Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique

Claude Brezinski

Brève communication. Généralisation des extrapolations polynomiales et rationnelles

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique, tome 6, n° 1 (1972), p. 61-66.

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_1_61_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, R-1, 1972, p. 61-66)

Brèves communications

GENERALISATION DES EXTRAPOLATIONS POLYNOMIALES ET RATIONNELLES

par Claude BREZINSKI [1]

Résumé. — *Extrapolation d'une suite convergente par des polynômes et des fractions rationnelles d'une fonction $\varphi(x)$ à choisir. Théorèmes de convergence et d'accélération de la convergence. Application à la résolution de $f(x) = 0$ qui débouche sur de nouveaux algorithmes.*

Dans sa thèse, Laurent [3] a étudié les conditions de convergence de procédés d'extrapolation à l'aide de polynômes généralisés de la forme :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i[\varphi(x) - \varphi(0)]^i \tag{1}$$

où φ est une fonction numérique, définie sur $[0, T]$, strictement croissante et continue à droite en zéro.

Dans la pratique on dispose des algorithmes de Richardson et de Romberg qui correspondent à $\varphi(x) = x$ et x^2. Nous allons généraliser ces algorithmes à une fonction φ quelconque possédant les propriétés précédentes. On obtient ainsi un nouvel outil d'extrapolation utilisable en pratique. Dans la seconde partie, on étudie des extrapolations à l'aide de fractions rationnelles généralisées et on donne un algorithme qui généralise le ρ^r-algorithme [1].

Appliqués à la résolution de $f(x) = 0$ ces deux algorithmes d'extrapolation généralisée débouchent sur un grand nombre de procédés numériques. Certaines de ces méthodes sont nouvelles, d'autres sont déjà connues mais on les retrouve ici dans le cadre unifié de l'extrapolation.

Extrapolation polynomiale

Étant donnés $p + 1$ couples (x_i, y_i) où les x_i sont tous différents, on sait qu'il existe un et un seul polynôme (1) de degré p qui passe par ces points.

(1) Attaché aux Services Techniques des Armées.

Appelons $T_k^{(n)}$ la valeur en $x = 0$ du polynôme (1) de degré k tel que $P_k(x_i) = y_i$ pour $i = n, ..., n + k$. $T_k^{(n)}$ peut être calculé à l'aide de la formule de Neville-Aitken, d'où l'algorithme d'extrapolation polynomiale généralisée :

$$T_0^{(n)} = y_n \qquad \forall n$$

$$T_{k+1}^{(n)} = \frac{[\varphi(x_n) - \varphi(0)]T_k^{(n+1)} - [\varphi(x_{n+k+1}) - \varphi(0)]T_k^{(n)}}{\varphi(x_n) - \varphi(x_{n+k+1})}$$

Si $\{ x_k \}$ est une suite strictement décroissante d'abscisses positives telles que $\lim_{k \to \infty} x_k = 0$, Laurent a montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour que, pour toute suite convergente $\{ y_k \}$ on ait :

$$\lim_{k \to \infty} T_k^{(n)} = \lim_{k \to \infty} y_k \qquad \forall n$$

est qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$$\frac{\varphi(0) - \varphi(x_k)}{\varphi(0) - \varphi(x_{k+1})} \geqslant \alpha \qquad \forall k$$

Cette condition est dite condition (α). Si φ admet un développement limité de Taylor au voisinage de zéro alors une condition nécessaire pour que la condition (α) soit vérifiée est que $\lim_{k \to \infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} \neq 1$. Cette condition, on le voit, rejette les choix $x_i = 1/\text{Log}\, i$ et $x_i = 1/i$.

Donnons maintenant une condition d'accélération de la convergence. Le résultat obtenu est une généralisation d'un théorème de Germain-Bonne [2] que l'on retrouve en prenant $\varphi(x) = x$ et $k = 0$.

Théorème : Supposons que la condition (α) soit vérifiée, alors une condition nécessaire et suffisante pour que $\{ T_{k+1}^{(n)} \}$ converge vers S plus vite que $\{ T_k^{(n)} \}$ est que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{T_k^{(n+1)} - S}{T_k^{(n)} - S} = \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(x_{n+k+1}) - \varphi(0)}{\varphi(x_n) - \varphi(0)}$$

démonstration : Si $\{ T_{k+1}^{(n)} \}$ converge vers S plus vite que $\{ T_k^{(n)} \}$ alors

$$\lim_{n \to \infty} \frac{T_{k+1}^{(n)} - S}{T_k^{(n)} - S} = 0 = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{T_k^{(n+1)} - S}{T_k^{(n)} - S} - \dfrac{\varphi(x_{n+k+1}) - \varphi(0)}{\varphi(x_n) - \varphi(0)}}{1 - \dfrac{\varphi(x_{n+k+1}) - \varphi(0)}{\varphi(x_n) - \varphi(0)}}$$

or $\forall k > 0$ $x_{n+k+1} < x_{n+1}$ donc puisque φ est strictement croissante $\varphi(x_{n+k+1}) < \varphi(x_{n+1})$ et par conséquent :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x_{n+k+1}) - \varphi(0)}{\varphi(x_n) - \varphi(0)} \neq 1 \qquad \forall\, k$$

ce qui démontre la condition nécessaire. Réciproquement, si la condition du théorème est vérifiée, alors $\{ T_{k+1}^{(n)} \}$ converge vers S plus vite que $\{ T_k^{(n)} \}$.

