REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE, SÉRIE ROUGE

PIERRE LORIDAN

Sur la minimisation de fonctionnelles convexes par pénalisation

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge, tome 5, nº 1 (1971), p. 117-133.

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_1_117_0>

R.I.R.O.
(5e année, R-1, 1971, p. 117-133)

SUR LA MINIMISATION DE FONCTIONNELLES CONVEXES PAR PÉNALISATION

par Pierre LORIDAN

Résumé. — *Dans cet article, quelques résultats sur les techniques de pénalisation, en optimisation convexe, sont donnés avec notamment des estimations d'erreur. Il est présenté ensuite un procédé d'optimisation utilisant à la fois les méthodes de pénalisation et de double discrétisation. L'utilisation d'un tel procédé ne fait intervenir qu'un seul paramètre.*

INTRODUCTION

Cet article a pour but de donner quelques compléments théoriques sur l'utilisation des méthodes de pénalisation en optimisation convexe.

Après avoir rappelé quelques résultats connus, nous donnons des conditions de convergence forte ainsi que certaines évaluations d'erreur.

Nous présentons ensuite un procédé d'approximation utilisant simultanément les méthodes de pénalisation et de double discrétisation. Ce procédé réduit le nombre des paramètres d'approximation habituellement nécessaires.

Nous donnons, pour terminer, les démonstrations des théorèmes de convergence d'un tel procédé.

PLAN D'ÉTUDE

I. HYPOTHESES. ENONCE DU PROBLEME (P)

V désignant un espace de Banach réflexif, on considère une fonctionnelle J définie sur V tout entier, vérifiant les hypothèses :

(J1) J est continue

(J2) J est strictement convexe

(J3) $$\lim_{\|v\| \to +\infty} J(v) = +\infty$$

Soit d'autre part G une fonctionnelle également définie sur V telle que

(G1) G est continue

(G2) G est convexe

(G3) $K = \{ v \in V \mid G(v) \leqslant 0 \}$ a un intérieur non vide.

L'ensemble K est donc un convexe fermé dans V.

Problème (P)

« Trouver $u \in K$ tel que $J(u) \leqslant J(v)$ $\forall v \in K$. »

Il s'agit par conséquent d'un problème d'optimisation avec contrainte. En vertu des hypothèses précédentes, on sait que ce problème admet une solution unique appartenant à la frontière de K (donc telle que $G(u) = 0$), si l'on suppose que l'optimum global de J sur V est en dehors de K.

II. APPROXIMATION DU PROBLEME (P) PAR PENALISATION

II-1. Le problème (P_r)

r désignant un nombre réel positif, on considère la fonctionnelle J_r définie par :

$$J_r(v) = \begin{cases} J(v) & \text{si} \quad v \in K \\ J(v) + \dfrac{G^2(v)}{r} & \text{si} \quad v \in \complement K \quad \text{(complémentaire de } K\text{)} \end{cases}$$

Le problème (P_r) consiste alors à trouver $u_r \in V$ tel que

$$J_r(u_r) = \inf_{v \in V} J_r(v)$$

On montre facilement que ce problème sans contraintes admet une solution unique, approchant la solution du problème (P) au sens suivant :

II-2. Résultats de convergence

Théorème 1 : $u_r \rightarrow u$ faiblement quand $r \rightarrow 0$.

Théorème 2 : $\left.\begin{array}{l} J_r(u_r) \rightarrow J(u) \\ J(u_r) \rightarrow J(u) \end{array}\right\}$ quand $r \rightarrow 0$.

Corollaire 1 : $\dfrac{G^2(u_r)}{r} \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$. Autrement dit, en utilisant la notation de Landau : $G(u_r) = 0(\sqrt{r})$.

Les démonstrations des théorèmes 1 et 2 ainsi que celle du corollaire 1 sont données respectivement dans [5] et [6].

Signalons que la solution u_r constitue une approximation externe de u, c'est-à-dire $u_r \in \complement K$.

II-3. Conditions suffisantes de convergence forte

La convergence forte de u_r vers u est assurée dans chacun des cas suivants.

1er cas : en plus des hypothèses du paragraphe I, on suppose que J vérifie les conditions :

(J4) J admet une dérivée Fréchet, notée J' :

$$J(v) - J(u) = (J'(u), v - u) + w(u, v - u)$$

(J5) il existe une constante $c > 0$ et un nombre $\alpha > 1$ tels que

$$|w(u, v - u)| \geqslant c \, \|v - u\|^{\alpha}$$

La démonstration se fait facilement en appliquant (J4) à $v = u_r$, u désignant alors la solution du problème (P).

Les hypothèses J4 et J5 sont en particulier vérifiées par les fonctionnelles de la forme $J(v) = a(v, v) - 2(f, v)$ associées à la résolution d'inéquations variationnelles dans lesquelles la forme bilinéaire $a(u, v)$ est continue, coercive et symétrique [6].

