

C. BROUDISCOU

**Brève communication. Résolution par variation  
récurrente du paramètre, d'équations linéaires  
dans un espace de Banach**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge*, tome 5, n<sup>o</sup> 3 (1971), p. 73-81.

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1971\\_\\_5\\_3\\_73\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_3_73_0)

© AFCET, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**RESOLUTION,  
PAR VARIATION RECURRENTTE DU PARAMETRE,  
D'EQUATIONS LINEAIRES  
DANS UN ESPACE DE BANACH**

par C. BROUDISCOU (1)

*Résumé. — On démontre que la résolution de l'équation linéaire  $\varphi = f + \lambda K\varphi$  ( $K$  opérateur compact d'un espace de Banach  $X$  dans lui-même,  $f \in X$  donné,  $\varphi \in X$  inconnue,  $\lambda$  valeur régulière pour  $K$ ) est équivalente à celle d'un problème récurrent basé sur la détermination de l'opérateur résolvant le long d'une « route régulière ». Un théorème de convergence est établi, des équations de propagation d'erreur mises en évidence et des résultats numériques donnés.*

Soient  $X$  un espace de Banach sur  $\mathbb{C}$  (norme notée  $||\cdot||$ ) et  $K$  un opérateur linéaire borné de  $X$  dans lui-même (nous notons  $||\cdot||$  la norme dans  $L(X)$ )

Considérons l'équation

$$(1) \quad \varphi = f + \lambda K\varphi \quad \lambda \in \mathbb{C}, f \text{ donnée dans } X, \varphi \in X \text{ inconnue.}$$

Nous savons [1] que si  $\lambda$  est une valeur régulière pour  $K$ , l'unique solution de (1) est donnée par la relation :

$$(2) \quad \varphi = (I - \lambda K)^{-1} f = (I + \lambda R_\lambda) f$$

l'opérateur  $R_\lambda$  défini par

$$(3) \quad (I - \lambda K)^{-1} = I + \lambda R_\lambda$$

étant appelé le résolvant de  $K$  [2].

---

(1) Maître-assistant, INSA, Toulouse, avenue de Rangueil.

## I. RELATION FONCTIONNELLE FONDAMENTALE VERIFIÉE PAR LE RESOLVANT ET LA SOLUTION

**Définition 1 :** Nous appelons route régulière associée à la valeur régulière  $\lambda$ , toute route du plan complexe de longueur finie qui joint l'origine à  $\lambda$  et ne contient aucune valeur singulière.

**Théorème 1 :** Si  $\lambda_1$  et  $\lambda$  sont deux valeurs régulières pour l'opérateur  $K$ , il y a équivalence entre les équations :

$$(1) \quad \varphi = f + \lambda K\varphi$$

et

$$(4) \quad \tau_\lambda = \tau_{\lambda_1} + (\lambda - \lambda_1)R_{\lambda_1}\tau_{\lambda_1}$$

où  $\tau_{\lambda_1}$  est la solution de (1) pour  $\lambda = \lambda_1$ ,  $R_{\lambda_1}$  l'opérateur résolvant associé.

Le résolvant  $R_\lambda$  est l'unique solution bornée de l'équation :

$$(5) \quad \Gamma_\lambda = R_{\lambda_1} + (\lambda - \lambda_1)R_{\lambda_1}\Gamma_\lambda$$

**Théorème 2 :** Pour toute valeur régulière  $\lambda_M$ , telle qu'il existe au moins une route régulière  $C_{\lambda_M}$  associée, la résolution de l'équation

$$(1) \quad \varphi = f + \lambda_M K\varphi$$

est équivalente à celle du système récurrent :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_k = \varphi_{k-1} + (\lambda_k - \lambda_{k-1})\Gamma_{k-1}\varphi_k \quad \varphi_0 = f \\ \Gamma_k = \Gamma_{k-1} + (\lambda_k - \lambda_{k-1})\Gamma_{k-1}\Gamma_k \quad \Gamma_0 = K \end{array} \right. \quad k = 1(1)M$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_k = \varphi_{k-1} + (\lambda_k - \lambda_{k-1})\Gamma_{k-1}\varphi_k \quad \varphi_0 = f \\ \Gamma_k = \Gamma_{k-1} + (\lambda_k - \lambda_{k-1})\Gamma_{k-1}\Gamma_k \quad \Gamma_0 = K \end{array} \right. \quad k = 1(1)M$$

les  $\lambda_k$  étant  $M - 1$  points de  $C_{\lambda_M}$ .