Remarques :

1° Si les abscisses x_n sont choisies de sorte que

$$\varphi(x_{n+1}) - \varphi(0) = \frac{\varphi(x_n) - \varphi(0)}{\alpha} \qquad \forall\, n$$

on voit immédiatement que la condition nécessaire et suffisante précédente devient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_k^{(n+1)} - S}{T_k^{(n)} - S} = \frac{1}{\alpha^{k+1}} \qquad \forall\, k \geqslant 0$$

Pour $k = 0$ et $\varphi(0) = x$, $\{ T_1^{(n)} \}$ converge plus vite que $\{ T_0^{(n)} \}$ en prenant $x_n = \Delta T_0^{(n)}$ ce qui n'est autre que le choix fait par Germain-Bonne [2].

2° Soit $y(x)$ la fonction à extrapoler en zéro. Le problème est de choisir une fonction φ qui donnera de bons résultats. Si $\varphi(x) \neq x$ et $y(x)$ possèdent des développements limités de Taylor au voisinage de zéro, alors on compose simplement deux développements limités. L'extrapolation à l'aide de $\varphi(x) \neq x$ peut cependant donner de meilleurs résultats ou être plus stable. Si $y(x)$ ne possède pas de développement limité de Taylor au voisinage de zéro, alors une extrapolation à l'aide d'une fonction φ, qui en possède un, a peu de chance d'être intéressante. Il peut alors être utile de prendre une fonction φ ne possédant pas de développement limité de Taylor au voisinage de zéro. Dans tous les cas pour choisir une fonction φ déterminée, il faut avoir des raisons théoriques de le faire. Nous en verrons plus loin une application à la résolution de $f(x) = 0$.

Extrapolation rationnelle

Dans ce paragraphe, nous donnons un algorithme d'extrapolation rationnelle généralisée. L'ensemble des fonctions pour lesquelles il donne la limite exacte en zéro, contient l'ensemble des fonctions pour lesquelles l'algorithme précédent est exact. Cet algorithme est donc plus précis que le précédent, ce qui ne veut cependant pas dire que les résultats qu'il donne sont meilleurs. Ce nouvel algorithme est basé sur l'extrapolation par des fractions rationnelles de la forme :

$$R_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i[\varphi(x) - \varphi(0)]^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i[\varphi(x) - \varphi(0)]^i} \tag{2}$$

Appelons $\rho_{2k}^{(n)}$ la valeur en zéro de la fraction rationnelle (2) de degré k telle que $R_k(x_i) = y_i$ pour $i = n, \ldots, n + 2k$ obtenue par la méthode d'interpolation de Thiele. On a :

$$\rho_{-1}^{(n)} = 0 \qquad \rho_0^{(n)} = y_n \qquad \forall\, n$$

$$\rho_{k+1}^{(n)} = \rho_{k-1}^{(n+1)} + \frac{\dfrac{1}{\varphi(x_{n+k+1}) - \varphi(0)} - \dfrac{1}{\varphi(x_n) - \varphi(0)}}{\rho_k^{(n+1)} - \rho_k^{(n)}}$$

Application à $f(x) = 0$

Nous allons appliquer les deux algorithmes prédécents à la résolution de $x = F(x)$ où F est une fonction réelle de la variable réelle x.

Remarquons d'abord que tout ce qui vient d'être dit reste valable si φ est une fonction strictement décroissante de x. Posons $f(x) = x - F(x)$. Si la racine S est simple, f est strictement monotone au voisinage de S. De plus, si $f(x)$ possède un développement limité de Taylor au voisinage de S par rapport à x, alors x en possède un par rapport à $f(x)$. Il est donc justifié de remplacer x par un polynôme en $f(x)$ au voisinage de S; ce qui revient à prendre $\varphi(x) = f(x)$ et à extrapoler en $x = S$. On obtient ainsi de nombreux algorithmes de résolution de $f(x) = 0$ [dans la suite nous appelerons itérations de base, les itérations $x_{n+1} = F(x_n)$].