2e cas : On suppose que J vérifie :

(J6) J admet une dérivée Fréchet J' telle que

$$(J'(x) - J'(y), x - y) \geqslant c \, \|x - y\|^{\alpha} \qquad c > 0, \alpha > 0$$

En appliquant (J6) à $x = u$ et $y = u_r$, on obtient :

$$(J'(u), u - u_r) \geqslant c \, \|u - u_r\|^{\alpha} + (J'(u_r), u - u_r) \qquad (1)$$

Mais, d'autre part, u_r est l'optimum de J sur le convexe

$$K_r = \{ v \mid G(v) \leqslant G(u_r) \}$$

et, par conséquent, en utilisant la condition nécessaire et suffisante « d'optimalité » sur un convexe, on a : $(J'(u_r), v - u_r) \geqslant 0 \ \forall v \in K_r$.

En particulier, $G(u) = 0$ donc $u \in K_r$ et

$$(J'(u_r), u - u_r) \geqslant 0 \qquad (2)$$

La comparaison des inégalités (1) et (2) donne

$$(J'(u), u - u_r) \geqslant c \, \|u - u_r\|^{\alpha}$$

Comme $u_r \to u$ faiblement $(J'(u), u - u_r) \to 0$ et $\|u - u_r\|^{\alpha} \to 0$

3e cas : Au lieu de l'hypothèse (J2) du paragraphe I, on fait l'hypothèse :

(J7) J est uniformément convexe, c'est-à-dire, vérifie

$$J\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} J(x) + \frac{1}{2} J(y) - \omega(\|x - y\|)$$

où ω désigne une fonction continue définie sur $\mathbf{R}^+$, à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ telle que $\omega(0) = 0$ et $\omega(t) \neq 0$ si $t \neq 0$.

Il suffit d'appliquer l'hypothèse (J7) en faisant $x = u$ et $y = u_r$:

$$\omega(\|u_r - u\|) \leqslant \frac{1}{2} J(u_r) + \frac{1}{2} J(u) - J\left(\frac{u + u_r}{2}\right) \qquad (3)$$

D'après la définition de ω, il suffit de montrer que $\omega \, \|u_r - u\|) \to 0$ quand $r \to 0$ pour assurer la convergence forte.

L'inégalité (3) peut s'écrire

$$\omega(\|u_r - u\|) \geqslant \frac{1}{2} [J(u_r) - J(u)] + J(u) - J\left(\frac{u + u_r}{2}\right)$$

Comme $J(u_r) \to J(u)$ il reste donc à montrer que $J\left(\frac{u + u_r}{2}\right) \to J(u)$ quand $r \to 0$.

Or, puisque $\frac{u + u_r}{2} \to u$ faiblement, la semi-continuité inférieure de J pour la topologie faible de V donne :

$$\liminf_{r \to 0} J\left(\frac{u + u_r}{2}\right) \geqslant J(u) \qquad (4)$$

D'autre part, la convexité de J et l'inégalité $J(u_r) \leqslant J(u)$ (voir [5]) permettent d'écrire $J\left(\frac{u+u_r}{2}\right) \leqslant J(u)$, d'où, en comparant avec (4) :

$$J(u) \leqslant \liminf J\left(\frac{u+u_r}{2}\right) \leqslant \limsup J\left(\frac{u+u_r}{2}\right) \leqslant J(u)$$

et

$$\lim_{r \to 0} J\left(\frac{u+u_r}{2}\right) = J(u)$$

4e cas : En supposant que G vérifie des hypothèses analogues à celles faites pour J dans l'étude du 1er cas, la convergence forte est également assurée.

La démonstration en est faite au paragraphe suivant car de telles hypothèses permettent une évaluation de l'erreur $\|u_r - u\|$

II-4. Détermination d'une borne supérieure de l'erreur $\|u_r - u\|$

Hypothèses :

(G4) G admet une dérivée Fréchet G' :

$$G(v) - G(u) = (G'(u), v - u) + w(u, v - u)$$

avec

(G5) il existe deux nombres réels $c > 0$ et $\alpha > 1$ tels que

$$w(u, v - u) \geqslant c \|v - u\|^{\alpha}$$

Théorème 3

Si, en plus des hypothèses du paragraphe I, G vérifie (G4) et (G5) alors $\left[\frac{G(u_r)}{c}\right]^{1/\alpha}$ constitue une borne supérieure de l'erreur $\|u_r - u\|$ et, de plus, $u_r \to u$ fortement.

Démonstration du théorème 3

Appliquons l'hypothèse (G4) à $v = u_r$, u désignant la solution du problème (P), c'est-à-dire $G(u) = 0$:

$$G(u_r) = (G'(u), u_r - u) + w(u, u_r - u)$$

Montrons que $(G'(u), u_r - u)$ est positif : soit $A = \{ v \in V \mid J(v) \leqslant J(u) \}$; cet ensemble A est convexe et n'a qu'un seul point commun avec K, à savoir le point u puisque ce point est par définition l'optimum de J sur K. Par conséquent on a $G(v) \geqslant 0 \ \forall v \in A$; u étant le seul élément de A tel que $G(u) = 0$ on en déduit que u est l'optimum de la fonctionnelle convexe G sur le convexe A et donc $(G'(u), v - u) \geqslant 0 \ \forall v \in A$.