$\Gamma_M$  est le résolvant associé à  $\lambda_M$ ,  $\varphi_M$  la solution de (1).

Les deux relations de récurrence (6) et (7) permettent de calculer la valeur du résolvant et de la solution en  $\lambda + h$  connaissant leur valeur en  $\lambda$ . En partant des valeurs  $K$  du résolvant et  $f$  de la solution en  $\lambda = 0$ , on peut espérer atteindre la solution en une valeur régulière quelconque, en suivant une route régulière.

Nous mettons ainsi en évidence un problème de condition initiale équivalent au problème posé; sa résolution demande l'existence d'une route régulière  $C_{\lambda_M}$  associée à la valeur  $\lambda_M$  pour laquelle nous voulons traiter le problème (1); nous sommes en particulier assurés de l'existence de telles routes si  $K$  est compact. En pratique nous n'utilisons que des routes en créneaux, formées de segments parallèles aux axes du plan complexe.

## II. FORMULES D'APPROXIMATION

Pour le problème initial  $(u, G, v)$ ,  $u$  étant une valeur régulière pour  $G \in L(X)$ ,  $v \in X$ , soit  $(\rho, \sigma)$  la solution du système :

$$(8) \quad r(\lambda) = G + (\lambda - u)Gr(\lambda)$$

$$(9) \quad s(\lambda) = v + (\lambda - u)Gs(\lambda)$$

$\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $|\lambda - u| \cdot \|G\| < 1$  ce qui assure existence et unicité de la solution de (8) (9). Définissons les suites :

$$(10) \quad \begin{cases} \rho_0(h) = G \\ \rho_{i+1}(h) = G + hG\rho_i(h) \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} \sigma_0(h) = v \\ \sigma_{i+1}(h) = v + hG\sigma_i(h) \end{cases} \quad i = 0(1)l - 1$$

avec  $\lambda = u + h$ ,  $l \in \mathbb{N}$ .

Posons

$$\tilde{\Phi}(u, G; h) = G\rho_{l-1}(h), \quad \Phi(u, G, v; h) = G\sigma_{l-1}(h)$$

alors

$G + h\tilde{\Phi}(u, G; h)$  et  $v + h\Phi(u, G, v; h)$  approchent respectivement  $\rho(u + h)$  et  $\sigma(u + h)$  avec une erreur en  $(|h| \|G\|)^{l+1}$ .

Pour calculer la solution en  $\lambda_M$  on choisit sur une route régulière  $C_{\lambda_M}$  une suite de valeurs  $\lambda_k$  avec

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + h_k \quad k = 0(1)M - 1$$

puis on construit les suites

$$(12) \quad \begin{cases} \mu_0 = K \\ \mu_{k+1} = \mu_k + h_k \tilde{\Phi}(\lambda_k, \mu_k; h_k) \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} \nu_0 = f \\ \nu_{k+1} = \nu_k + h_k \Phi(\lambda_k, \mu_k, \nu_k; h_k) \end{cases} \quad k = 0(1)M - 1$$

$\mu_M$  et  $\nu_M$  sont respectivement les approximations de  $R_{\lambda_M}$  et  $\tau_{\lambda_M}$ .

### III. CONVERGENCE DE LA METHODE

Notons

$$\tilde{E}_k = \tilde{E}(\lambda_k; h) = \mu_k - R_{\lambda_k}$$

$$E_k = E(\lambda_k; h) = v_k - \tau_{\lambda_k}$$

les erreurs globales,

$$\tilde{\delta}(u, G; h) = -G^{l+2} = h^{-(l+1)}(\rho_l - \rho_{l+1}),$$

$$\delta(u, G, v; h) = -G^{l+1}v = h^{-(l+1)}(\sigma_l - \sigma_{l+1})$$

les fonctions principales d'erreur.

Pour étudier la convergence nous considérons des valeurs fixes  $\lambda_j \in C_{\lambda_M}$ , en nombre fini  $M$ , extrémités des différents segments de droite formant  $C_{\lambda_M}$  ou éventuellement points de division d'un segment en sous-segments.

