R}^n$ , soit de calculer la moyenne arithmétique des valeurs de la fonction considérée suivant une direction bien déterminée. Pour cette dernière méthode et dans le cas d'une fonction périodique sur  $\mathbb{R}^n$ , on effectue ainsi un balayage de l'hypercube de  $\mathbb{R}^n$  suivant des segments de droites parallèles. On applique ensuite ces méthodes au calcul d'intégrales (simples ou multiples) et on donne une majoration de l'erreur.*

Considérons un phénomène physique dépendant d'un ou de plusieurs paramètres  $x_1, x_2, \dots, x_n$  auquel est attachée une fonction  $h$ . Supposons que ce phénomène soit « permanent en moyenne » et proposons-nous de calculer la valeur moyenne de la fonction  $h$ . En effectuant un changement de variable, on peut toujours transformer la fonction  $h$  en une certaine fonction  $f$  de même moyenne et définir  $M(f)$  par :

$$M(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2T)^n} \int_c f(\bar{x}) d\bar{x} \quad \text{avec} \quad c = [-T, T]^n$$

Dans certains cas les procédés expérimentaux permettent de mesurer directement  $M(f)$  avec une approximation suffisante, mais on peut aussi procéder de la manière suivante :

On calcule :  $S_N = \frac{1}{N^n} \sum_{k_1=0}^{N-1} \dots \sum_{k_n=0}^{N-1} f(k_1\alpha_1, \dots, k_n\alpha_n)$  pour un certain :  
 $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha$  appartenant à  $\mathbb{R}^n$  puis la limite :

$$M_1(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \quad (\text{première méthode})$$

---

(1) Département de Mathématiques Appliquées, Clermont-Ferrand, appartient à l'équipe de recherche associée n° 3.

ou encore (deuxième méthode) on calcule :  $S'_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k\bar{\alpha})$  pour un certain  $\bar{\alpha}$  appartenant à  $\mathbf{R}^n$ , puis la limite :  $M_2(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} S'_N$ .

Le problème se pose donc de savoir si les moyennes  $M_1(f)$  et  $M_2(f)$  sont égales à la quantité  $M(f)$  cherchée et si oui, dans quels cas? C'est-à-dire, pour quels  $\bar{\alpha}$  appartenant à  $\mathbf{R}^n$  a-t-on l'égalité entre ces moyennes discrètes et la moyenne continue  $M(f)$ ? Nous avons répondu à ces questions dans le cas où  $f$  est une fonction presque-périodique au sens de Bohr ayant une série de Fourier normalement convergente dans [4], c'est-à-dire où :

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}) = c_0 + \sum_{\bar{p} \in \Sigma} c_{\bar{p}} e^{2i\pi \langle \lambda_{\bar{p}}, \bar{x} \rangle}$$

avec :  $\Sigma = \sum_{\bar{p} \in \Sigma} |c_{\bar{p}}| < +\infty$ .

(M. Mendès-France a envisagé dans [3] le cas monodimensionnel où  $f$  est, soit une fonction aléatoire stationnaire du second ordre, soit une fonction presque-périodique, soit une fonction pseudo-aléatoire.)

Cette classe de fonctions comprenant l'importante classe des fonctions continues périodiques sur  $\mathbf{R}^n$ , il est facile d'appliquer ces méthodes au calcul d'intégrales définies (voir § B).

Nous allons voir que l'erreur  $I_N$  d'ordre  $N$  commise en appliquant ces méthodes de calcul est dans tous les cas majorée par une quantité de la forme :  $\frac{K}{N} + \rho$  où  $\rho$  est le reste d'ordre  $R$  de la série des modules des coefficients de Fourier de la fonction  $f$  (dans le paragraphe C nous donnons une majoration évitant le calcul des coefficients de Fourier).

Ces méthodes donnent donc une meilleure précision que les méthodes de Monte-Carlo utilisant des suites de nombres aléatoires puisque nous savons que dans ce cas l'erreur d'ordre  $N$  est en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  et que d'autre part le résultat obtenu n'a pas de grande valeur en soi puisqu'il dépend d'un seuil de probabilité accepté à l'avance.

J. Bass et J. P. Bertrandias ont montré dans [1] et [2] qu'il valait mieux utiliser des suites arithmétiques équiréparties que des nombres aléatoires « véritables » et que dans le cas monodimensionnel la suite qui semble donner les meilleurs résultats est la suite :  $x_n = \underline{An}$  constituée des parties fractionnaires des multiples d'un même nombre réel  $A$  (cette suite est équirépartie si  $A$  est irrationnel et les meilleurs résultats sont obtenus lorsque  $A$  est quadratique).

**A. RESULTATS RELATIFS AU CALCUL DE LA MOYENNE D'UNE FONCTION PRESQUE-PERIODIQUE**

Soit :  $f(\bar{x}) = c_{\bar{0}} + \sum_{\bar{p} \in S} c_{\bar{p}} e^{2i\pi \langle \lambda_{\bar{p}}, x \rangle}$  où les vecteurs pseudo-périodes :  $\lambda_{\bar{p}} = (\lambda_{p_1}, \dots, \lambda_{p_n})$  seront supposés tous différents deux à deux et différents du vecteur nul  $\bar{0}$  de  $\mathbf{R}^n$ .