Or A contient en particulier les éléments u_r solutions des problèmes (P_r) approchant le problème initial (P) car pour de tels éléments on a $J(u_r) \leqslant J(u)$ ([5]).

La condition $(G'(u), v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in A$ donne donc en l'appliquant à $v = u_r$: $(G'(u), u_r - u) \geqslant 0$.

La relation (5) donne alors

$G(u_r) \geqslant w(u, u_r - u)$ et, d'après l'hypothèse (G5) $c \|u_r - u\|^\alpha \leqslant G(u_r)$, d'où

$\|u_r - u\|^\alpha \leqslant \dfrac{G(u_r)}{c}$ et, comme $G(u_r) \to 0$, on en déduit la convergence forte de u_r vers u, d'où le théorème 3.

REMARQUE 1

D'après le corollaire 1 du paragraphe II, $\dfrac{G(u_r)}{\sqrt{r}} \to 0$ quand $r \to 0$.

Donc $\dfrac{\|u_r - u\|^\alpha}{\sqrt{r}} \to 0$ quand $r \to 0$, ou encore :

$$\|u_r - u\| = 0(r^{1/2\alpha}) \tag{6}$$

REMARQUE 2

Si on considère, par exemple, $G(v) = b(v, v) - L(v)$ avec $L(v)$ forme linéaire continue et $b(v, v)$ forme bilinéaire continue, coercive, l'hypothèse (G5) est bien vérifiée car, d'après la coercivité de $b(u, v)$:

$$w(u, v - u) \geqslant c \|v - u\|^2 \qquad \text{avec} \qquad \alpha = 2$$

La relation (6) montre alors que la convergence n'est pas très rapide car $\|u_r - u\|$ est alors de l'ordre de $\sqrt[4]{r}$.

REMARQUE 3

La relation $\|u_r - u\|^\alpha \leqslant \dfrac{G(u_r)}{c}$ est susceptible d'applications pratiques car elle permet d'indiquer jusqu'où il faut faire décroître r pour obtenir une approximation u_r de u à une précision donnée, par exemple, si l'on veut $\|u_r - u\| \leqslant 10^{-p}$ $(p \in N)$, on fera décroître r jusqu'à ce que la valeur de $G(u_r)$ (théoriquement, calculable) vérifie la condition

$$G(u_r) \leqslant c \times 10^{-\alpha p}$$

Comme en pratique, on ne connaît pas exactement $G(u_r)$, il peut être intéressant de donner une détermination directe de r pour laquelle on aura sûrement la précision souhaitée :

II-5. Détermination de r

Nous supposerons $J(u) > 0$ (en pratique, ceci n'est pas une restriction car on peut s'y ramener en ajoutant à $J(v)$ une constante convenable).

Théorème 4

Si $r \leqslant r_0$ avec $r_0 = \dfrac{G^2(v_0)}{J(v_0) - J(u)}$, la solution u_r du problème (P_r) appartient au convexe K_{v_0} défini par :

$$K_{v_0} = \{ v \in V \mid G(v) \leqslant -G(v_0) \}$$

où v_0 désigne un élément fixé dans K^0 (intérieur de K supposé non vide).

La démonstration, basée sur l'utilisation d'une fonctionnelle auxiliaire $j(v) = J(v) - \dfrac{G(v_0)}{r_0} G(v)$ est faite dans [6].

Choix de r :

La condition $r \leqslant \dfrac{G^2(v_0)}{J(v_0) - J(u)}$ donne une détermination de r dépendant de $J(u)$. En pratique c'est un inconvénient qui peut être évité en supposant précisément $J(u) > 0$: en effet si on choisit $r \leqslant \dfrac{G^2(v_0)}{J(v_0)}$, alors r est sûrement plus petit que r_0 et par conséquent, pour un tel choix de r le théorème 4 donne $u_r \in K_{v_0}$.