*Définition 2.2.1* : Soient une route régulière en créneaux  $C_{\lambda_M}$ , de longueur  $L$ ,  $N$  points fixes  $\lambda_j$  de  $C_{\lambda_M}$ ,  $L_j$  longueur du segment  $[\lambda_{j-1}, \lambda_j]$ ,  $h_j$  le pas utilisé sur ce segment,  $n_j$  le nombre de pas.

Une méthode définie par les fonctions incrément  $\{\tilde{\Phi}, \Phi\}$  est convergente si,  $\forall K \in L(X)$ ,  $\forall f \in X$ ,  $\forall \lambda \in C_{\lambda_M}$

$$(2.2.13) \quad \lim_{h \rightarrow 0} ||v_{m_p} - \tau_\lambda|| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} |||\mu_{m_p} - R_\lambda||| = 0$$

$$\text{avec } n_j |h_j| = L_j \quad j = 1(1)p, \quad h = \text{Max}_j |h_j|$$

$v_{m_p}, \mu_{m_p}$  étant les approximations obtenues pour  $\tau_\lambda$  et  $R_\lambda$  respectivement.

Si la convergence est obtenue sous la condition

$$L < C$$

$C$  constante positive dépendant de  $K, \tilde{\Phi}$  et  $\Phi$ , la méthode est dite *localement* convergente.

Les deux propositions :

**Proposition 1 :** Soient  $C_{\lambda_M}$ , une route régulière de longueur  $L$ ,  $\{\mu_k\}$  la suite construite à partir de  $\tilde{\Phi}$  dans les conditions de la définition 2 pour approcher  $R_{\lambda_M}$ .

Si

$$(14) \quad L \cdot |||K||| < 1$$

alors

$$|||\mu_k||| < \tilde{N} \quad \forall k \in [0, M]$$

$\tilde{N}$  constante positive ne dépendant que de  $L$  et  $|||K|||$ .

**Proposition 2 :** Dans les conditions de la définition 2, si  $|||\mu_k||| < \tilde{N}$  sur  $C_{\lambda_M}$ , alors pour  $|h| < h_0$  :

$$(15) \quad i) \quad |||\tilde{\Phi}(\lambda, R_{\lambda_k}; h) - \tilde{\Phi}(\lambda, \mu_{\lambda_k}; h)||| \leq \tilde{M}_l |||\tilde{E}_{\lambda_k}|||$$

avec

$$\tilde{M}_l = \sum_{j=0}^{l-1} |h_0|^j [R + \tilde{N}]^{j+1}, \quad R = \text{Max}_{\lambda \in C_{\lambda_M}} |||R_\lambda|||$$

ii)

$$(16) \quad |||\Phi(\lambda^1, R_{\lambda_k}, \tau_{\lambda_k}; h) - \Phi(\lambda, \mu_{\lambda_k}, \nu_{\lambda_k}; h)||| \leq M_l |||E_{\lambda_k}||| + P_l |||\tilde{E}_{\lambda_k}|||$$

avec

$$M_l = \sum_{j=0}^{l-1} |h|_0^j \tilde{N}^{j+1}, \quad P_l = T \sum_{j=0}^{l-1} |h|_0^j (R + \tilde{N})^j, \quad T = \text{Max}_{\lambda \in C_{\lambda_M}} |||\tau_\lambda|||$$

permettent alors d'établir le théorème de convergence locale.

**Théorème 3.** Soient  $X$  un espace de Banach,  $K \in L(X)$ ,  $C_{\lambda_M}$  une route régulière pour  $K$ . Alors, au sens de la définition 2, la méthode définie par  $\{\tilde{\Phi}, \Phi\}$  est localement convergente sur  $C_{\lambda_M}$  avec la condition

$$L < \frac{1}{|||K|||}$$

puis le théorème de convergence,

**Théorème 4 :** Si  $C_{\lambda_M}$  est une route régulière pour  $K$ , alors la méthode définie par  $\{\tilde{\Phi}, \Phi\}$  est, au sens de la définition 2, convergente quel que soit  $\lambda \in C_{\lambda_M}$ .