**Théorème 1**

- Si  $f$  est une fonction presque périodique sur  $\mathbf{R}^n$  ayant une série de Fourier normalement convergente.
- Si :  $\eta > 0$  avec :  $\eta = \text{Min}_{r=1,2,\dots,n} (\eta_r)$  et  $\eta_r = \text{Inf}_{\bar{p} \in S; \lambda_{p_r} \neq 0} |1 - e^{2i\pi \lambda_{p_r} \alpha_r}|$

Alors :  $M_1(f) = c_{\bar{0}} = M(f)$

d'où la technique de calcul :

Pour calculer  $M(f)$  il suffit de déterminer  $\bar{\alpha}$  appartenant à  $\mathbf{R}^n$  tel que  $\eta$  soit strictement positif et de calculer les sommes partielles  $S_N$ , puis la limite lorsque  $N$  tend vers l'infini.

**REMARQUES**

1) Si la fonction  $f$  considérée est un polynôme trigonométrique généralisé ( $S$  fini) il suffit que :  $\lambda_{p_r} \alpha_r$  ne soit jamais entier relatif pour tout  $\bar{p}$  appartenant à  $S$  et pour tout :  $r = 1, 2, \dots, n$ ; pour assurer que :  $\eta > 0$  et dans ce cas :

$$|I_N| = |M(f) - S_N| \leq \frac{K}{N} \quad \text{avec} \quad K = \frac{2 \sum_{\bar{p} \in S} |c_{\bar{p}}|}{\eta}$$

Dans le cas général, il suffit de tronquer la série de Fourier de  $f$  pour se ramener au cas précédent, pour cela on considère :

$$\mathcal{S} = \{ \bar{p} \in S; | |\bar{p}| | \leq R \} \quad \text{avec} \quad | |\bar{p}| | = \text{Max}_{j=1,2,\dots,n} (|p_j|)$$

$$\mathcal{R} = \{ \bar{p} \in S; | |\bar{p}| | \geq R + 1 \}$$

et on obtient :

$$|I_N| \leq \frac{K}{N} + \rho \quad \text{où} \quad \rho = \sum_{\bar{p} \in \mathcal{S}} |c_{\bar{p}}|$$

$$\text{et } K = \frac{2 \sum_{\bar{p} \in \mathcal{S}} |c_{\bar{p}}|}{\eta} \quad \text{avec : } \eta = \text{Min}_{r=1,2,\dots,n} (\eta_r) \quad \text{et } \eta_r = \text{Min}_{\bar{p} \in \mathcal{S}; \lambda_{p_r} \neq 0} |1 - e^{2i\pi \lambda_{p_r} \alpha_r}|$$

2) Si tous les  $\lambda_{\bar{p}}$  ont au moins  $q$  composantes non nulles pour tout  $\bar{p}$  appartenant à  $\mathcal{S}$ , alors :

$$|I_N| \leq \frac{K_q}{N^q} + \rho \quad \text{avec} \quad K_q = \left(\frac{2}{\eta}\right)^q \sum_{\bar{p} \in \mathcal{S}} |c_{\bar{p}}|$$

**Théorème 2**

- Si  $f$  est une fonction presque-périodique sur  $\mathbf{R}^n$  ayant une série de Fourier normalement convergente.
- Si :  $\eta' > 0$  avec :  $\eta' = \text{Inf}_{\bar{p} \in \mathcal{S}} |1 - e^{2i\pi \langle \lambda_{\bar{p}}, \bar{\alpha} \rangle}|$  Alors :  $M_2(f) = c_0 = M(f)$

$$\text{et } |I_N| = |M(f) - S'_N| \leq \frac{K'}{N} + \rho \quad \text{avec} \quad K' = \frac{2 \sum_{\bar{p} \in \mathcal{S}} |c_{\bar{p}}|}{\eta'_S}$$

$$\text{et } \eta'_S = \text{Min}_{\bar{p} \in \mathcal{S}} |1 - e^{2i\pi \langle \lambda_{\bar{p}}, \bar{\alpha} \rangle}|$$

**B. APPLICATION AU CALCUL D'INTEGRALES DEFINIES**

Soit à calculer :  $\mathfrak{J} = \int_{I^n} f(\bar{x}) \, d\bar{x}$  où  $f$  est une fonction continue sur  $I^n = [0, 1]^n$ .