Application

Pratiquement, suivant la remarque 3, on veut obtenir $G(u_r) \leqslant c \cdot 10^{-\alpha p}$. Il suffit donc de déterminer un élément v_0 tel que $G(v_0) = -c \times 10^{-\alpha p}$; il est alors possible de calculer $r = \dfrac{G^2(v_0)}{J(v_0)}$ et la solution u_r vérifie sûrement $\|u_r - u\| \leqslant 10^{-p}$

En fait, pour déterminer v_0, on pourra essayer de minimiser $|G(v) + c \times 10^{-\alpha p}|$ ce qui donnera une approximation t_0 de v_0 considérée comme acceptable si $G(t_0) \leqslant -c \times 10^{-\alpha p}$

II-6. Détermination d'une borne inférieure de l'erreur $\|u_r - u\|$

Dans certains cas, il est théoriquement possible de compléter les résultats précédents par la détermination d'une borne inférieure de $\|u_r - u\|$:

Si G vérifie l'hypothèse

(G6) $\quad G(t) - G(v) \leqslant k(t) \|t - v\|^\beta \quad$ avec $\quad k(t) > 0, \beta > 0, \forall t \in V, \forall v \in V$

alors $\dfrac{G(u_r)}{k(u_r)}$ constitue une borne inférieure de $\|u_r - u\|^\beta$

EXEMPLE

L'hypothèse (G6) est vérifiée pour les fonctionnelles G de la forme

$$G(v) = b(v, v) - \beta \qquad \beta \in R^+$$

avec a) $b(v, v) > 0 \qquad \forall v \in V$

b) $b(u, v)$ continue, c'est-à-dire :
il existe $M > 0$ telle que $b(u, v) < M \|u\| \cdot \|v\|$

Alors $G(t) - G(v) = b(t, t - v) + b(t - v, t) - b(v - t, v - t)$ et comme $b(v - t, v - t) \geqslant 0$ on obtient :

$$G(t) - G(v) \leqslant b(t, t - v) + b(t - v, t) \leqslant 2M \|t\| \cdot \|t - v\|$$

L'hypothèse (G6) se trouve donc vérifiée en posant $k(t) = 2M \|t\|$ et $\beta = 1$.

On en déduit que $\dfrac{G(u_r)}{2M \|u_r\|}$ constitue une borne inférieure de $\|u_r - u\|$

REMARQUE

Si, dans l'exemple précédent on suppose $b(u, v)$ coercive, c'est-à-dire $b(v, v) \geqslant c \|v\|^2$ $(c > 0)$, alors, en utilisant ce qui précède et le théorème 3 du paragraphe II, on obtient un encadrement de l'erreur $\|u_r - u\|$:

$$\frac{G(u_r)}{2M \|u_r\|} \leqslant \|u_r - u\| \leqslant \sqrt{\frac{G(u_r)}{c}}$$

III. UNE APPROXIMATION DIRECTE DU PROBLEME (P)

Le problème (P_r) constitue une première approximation du problème (P). Pour approcher le problème (P_r) on pourrait utiliser une méthode de double discrétisation du type de celle développée par Y. Cheurrault dans [3] et obtenir ainsi une approximation en deux temps du problème (P).

On pourrait également essayer les variantes des méthodes que nous avons données dans [5]. Mais ces divers procédés exigent l'emploi de plusieurs paramètres et fournissent une approximation de (P) en plusieurs étapes (au minimum deux étapes).

C'est pourquoi nous nous proposons d'étudier maintenant un procédé approchant (P) en une seule étape : il s'agit d'une approximation directe du problème (P) utilisant simultanément les méthodes de pénalisation et de double discrétisation.

III-1. Hypothèses

Nous supposons que la fonctionnelle J vérifie les hypothèses (J2) et (J3) du paragraphe I et que, de plus : (J8) : sur tout borné B, il existe une constante $M_B > 0$ et un nombre $\beta > 0$ indépendant de B tels que

$$|J(v) - J(w)| \leqslant M_B \|v - w\|^{\beta} \qquad \forall (v, w) \in B \times B$$

(hypothèse analogue à celle formulée par Y. Haugazeau dans [4]).

Pour la fonctionnelle G nous supposons vérifiées les hypothèses (G2) et (G3) du premier paragraphe et, de plus :

(G7) Sur tout borné B, il existe une constante $c_B > 0$ et un nombre $\alpha > 0$ indépendant de B, tels que :

$$|G(v) - G(w)| \leqslant c_B \|v - w\|^\alpha \qquad \forall (v, w) \in B \times B$$

Enfin, nous faisons l'hypothèse

(H1) : $\qquad G(0) \leqslant 0 \qquad$ (c'est-à-dire $0 \in K$)

REMARQUE :

Les hypothèses (J8) et (G7) entraînent la continuité de J et G.

III-2. Définition de la double discrétisation (cf. [3] [4])

1. *Première discrétisation :*

Soit $\{ V_h \}$ une suite de sous-espaces V_h de dimension finie $N(h)$ contenus dans V et dont la réunion est dense dans V (avec $h > 0$).

Si $\{ e_1, e_2, \ldots, e_{N(h)} \}$ désigne une base de V_h, tout vecteur $v_h \in V_h$, s'écrira :

$$v_h = \sum_{i=1}^{N(h)} \alpha_i e_i \qquad (\alpha_i \in \mathbf{R})$$

Dans la suite, on posera

$$\theta(h) = \operatorname{Sup} (\|e_1\|, \|e_2\|, \ldots, \|e_{N(h)}\|)$$

2. *Deuxième discrétisation*

Soit $\{ V_h^\rho \}$ une suite de sous-espaces dont la réunion est dense dans V_h. Plus précisément, V_h^ρ désigne l'ensemble des vecteurs de V_h s'écrivant

$$v_h^\rho = \sum_{i=1}^{N(h)} m_i \rho e_i \qquad \text{avec} \qquad m_i \in \mathbf{Z} \qquad \text{et} \qquad \rho > 0$$

Dans la suite, ρ sera pris fonction de h et on posera $\rho = \rho(h)$.

