REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE, SÉRIE ROUGE

MARC PETIT

Brèves communications. Une propriété des fonctions splines d'ajustement

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge, tome 5, n° 2 (1971), p. 137-140.

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_2_137_0>

R.I.R.O.
(5e année, R-2, 1971, p. 137-140)

UNE PROPRIETE DES FONCTIONS SPLINES D'AJUSTEMENT

par Marc PETIT [1]

Résumé. — *On cherche des fonctions splines* $\sigma_\rho(x)$ *qui minimisent la quantité*

$$\int_a^b [f^{(q)}(x)]^2 \, dx + \rho \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 \quad , \quad f \in H^q[a, b]$$

(où ρ *est un coefficient positif).*

On montre que pour certains jeux d'abscisses $x_i, i = 1, \ldots, n$*, appartenant à* $[a, b]$*, les fonctions* $\sigma_\rho(x)$ *ont, en certaines abscisses, des valeurs constantes, indépendantes de* ρ.

I. Certaines méthodes classiques d'analyse numérique telles que l'interpolation, l'ajustement, la résolution d'équations différentielles, trouvent une application originale dans des programmes utilisant un terminal graphique [1]. Ce terminal sert à visualiser les résultats et permet à l'utilisateur, au moyen de certains dispositifs, de converser avec son programme. Par ce dialogue, l'utilisateur peut modifier la valeur de certains paramètres et voir, sur l'écran du terminal, l'effet de cette modification. Travaillant actuellement sur un programme permettant d'obtenir des fonctions splines dépendant d'un paramètre, ajustant un certain nombre de points, on a pu constater que pour certains jeux d'abscisses, les diverses courbes obtenues avaient tendance à passer par un ou plusieurs points fixes et ceci pour de grandes variation du paramètre.

On a cherché à formaliser cette propriété et on est arrivé aux résultats suivants :

II. Étant donné n abscisses fixes et distinctes de l'intervalle $[a, b]$

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$$

(1) Institut de Mathématiques Appliquées, Grenoble.

et n nombres réels y_i, $i = 1, ..., n$, et si l'on considère la fonction « spline d'ajustement » d'ordre q ($n \geqslant q$) définie par :

$$\sigma_\rho(x) = \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_j \cdot x^j + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_i \cdot \frac{(x - x_i)_+^{2q-1}}{(2q-1)!} \quad , \quad x \in [a, b] \tag{1}$$

$$\sigma_\rho(x_i) + \frac{(-1)^q}{\rho} \cdot \mathrm{d}_i = y_i \quad , \quad i = 1, ..., n \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_i \cdot (x_i)^k = 0 \quad , \quad k = 0, 1, ..., (q-1) \tag{3}$$

on montre [2] que $\sigma_\rho(x)$ minimise la quantité

$$\int_a^b [f^{(q)}(x)]^2 \,\mathrm{d}x + \rho \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 \quad , \quad f \in H^q[a, b]$$

(avec $\rho > 0$).

On se propose de prouver le théorème suivant :

Théorème. — Il existe des jeux d'abscisses x_i, $i = 1, ..., n$, pour lesquels les fonctions $\sigma_\rho(x)$ ont, en certaines abscisses, des valeurs constantes, indépendantes de ρ.

Démonstration

L'expression (1) dépend de $n + q$ paramètres α_j, $j = 0, 1, ... (q-1)$ et d_i, $i = 1, ..., n$, d'autre part les expressions (2) et (3) conduisent à un système linéaire de $n + q$ relations linéaires entre ces $n + q$ paramètres. Tout calcul fait et en introduisant les notations suivantes :

$$B = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^{q-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^{q-1} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^{q-1} \end{vmatrix} , \quad D = \begin{vmatrix} \mathrm{d}_1 \\ \mathrm{d}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathrm{d}_n \end{vmatrix} , \; Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{vmatrix} , \; \alpha = \begin{vmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{q-1} \end{vmatrix}$$

$$K = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{(x_2 - x_1)^{2q-1}}{(2q - 1!} & 0 & \dots & 0 \\ & & & \\ \dfrac{(x_n - x_1)^{2q-1}}{(2q-1)!} & \dfrac{(x_n - x_2)^{2q-1}}{(2q-1)!} & & 0 \end{vmatrix} \quad \Psi(x) = \begin{vmatrix} \dfrac{(x - x_1)_+^{2q-1}}{(2q-1)!} \\ \dfrac{(x - x_2)_+^{2q-1}}{(2q-1)!} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{(x - x_n)_+^{2q-1}}{(2q-1)!} \end{vmatrix} , \; \mu(x) = \begin{vmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^{q-1} \end{vmatrix}$$