#### IV. ETUDE DE L'ERREUR

Telles qu'elles ont été définies en (8) et (9) les formules d'approximation sont d'ordre  $l$ . L'étude du comportement asymptotique de l'erreur montre que les erreurs globales sont en  $|h|^l$ . Le théorème 4 précise la propagation de l'erreur :

**Théorème 5 :** Sous les hypothèses du théorème 3, les erreurs  $\tilde{E}_M$  et  $E_M$  résultant de l'utilisation de la méthode déterminée par  $\tilde{\Phi}$  et  $\Phi$  pour approcher  $R_\lambda$  et  $\tau_\lambda$  à partir des conditions initiales  $(0, K, f)$  satisfont, au sens de la convergence définie précédemment, aux propriétés :

$$(19) \quad \tilde{E}_M = |h|^l \tilde{E} + 0(|h|^{l+1})$$

$$(20) \quad E_M = |h|^l E + 0(|h|^{l+1})$$

où  $\tilde{E}$  et  $E$  sont les solutions pour le problème de conditions initiales  $(0, 0, 0)$  des équations :

$$(21) \quad \tilde{\gamma}_{n+1} = \tilde{\gamma}_n + (\lambda_{n+1} - \lambda_n)(\tilde{\delta}_{\lambda_n} + 2R_{\lambda_n} \tilde{\gamma}_{\lambda_{n+1}})$$

$$(22) \quad \xi_{n+1} = \xi_n + (\lambda_{n+1} - \lambda_n)(\delta_{\lambda_n} + R_{\lambda_n} \xi_{n+1} + \tau_{\lambda_n} \tilde{\gamma}_{n+1})$$

$\tilde{\delta}_{\lambda_n}$  et  $\delta_{\lambda_n}$  fonctions principales d'erreur associées à  $\tilde{\Phi}$  et  $\Phi$ .

Les relations de récurrence définies pour  $k = 0$  (1)  $M - 1$  par

$$(23) \quad \tilde{E}_{k+1} = \tilde{E}_k + 2h_k \mu_k \tilde{E}_k + h_k^{l+1} \tilde{\delta}_k, \tilde{E}_0 = 0$$

$$(24) \quad E_{k+1} = E_k + h_k [\mu_k E_k + \nu_k \tilde{E}_k] + h_k^{l+1} \delta_k, E_0 = 0$$

sont appelées équations discrètes de propagation de l'erreur.

#### V. APPLICATIONS

##### 1. Résolution de systèmes linéaires et inversions de matrices

Soit à résoudre le système linéaire

$$(25) \quad Ax = a$$

Posons

$$(26) \quad A_\lambda = I - \lambda H \quad \text{avec} \quad H = I - A$$

La solution de (25) est obtenue en traitant par la méthode exposée ci-dessus ( $\lambda$  variant de 0 à 1), le système

$$x = a + \lambda Hx.$$

Les équations de propagation d'erreur fournissent une évaluation de l'erreur commise sur chaque élément de la matrice inverse.

## 2. Equations intégrales linéaires de Fredholm de 2<sup>e</sup> espèce

Soient  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbf{R}^n$ ,  $k(x, y) \in D_p(\Omega)$  ( $1 < p < +\infty$ ) (resp.  $T(\bar{\Omega})$ ). L'opérateur linéaire  $K$  défini sur  $L_p(\Omega)$  (resp.  $C(\bar{\Omega})$ ) par

$$K \cdot = \int_{\Omega} k(x, y) \cdot dy$$

est un opérateur intégral compact dont le résolvant associé est lui aussi un opérateur intégral.

Les résultats précédents sont utilisables.

Leur mise en œuvre sera tributaire d'une formule d'intégration numérique, choisie de façon à ce que l'erreur qu'elle engendre soit négligeable devant l'erreur de méthode liée à l'utilisation des fonctions incrément  $\tilde{\Phi}$  et  $\Phi$ .

## 3. Résultats numériques

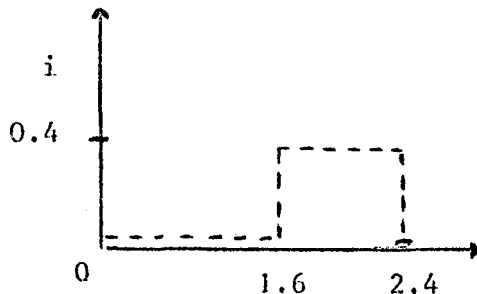
EXEMPLE 1 : inversion de la matrice  $A$  provenant de la discrétisation sur  $[0, 1] \times [0, 1]$  avec le pas  $1/3$  du problème de Dirichlet

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & .25 & .25 \\ 0 & -1 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & -1 & 0 \\ .25 & .25 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'erreur commise (avec  $h = .1$ ,  $l = 5$ ) sur les termes de l'inverse varie entre  $-3.10^{-7}$  et  $-4.10^{-7}$  et l'erreur évaluée est remarquablement fidèle ( $-3.8 \cdot 10^{-7}$ ).