III-3. Description du procédé d'approximation

On considère d'abord le problème (P_h) associé à la première discrétisation :

(P_h) : trouver $u_h \in V_h$ tel que $J_h(u_h) = \operatorname*{Inf}_{v_h \in V_h} J_h(v_h)$ avec

$$J_h(v_h) = \begin{cases} J(v_h) & \text{si} \quad v_h \in K_h = \{ v_h \mid G(v_h) \leqslant 0 \} \\ J(v_h) + \dfrac{G^2(v_h)}{r(h)} & \text{si} \quad v_h \in \complement K_h \end{cases}$$

avec $r(h)$ fonction croissante de h et $\lim_{h \to 0} r(h) = 0$

On sait alors (voir [5]) que, lorsque $h \to 0$

- $$J(u_h) \to J(u) = \inf_{v \in K} J(v)$$
- $$J_h(u_h) \to J(u)$$
- $$\frac{G^2(u_h)}{r(h)} \to 0$$

(comme $u_h \in \complement k_h$, ce résultat est une conséquence des deux précédents, d'après la définition de J_h).

En considérant maintenant la deuxième discrétisation avec $\rho(h)$, on se propose de montrer que les points u_h^ρ du réseau de pas ρ qui rendent J_h minimum, « approchent » u solution du problème (P) au sens précisé dans le paragraphe suivant.

Il s'agit bien d'une approximation en une seule étape, faisant intervenir uniquement le paramètre h.

III-4. Convergence du procédé

Théorème 5

Si, en plus des hypothèses du paragraphe III-1, on suppose que

$$\lim_{h \to 0} \frac{[N(h)\rho(h)\theta(h)]^\alpha}{r(h)} = 0$$

(hypothèse H2), alors :

les points u_h^ρ rendant J_h minimum sur V_h^ρ sont tels que $J_h(u_h^\rho) \to J(u)$ quand $h \to 0$

(les notations employées sont celles rencontrées dans les paragraphes précédents).

Démonstration :

Soit $u_h \in V_h$ tel que $J_h(u_h) = \inf_{v_h \in V_h} J_h(v_h)$

Alors il existe $w_h^\rho \in V_h^\rho$ « voisin » de u_h, c'est-à-dire tel que

$$\|w_h^\rho - u_h\|_V \leqslant N(h) \frac{\rho(h)}{2} \theta(h) \tag{8}$$

En effet :

par définition, $u_h = \sum_{i=1}^{N(h)} u_i e_i$, $u_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots N(h)$

Alors, u_i étant situé entre deux multiples consécutifs de ρ

$$(m_i \rho \leqslant u_i \leqslant (m_i + 1)\rho, \; m_i \in Z),$$

on remarque que l'on peut trouver $w_h^\rho = \sum_{1}^{N(h)} \alpha_i e_i$ avec

$$|u_i - \alpha_i| \leqslant \frac{\rho(h)}{2} \qquad i = 1, 2, \dots N(h)$$

et,

$$\|w_h^\rho - u_h\| \leqslant \sum_i |u_i - \alpha_i| \, \|e_i\| \leqslant N(h) \frac{\rho(h)}{2} \theta(h) \qquad \text{d'où} \tag{8}$$

Soit d'autre part u_h^ρ un point de V_h^ρ réalisant l'optimum de J_h sur le réseau de pas $\rho(h)$.

Alors, par définition :

$$J_h(u_h) \leqslant J_h(u_h^\rho) \leqslant J_h(w_h^\rho) \tag{9}$$

$$|J_h(u_h^\rho) - J(u)| \leqslant |J_h(u_h^\rho) - J_h(u_h)| + |J_h(u_h) - J(u)| \tag{10}$$

En tenant compte de (9), (10) peut s'écrire :

$$|J_h(u_h^\rho) - J(u)| \leqslant J_h(w_h^\rho) - J_h(u_h) + |J_h(u_h) - J(u)|$$

ou encore, en posant $H(v) = \text{Sup}\,(0, G(v))$:

$$|J_h(u_h^\rho) - J(u)| \leqslant J(w_h^\rho) - J(u_h) + \frac{1}{r(h)} [H^2(w_h^\rho) - H^2(u_h)] + |J_h(u_h) - J(u)|$$

On sait que $\|u_h\|$ est bornée; alors d'après (8), w_h^ρ et u_h appartiennent à un même borné. En utilisant l'hypothèse (J8) et en remarquant que

$$\lim_{h \to 0} N(h)\rho(h)\theta(h) = 0$$

d'après l'hypothèse (H2), on montre facilement que :

$$|J(w_h^\rho) - J(u_h)| \to 0$$

D'autre part, $J_h(u_h) \to J(u)$ quand $h \to 0$ (cf. [5]). Il reste donc à montrer que $\frac{1}{r(h)} [H_{\text{a}}^2(w_h^\rho) - H^2(u_h)] \to 0$ pour achever la démonstration.