1° Extrapolation linéaire des itérations de base

$$T_1^{(n)} = \frac{[x_n - F(x_n)]x_{n+1} - [x_{n+1} - F(x_{n+1})]x_n}{x_n - F(x_n) - x_{n+1} + F(x_{n+1})} = \frac{x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}}$$

On reconnaît le procédé Δ^2 d'Aitken. Le théorème nous donne une condition nécessaire et suffisante pour que $\{ T_1^{(n)} \}$ converge plus vite que $\{ x_n \}$. On doit avoir :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - S}{x_n - S} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - F(x_{n+1})}{x_n - F(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta x_{n+1}}{\Delta x_n}$$

donc $\{ T_1^{(n)} \}$ peut converger plus vite que $\{ x_n \}$.

2° Méthode de Steffensen.

L'extrapolation linéaire précédente s'écrit encore :

$$T_1^{(n)} = \frac{[x_n - F(x_n)]F(x_n) - [F(x_n) - F(F(x_n))]x_n}{x_n - 2F(x_n) + F(F(x_n))}$$

$$= \frac{x_n \cdot F(F(x_n)) - [F(x_n)]^2}{x_n - 2F(x_n) + F(F(x_n))}$$

Si nous prenons $x_{n+1} = T_1^{(n)}$ on retrouve la méthode de Steffensen qui est d'ordre deux.

3° Cette troisième possibilité d'utilisation consiste à laisser se continuer les itérations de base comme pour la première méthode mais à effectuer des extrapolations non plus linéaires sur les itérations de base mais de degré de plus en plus élevé :

$$x_0 \quad \text{donné} \quad x_{k+1} = F(x_k) \quad k \geqslant 0$$

$$T_0^{(n)} = x_n \quad \forall\, n$$

$$T_{k+1}^{(n)} = \frac{[x_n - F(x_n)]T_k^{(n+1)} - [x_{n+k+1} - F(x_{n+k+1})]T_k^{(n)}}{x_n - F(x_n) - x_{n+k+1} + F(x_{n+k+1})}$$

$$= \frac{\Delta x_n \cdot T_k^{(n+1)} - \Delta x_{n+k+1} \cdot T_k^{(n)}}{\Delta x_n - \Delta x_{n+k+1}}$$

4° Extrapolation de degré k des itérations de base.

Au lieu de prendre deux itérés de base et faire une extrapolation linéaire comme dans la première méthode, on peut prendre $k + 1$ itérés de base et effectuer une extrapolation par des polynômes généralisés de degré k. On considère donc la suite $\{ T_k^{(n)} \}$ obtenue à partir des itérations de base.

5° On peut faire comme dans la seconde méthode mais avec des polynômes de degré k. Cela revient donc à poser $x_{n+1} = T_k^{(n)}$.

6° Reprenons la première méthode et posons $x_{n+2} = T_1^{(n)}$ on retrouve regula falsi :

$$x_{n+2} = \frac{f(x_n) \cdot x_{n+1} - f(x_{n+1}) \cdot x_n}{f(x_n) - f(x_{n+1})}$$

7° On peut faire la même chose que dans la méthode 6 mais en prenant $x_{n+k+1} = T_k^{(n)}$, $T_k^{(n)}$ étant obtenu à partir de $k + 1$ points initiaux au lieu de deux.

8° x_0 et x_1 étant donnés, on calcule $T_1^{(0)}$ et on prend $x_2 = T_1^{(0)}$, puis sur ces trois valeurs, on calcule $x_3 = T_2^{(0)}$ et ainsi de suite.

On obtient évidemment les huit algorithmes correspondants en utilisant une extrapolation rationnelle généralisée avec $\varphi(x) = f(x)$.

Donnons par exemple les résultats numériques des méthodes 1 et 8 appliquées à $x = e^{-x}$ avec $x_0 = 0$. On obtient :

Méthode 1

Extrapolation polynomiale	Extrapolation rationnelle
0,612699836780282039	1,000000000000000000
0,567598911354531636	0,565828727712364331
0,567201829372173711	0,567441606777643165
0,567144303059276191	0,567142450175753599
0,567143299964168291	0,567143344665007396
0,567143290565629235	0,567143290387723216

Méthode 8

Extrapolation polynomiale	Extrapolation rationnelle
0,612699836780282039	1,000000000000000000
0,567069643303389589	0,565828727712364331
0,567143298365781007	0,567144375214090025
0,567143290409783855	0,567143290409793653
0,567143290409783868	0,567143290409783873

Pour les itérations de base, la trentième à 6 chiffres exacts.

Je tiens à remercier M. le Professeur P. J. Laurent pour ses suggestions concernant ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Brezinski, *Méthodes d'accélération de la convergence en analyse numérique.* Thèse, Grenoble, 1971.

[2] B. Germain-Bonne, *Accélération de la convergence d'une suite par extrapolation,* Colloque d'Analyse Numérique d'Anglet, 1971.

[3] P. J. Laurent, *Étude de procédés d'extrapolation en analyse numérique.* Thèse, Grenoble, 1964.