Les vecteurs D et α sont déterminés par le système

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{(-1)^q}{\rho} I + K\right] D + B\alpha = Y \\ &B^T D \qquad\qquad\qquad\quad = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

multiplions à gauche la première relation de (4) par B^T

$$\frac{(-1)^q}{\rho} B^T D + B^T K D + B^T B \alpha = B^T Y$$

en tenant compte de la deuxième relation de (4), on obtient le système

$$\left.\begin{aligned} &B^T K D + B^T B \alpha = B^T Y \\ &B^T D \qquad\qquad\quad = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Soient U et V deux vecteurs quelconques de R^q :

$$U = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_q \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_q \end{vmatrix}$$

On forme alors les combinaisons linéaires entre les vecteurs D et α, indépendantes de ρ, en écrivant :

$$U^T B^T K D + U^T B^T B \alpha + V^T B^T D = U^T B^T Y$$

ou

$$U^T B^T B \alpha + (U^T B^T K + V^T B^T) D = cte \text{ (indépendante de } \rho) \tag{6}$$

Or, avec les notations introduites précédemment (1), peut s'écrire :

$$\sigma_\rho(x) = \mu^T(x) \cdot \alpha + \Psi^T(x) \cdot D \tag{7}$$

si l'on a

$$\sigma_\rho(x) = \text{cte} \qquad \forall \rho > 0$$

on aura

$$\mu^T(x) \cdot \alpha + \Psi^T(x) \cdot D = cte \quad \forall \rho > 0$$

Ceci est une expression linéaire entre les vecteurs D et α; or toutes les expressions linéaires en D et α sont données par (4), en particulier, il existera deux vecteurs U et V tels que

$$\mu^T(x) \cdot \alpha + \Psi^T(x) \cdot D = U^T B^T B \alpha + (U^T B^T K + V^T B^T) D$$

en identifiant terme à terme on obtient :

$$\mu^T(x) = U^T B^T B$$

$$\Psi^T(x) = U^T B^T B + V^T B^T$$

ou encore

$$\left.\begin{aligned} \mu(x) &= B^T B U \\ \Psi(x) &= BV + K^T B U \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ce qui peut être considéré comme un système de $n + q$ équations entre $(U, V, x, x_i x_2, ..., x_n)$, c'est-à-dire $2q + n + 1$ inconnues.

REMARQUE. — Si les graphes σ_ρ ont un ou plusieurs points fixes correspondant à un jeu d'abscisses x_i, $i = 1, ..., n$, alors pour tout choix des (y_i), l'abscisse de ce ou ces points reste constante.

Il suffit de remarquer que les relations données par (8) ne font pas intervenir Y pour la détermination de x, U et V.

Pour déterminer ces points, on dispose de $n + q$ relations données par (8) et de $n + 2q + 1$ inconnues qui sont : x, x_i, U et V. On peut s'en fixer q *a priori* et déterminer les $n + q$ restantes, dépendantes d'un paramètre arbitraire. En général, on se fixera *a priori* q abscisses.

On peut expliciter les calculs sur un cas simple ($n = 3$, $q = 2$), en prenant les données suivantes :

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 1 \quad , \quad x_3 = 2$$

on obtient deux points fixes pour les graphes de σ_ρ, dont les abscisses sont

$$\xi_1 = 0{,}2260739 \qquad \text{et} \qquad \xi_2 = 1{,}773926$$

REFERENCES

[1] IBM System/360 Component description, A27.2701—IBM 2250 display unit model 1.

[2] P. J. LAURENT, *Approximation et optimisation*, chapitre IV, Hermann (à paraître).