Nous envisagerons deux cas :

1er cas $w_h^\rho \in K$

Alors $H^2(w_h^\rho) = 0$; d'autre part, on sait que $G^2(u_h) = H^2(u_h)$. Donc :

$$\frac{1}{r(h)} [H^2(w_h^\rho) - H^2(u_h)] = -\frac{G^2(u_h)}{r(h)} \to 0 \qquad \text{(voir paragraphe III-3)}$$

2e cas $w_h^\rho \notin K$

Alors, par définition de la fonctionnelle H, on a

$$|H^2(w_h^\rho) - H^2(u_h)| = |G(w_h^\rho) - G(u_h)| \times |G(w_h^\rho) + G(u_h)| \tag{11}$$

Les hypothèses (H1) et (G7) montrent que sur tout borné B contenant 0, on a :

$$|G(v) - G(0)| \leqslant c_B \|v\|^\alpha$$

ce qui donne pour $v \in \complement K$

$$G(v) \leqslant c_B \|v\|^\alpha + G(0) \tag{12}$$

La relation (12) s'applique en particulier à w_h^ρ et u_h puisque l'on sait que $\|w_h^\rho\|$ et $\|u_h\|$ sont bornées.

On en déduit alors que

$$|G(w_h^\rho) + G(u_h)| \quad \text{est bornée}$$

D'autre part, d'après (G7), il existe un nombre c_B tel que

$$|G(w_h^\rho) - G(u_h)| \leqslant c_B \|w_h^\rho - u_h\|^\alpha \leqslant c_B \left[N(h)\frac{\rho(h)}{2}\theta(h)\right]^\alpha$$

D'après l'hypothèse H2, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[N(h)\rho(h)\theta(h)]^\alpha}{r(h)} = 0$, donc

$$\frac{1}{r(h)}|G(w_h^\rho) - G(u_h)| \to 0$$

D'après la relation (11), on en déduit que

$$\frac{1}{r(h)}|H^2(w_h^\rho) - H^2(u_h)| \to 0 \qquad \text{quand } h \to 0$$

La propriété est donc démontrée dans les deux cas, d'où le théorème 5.

Théorème 6

$u_h^\rho \to u$ faiblement quand $h \to 0$

Démonstration du théorème 6.

D'après le théorème 5, $J_h(u_h^\rho) \to J(u)$ donc $J_h(u_h^\rho)$ est bornée.

On en déduit que $\|u_h^\rho\| < c$ sinon $\|u_h^\rho\| \to +\infty$ $J(u_h^\rho) \to +\infty$ d'après l'hypothèse (J3) et $J_h(u_h^\rho) \to +\infty$ puisque $J_h(u_h^\rho) \geqslant J(u_h^\rho)$, d'où contradiction.

Comme $\|u_h^\rho\| < c$ et que V est réflexif, on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement vers s (cf. [2]).

J étant convexe et continu, J est semi-continue inférieurement pour la topologie faible, d'où :

$$\liminf J(u_h^\rho) \geqslant J(s)$$

Mais $J_h(u_h^\rho) \geqslant J(u_h^\rho) \Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} J_h(u_h^\rho) \geqslant \liminf\limits_{h \to 0} J(u_h^\rho)$ d'où, puisque

$$J_h(u_h^\rho) \to J(u)$$

quand $h \to 0$:

$$J(u) \geqslant \liminf J(u_h^\rho) \geqslant J(s) \tag{13}$$

Montrons maintenant que $s = u$.

Pour cela, montrons d'abord que $s \in K$. En effet, dans le cas contraire, $\forall \alpha_0 > 0$, $\exists h_0$ tel que

$$h < h_0 \Rightarrow G(u_h^\rho) > \alpha_0$$

et

$$J_h(u_h^\rho) = J(u_h^\rho) + \frac{G^2(u_h^\rho)}{r(h)} > J(u_h^\rho) + \frac{\alpha_0^2}{r(h)}$$

et quand $h \to 0$, on aurait $J_h(u_h^\rho) \to +\infty$, d'où contradiction et donc $s \in K$.

D'après (13), $J(u) \geqslant J(s)$; comme $s \in K$, $s = u$ sinon u ne serait plus l'optimum de J sur K.

La démonstration a été faite en envisageant le cas où $u_h^\rho \notin K$.

Dans le cas où u_h^ρ demeure dans K la propriété $s \in K$ est évidente puisque K est faiblement fermé.