EXEMPLE 2 :

$$\Omega = [0, 1], k(x, s) = \frac{e^{x-s}}{2}, f(x) = e^{2x}, \lambda_M = 2 \cdot 4.$$





On a

$$\tau(x, \lambda) = e^{2x} + \frac{e^{-1}}{(2 - \alpha)^2 + \beta^2} [2\alpha - (\alpha^2 + \beta^2) + 2i\beta]e^x, \quad \lambda = \alpha + i\beta.$$

La seule valeur caractéristique est  $\mu = 2$ .

On prend  $h = 0.05$ ,  $l_0 = 5$ , et le chemin  $C_\lambda$  représenté ci-contre. On utilise une formule de quadrature de Gauss à 5 points [4]; les valeurs de la solution sont calculées aux points de base de la formule d'intégration (en cours de calcul le nombre d'itération est modifié de manière à avoir

$$(|h| \cdot \text{Max} |||\text{Resolvant}|||)^l$$

du même ordre que  $(|h| \text{Max} |||K|||)^l$ .

Sur la partie réelle l'erreur évaluée donne une bonne approximation de l'erreur réelle; les évaluations sur la partie imaginaire sont faussées par le fait qu'elle est nulle.

EXEMPLE 3 :

$$\Omega = [0, 1], k(x, s) = x(1 - e^{xs}), \lambda_M = 1, f(x) = e^x - x$$

La solution exacte  $\tau(x, 1) = 1$  est calculée avec un pas  $h = 0,1$ , le long de l'axe réel, avec  $l = 5$ , et une formule de Gauss à 5 points. (Exemple donné par Kagiwada, Kalaba [6].)

Par des méthodes semblables à celles développées dans [3], Kagiwada et Kalaba obtiennent avec un pas  $h = 0.005$  des erreurs variant sur  $[0,1]$  de  $12.10^{-6}$  à  $13.10^{-4}$ .

Ici les évaluations d'erreur sont remarquablement précises.

x	EXEMPLE 2				EXEMPLE 3	
	Partie réelle		Partie imaginaire		Partie réelle	
	$E \times 10^5$	$\bar{E} \times 10^5$	$E \times 10^6$	$\bar{E} \times 10^6$	$E \times 10^8$	$\bar{E} \times 10^8$
0,047	1	1,8	- 0,28	- 1,8	0,004	0,003
0,231	1,3	2,2	- 0,33	- 2,2	0,064	0,069
0,5	1,7	2,8	- 0,44	- 2,9	0,33	0,33
0,769	2,2	3,7	- 0,58	- 3,8	0,88	0,89
0,953	2,6	4,5	- 0,69	- 4,5	1,47	1,50

$E$  : erreur effective,  $\bar{E}$  : erreur évaluée.

D'autres essais numériques ont été effectués en utilisant une formule de quadrature de Romberg [5] ou des formules de Gauss à 7 ou 12 points. Ces formules d'ordre élevé ont été utilisées pour évaluer la solution au voisinage d'une valeur propre; associées à un pas suffisamment fin (jusqu'à  $6.10^{-3}$  au voisinage de la valeur propre) elles donnent des résultats acceptables.

## REFERENCES

- [1] MARONI, *Eléments d'analyse fonctionnelle*. C.N.R.S. Publication XMM/4.2.9./AI.
- [2] MARONI, *Equations intégrales*, T.I. C.N.R.S. Publication n° 17.9/AI.
- [3] BROUDISCOU, *Méthodes numériques par pas pour le traitement de certaines équations intégrales linéaires de Fredholm*. A paraître.
- [4] V. I. KRYLOV, *Approximate calculation of integrals*. The Mac Millan Company, New York, 1962.
- [5] F. L. BAUER, H. RUTHISHAUSER et E. STIEFEL, *New aspects in numerical quadrature*. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 15. Am. Math. Soc., Providence, 1963 (p. 199-218),
- [6] KAGIWADA and KALABA, *The invariant imbedding numerical method for Fredholm integral equations with degenerated kernels*. J. of App. Th., vol. 1, n° 3, nov. 1968.