Pour que la fonction  $F$ , engendrée par  $f$  par périodicité, soit représentable par sa série de Fourier, il est nécessaire que  $f$  vérifie le système (C) de conditions :

$$(C) \begin{cases} f(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ \forall (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in I^{n-1} \quad \text{pour tout } : j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Ces conditions ne sont pas toujours vérifiées, mais cette hypothèse n'est pas restrictive; en effet, il suffit de transformer la fonction  $f$  en une fonction  $f^*$  (par symétries) définie par :

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = f(g(x_1), \dots, g(x_n)) \quad \text{avec} : g(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } : x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x \text{ si } : x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

et 
$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}^* = \int_{I^n} f^*(\bar{x}) \, d\bar{x}.$$

**C. MAJORATION DE  $\rho = \sum_{\bar{p} \in \mathcal{R}} |c_{\bar{p}}|$  ET DE  $\Sigma = \sum_{\bar{p} \in \mathcal{S}} |c_{\bar{p}}|$**

Si  $f$  est une fonction périodique, de période 1 par rapport à chaque variable, admettant une dérivée partielle  $n^{\text{ième}}$  mixte  $\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$  continue sur  $I^n$ , alors

la série de Fourier de  $f$  est normalement sommable et de somme  $f(\bar{x})$ . En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Bessel-Parseval on a :

$$\Sigma \leq \sum_{q=1}^n 12^{-\frac{1}{2}} \left( \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n} (C_{j_1, \dots, j_q}) \right)$$

avec :

$$C_{j_1, \dots, j_q} = \int_{I^n} \left| \frac{\partial^q f(\bar{x})}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_q}} \right|^2 d\bar{x}$$

et  $\rho \leq \frac{K(f)}{\sqrt{R}}$  avec :  $K(f) = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sum_{q=1}^n \left( \frac{q}{12^q} \right)^{1/2} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n} (C_{j_1, \dots, j_q})^{1/2}$

Ces majorations peuvent être considérablement améliorées si la fonction  $f$  présente en outre d'autres propriétés de régularité (voir [4], pages 61-63).

**D. EXEMPLE :** 
$$\mathfrak{J} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx \, dy \, dz}{4 + \cos \pi x + \cos \pi y + \cos \pi z} .$$

La fonction  $f$  ne vérifie pas le système (C) de conditions du paragraphe B et la fonction  $f^*$  est ici définie par :

$$f^*(x, y, z) = \frac{1}{4 + \cos 2\pi x + \cos 2\pi y + \cos 2\pi z} \text{ pour tout } (x, y, z) \in I^3$$

Pour la première méthode de calcul nous prendrons :

$$\bar{\alpha} = \left( \frac{1}{R+1}, \frac{1}{R+1}, \frac{1}{R+1} \right)$$

et ainsi :  $\eta > \sin \frac{2\pi}{R+1}$  et le calcul de  $S_N$  se réduit au calcul de :

$$S_1 = \frac{1}{(R+1)^3} \sum_{k_1=0}^R \sum_{k_2=0}^R \sum_{k_3=0}^R f^* \left( \frac{k_1}{R+1}, \frac{k_2}{R+1}, \frac{k_3}{R+1} \right) .$$

Par ailleurs, en utilisant les symétries de la fonction  $f^*$  le calcul de  $S_1$  peut être réduit.

Pour la deuxième méthode de calcul, on prendra :

$$\bar{\alpha} = \left( \frac{1}{3R}, \frac{1}{3(R+1)}, \frac{1}{3(R+2)} \right)$$

et  $R$  impair afin d'assurer la condition :  $\eta'_S > \sin \frac{2\pi}{P} > 0$ . En prenant pour valeur de  $N$  un multiple du p.p.c.m.  $P$  de

$$\frac{1}{\alpha_1} = 3R; \frac{1}{\alpha_2} = 3(R+1); \frac{1}{\alpha_3} = 3(R+2); (P = 3R(R+1)(R+2)),$$

le calcul de  $S'_N$  se réduit au calcul de :  $S_2 = \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} f(k\alpha_1, k\alpha_2, k\alpha_3)$  (voir résultats dans [4]).

### E. CONCLUSION

Il résulte de l'étude de ces deux méthodes de calcul que les meilleurs résultats sont obtenus par :

— la première méthode si la dimension  $n$  est faible ( $n = 2, 3, 4$ ) et si  $f$  est une fonction périodique (ou s'il s'agit d'un calcul d'intégrale),

— la deuxième méthode si la dimension  $n$  est grande ( $n \geq 5$ ) et principalement si  $f$  ne présente pas de symétrie.

Dans ce dernier cas, il se pose alors le problème de trouver un algorithme permettant de déterminer le  $\bar{\alpha}_0$  optimal (réalisant le maximum de :  $\eta'_S$ ).

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. BASS, *Nombres aléatoires. Suites arithmétiques. Méthodes de Monte-Carlo* (Publications de l'I.S.U.P., vol. IX, 1960, fasc. 3, p. 289-325).
- [2] J. P. BERTRANDIAS, *Calcul d'une intégrale au moyen de la suite :  $x_n = An$ . Évaluation de l'erreur* (Publications de l'I.S.U.P., vol. IX, 1960, fasc. 4, p. 335-349).
- [3] M. MENDÈS-FRANCE, *Calcul des moyennes des fonctions aléatoires ou pseudo-aléatoires par échantillonnage* (Publications de l'I.S.U.P., vol. XI, 1962, fasc. 3, p. 225-256).
- [4] M. SAINT-ANDRÉ, « Utilisation de suites équiréparties pour le calcul des intégrales », Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, 10 juillet 1970, département de Mathématiques Appliquées, Clermont-Ferrand.