Pour n'importe quelle sous-suite extraite de la suite u_h^ρ, on pourra trouver une sous-suite rentrant dans l'un des deux cas précédents et convergeant par conséquent faiblement vers l'élément u unique.

Il en résulte, d'après un raisonnement classique, que la suite u_h^ρ elle-même converge faiblement vers u, d'où le théorème 6.

Remarque

Les théorèmes précédents demeurent valables si à l'espace V on associe une suite de sous-espaces V_h de dimension finie $N(h)$ tels que $\bigcup\limits_{h>0} \{ p_h V_h \}$ soit dense dans V, p_h désignant un opérateur de prolongement : $p_h \in \mathcal{L}(V_h, V)$ (voir [1]).

Le convexe K_h sera défini par

$$K_h = \{ v_h \in V_h \mid p_h v_h \in K \}$$

On posera $F(v_h) = J(p_h v_h)$ et on adoptera à F les démonstrations précédentes. L'hypothèse (H2) devra être modifiée de la manière suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{[N(h)\rho(h)S(h)]^\alpha}{r(h)} = 0$$

où $S(h)$ désigne la constante de stabilité, dépendant de h $\Big($l'existence de $S(h)$ vient du fait que l'on peut définir sur V_h deux normes équivalentes : d'une part $\|v_h\|_h = \|p_h v_h\|_V$ et d'autre part $|v_h|_h = \sqrt{\Sigma \alpha_i^2}$ (par exemple) avec $v_h = \sum_1^{N(h)} \alpha_i e_i\Big)$

Avec ces notations, les théorèmes 5 et 6 deviennent

$$J_h(p_h u_h^\rho) \to J(u) \qquad \text{quand } h \to 0$$

$$p_h u_h^\rho \to u \qquad \text{faiblement dans } V$$

Nous nous proposons maintenant d'étudier ce qui devient le procédé d'approximation qui vient d'être décrit dans ce paragraphe lorsque l'on considère des fonctions de n variables (et non plus des fonctionnelles).

IV. CAS DES FONCTIONS DE n VARIABLES

IV-1. Hypothèses

(H3) Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, continue, strictement convexe et telle que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

(H4) Soit $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, convexe, telle que sur tout borné B il existe une constante c_B telle que

$$|g(x) - g(y)| \leqslant c_B \|x - y\|^\alpha \qquad \alpha > 0 \qquad \forall x, y \in B$$

(H5) On suppose que le convexe $K = \{ x \mid g(x) \leqslant 0 \}$ a un intérieur non vide.

IV-2. Le problème (P)

Rappelons qu'il s'agit de trouver $u \in K$ tel que

$$f(u) = \inf_{v \in K} f(v)$$

IV-3. Description du procédé d'approximation directe

Comme dans le paragraphe II, on approche (P) par le problème (P_r) : « trouver $u_r \in \mathbf{R}^n$ tel que $f_r(u_r) = \inf f_r(v)$ avec

$$f_r(v) = \begin{cases} f(v) & \text{si} \quad v \in K \\ f(v) + \dfrac{g^2(v)}{r} & \text{si} \quad v \in \complement K \qquad (r > 0) \end{cases}$$

D'autre part, pour tout r on se donne un nombre positif $\rho(r)$ auquel on associe l'espace V^ρ des vecteurs de $\mathbf{R}^n$ de la forme $v_\rho = \sum_{i=1}^{n} m_i \rho(r) e_i$ avec $m_i \in Z$ $i = 1, 2, \dots n$ et $e_1, e_2, \dots e_n$ une base de $\mathbf{R}^n$.

Il s'agit ici d'une simple discrétisation (et non d'une double discrétisation comme dans le cas des fonctionnelles).

Nous supposerons $\mathbf{R}^n$ muni de la norme $\|x\| = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ avec

$$x = (x_1, x_2, \dots x_n).$$

On va maintenant considérer les points u_r^ρ qui rendent $f_r(v)$ minimum sur V^ρ et montrer que ces points convergent vers u solution de (P).

Donc, au lieu d'envisager une approximation de u en deux temps qui consisterait à approcher u par u_r et u_r par des points de V^ρ, on approche directement u par des points de V^ρ en prenant ρ fonction de r.

IV-4. Convergence du procédé

Si en plus des hypothèses IV-1, on fait l'hypothèse $\lim_{r \to 0} \frac{[\rho(r)]^{2\alpha}}{r} = 0$, alors on a le théorème :

Théorème :

$$f_r(u_r^\rho) \to f(u) \text{ et } u_r^\rho \to u \text{ quand } r \to 0$$

(u_r^ρ désigne comme précédemment l'un des points de V^ρ rendant $f_r(v)$ minimum).

Démonstration

D'après la définition de V^ρ, il existe $w^\rho \in V^\rho$ tel que

$$\|u - w^\rho\| \leqslant \frac{1}{2}\rho(r).$$

En effet, les coordonnées de u sont toutes situées entre deux multiples entiers successifs de $\rho(r)$ ce qui signifie que l'écart entre une coordonnée de u et un multiple de ρ peut être rendu inférieur ou égal à $\frac{1}{2}\rho$.

Par définition de u_r^ρ, on aura alors

$$f_r(u_r^\rho) \leqslant f_r(w^\rho)$$

D'autre part :

$$|f_r(u_r^\rho) - f(u)| \leqslant |f_r(u_r^\rho) - f_r(u_r)| + |f_r(u_r) - f(u)| \tag{14}$$

Mais, par définition de u_r, $f_r(u_r^\rho) - f_r(u_r) \geqslant 0$, d'où la relation (14) s'écrit

$$|f_r(u_r^\rho) - f(u)| \leqslant f_r(u_r^\rho) - f_r(u_r) + |f_r(u_r) - f(u)|$$
$$\leqslant f_r(w^\rho) - f_r(u_r) + |f_r(u_r) - f(u)|$$

ou encore :

$$|f_r(u_r^\rho) - f(u)| \leqslant f_r(w^\rho) - f(u) + 2(f(u) - f_r(u_r)) \tag{15}$$

car on sait que $f_r(u_r) \leqslant f(u)$.

Comme $f_r(u_r) \to f(u)$ quand $r \to 0$, il suffit, d'après (15), de montrer que $f_r(w^\rho) - f(u) \to 0$.

En posant $h(v) = \sup(0, g(v))$, on remarque que $f_r(w^\rho)$ s'écrit

$$f_r(w^\rho) = f(w^\rho) + \frac{1}{2} h^2(w^\rho)$$

Comme u est tel que $g(u) = 0$, $h(w^\rho) - h(u) = h(w^\rho)$ D'après l'inégalité $\|w^\rho - u\| \leqslant \frac{1}{2}\rho(r)$, w^ρ et u appartiennent à un même borné B et d'après l'hypothèse (H4), si $w^\rho \in \complement K$ il existe c_B tel que

$$|h(w^\rho) - h(u)| = |g(w^\rho) - g(u)| = |g(w^\rho)|$$
$$\leqslant c_B \|w^\rho - u\|^\alpha$$

Dans le cas où $w^\rho \in K$, $h(w^\rho) = 0$. Par conséquent dans les deux cas, on peut écrire

$$h(w^\rho) \leqslant c_B \|w^\rho - u\|^\alpha$$

et

$$h^2(w^\rho) \leqslant c_B^2 \|w^\rho - u\|^{2\alpha} \leqslant c_B^2[\rho(r)]^{2\alpha}$$

Par hypothèse, $\dfrac{[\rho(r)]^{2\alpha}}{r} \to 0$. Donc $\dfrac{h^2(w_\rho)}{r} \to 0$ quand $r \to 0$.

D'autre part, comme $\rho(r) \to 0$, l'inégalité $\|w^\rho - u\| \leqslant \frac{1}{2}\rho(r)$ montre que $w^\rho \to u$; f étant continue, on en déduit que $f(w^\rho) \to f(u)$.

Donc $f_r(w^\rho) \to f(u)$ et d'après (15), on en déduit que $|f_r(u_r^\rho) - f(u)| \to 0$ quand $r \to 0$.

Montrons maintenant que $u_r^\rho \to u$, ce qui achèvera la démonstration du théorème :

$f_r(u_r^\rho)$ étant bornée, $\|u_r^\rho\| < c$. On en déduit que l'on peut extraire une sous-suite convergeant vers un élément s.

Montrons que $s = u$.

On remarque que $s \in K$, sinon $f_r(u_r^\rho) \to +\infty$ quand $r \to 0$.

Donc $f(u_r^\rho) \to f(s) \geqslant f(u)$ (or $u_r^\rho \to s \in K$)

Mais $f_r(u_r^\rho) \geqslant f(u_r^\rho)$ $\forall r$ entraîne :

$$\lim_{r \to 0} f_r(u_r^\rho) \geqslant \lim_{r \to 0} f(u_r^\rho)$$

soit $f(u) \geqslant f(s)$.

On a donc $f(s) \geqslant f(u) \geqslant f(s)$, d'où $f(s) = f(u)$ et $s = u$ puisque u est unique. On en déduit alors que la suite u_r^ρ elle-même converge vers u, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. Aubin, *Thèse*, Paris, 1966.

[2] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques* (Hermann).

[3] Y. Cherruault, « Une méthode directe de minimisation et applications » (*R.I.R.O.*, n° 10, 1968).

[4] Y. Haugazeau, *Thèse*, Paris, 1968.

[5] P. Loridan, *Approximation de problèmes d'optimisation avec contraintes*, juin 1968 (publication de la faculté des Sciences de Lille, complétée par thèse de 3e cycle, Lille, 1969).

[6] P. Loridan, *Séminaire Y. Cherruault*, séance du 21 janvier 1970 (Département de Mathématiques U.E.R. de Montrouge).