

IOAN TOMESCU

**Brève communication. Une caractérisation
des graphes k —chromatiques minimaux
sans sommet isolé**

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique, tome 6, n° 1 (1972), p. 88-91.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_1_88_0

© AFCET, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE CARACTERISATION DES GRAPHES k -CHROMATIQUES MINIMAUX SANS SOMMET ISOLE

par Ioan TOMESCU (1)

Résumé. — On obtient le nombre minimal d'arêtes d'un graphe à n sommets, de nombre chromatique k qui n'a pas de sommets isolés et on donne la caractérisation de ces graphes minimaux.

Dans ce qui suit nous considérons des graphes finis non-orientés $G = (X, U)$ avec X l'ensemble des sommets et U l'ensemble des arêtes [1].

Proposition. Si G est un graphe sans sommet isolé, à n sommets, m arêtes et de nombre chromatique $\gamma(G) = k$, alors

$$m \geq \binom{k}{2} + \left\{ \frac{n-k}{2} \right\}$$

où par $\{x\}$ nous avons noté le plus petit entier plus grand ou égal à x . Pour $n - k$ pair le graphe G ayant ce nombre minimal d'arêtes est unique, et pour $n - k$ impair il y a deux types de graphes qui ont un nombre minimal d'arêtes et qui coïncident pour $k = 2$.

Démonstration. Supposons d'abord que pour tout $x \in X$ le sous-graphe G_x qui s'obtient de G par la suppression du sommet x contient des sommets isolés. Soit y un sommet isolé dans G_x , donc un sommet qui se relie dans G seulement à x .

Mais le sous-graphe G_y contient aussi des sommets isolés, donc $[x, y] \in U$ et les sommets x et y ne sont pas reliés à d'autres sommets du graphe G . Par

(1) Faculté de Mathématiques et de Mécanique, Université de Bucarest.

l'itération de ce raisonnement on voit que si pour tout $x \in X$ le sous-graphe G_x contient des sommets isolés et le graphe G n'a pas de sommets isolés, alors n est pair, $\gamma(G) = 2$ et le nombre des arêtes de ce graphe est égal à

$$m = \frac{n}{2} = \binom{2}{2} + \frac{n-2}{2}.$$

Mais ce nombre est le nombre minimal d'arêtes du graphe G , parce que le graphe G n'a pas de sommets isolés, donc le degré $d(x)$ de chaque sommet est au moins 1 et

$$2m = \sum_{x \in X} d(x) \geq n \quad \text{d'où} \quad m \geq \frac{n}{2}.$$

Dans ce cas la proposition est vraie.

La démonstration de la proposition se fait par induction sur n .

Supposons que la propriété est vraie pour tous les graphes G ayant $n' = n - 1$ sommets et de nombre chromatique égal à $k (k \leq n - 1)$.

Soit G un graphe à n sommets. Si $\gamma(G) = n$, alors G est un graphe complet à n sommets et la propriété est évidente.

Si $\gamma(G) = k \leq n - 1$, soit $x \in X$ un sommet tel que G_x ne contienne pas de sommets isolés. Si un tel sommet n'existe pas, nous avons vu que la proposition est vraie. Nous obtenons deux cas :

a) $\gamma(G_x) = k$ et conformément à l'hypothèse d'induction le nombre minimal d'arêtes du sous-graphe G_x est égal à $\binom{k}{2} + \left\{ \frac{n-k-1}{2} \right\}$.

Mais x n'est pas un sommet isolé, donc $d(x) \geq 1$ et le nombre des arêtes du graphe G est supérieur ou égal à

$$\binom{k}{2} + \left\{ \frac{n-k-1}{2} \right\} + 1 \geq \binom{k}{2} + \left\{ \frac{n-k}{2} \right\}$$

Nous obtenons égalité, c'est-à-dire $m = \binom{k}{2} + \left\{ \frac{n-k}{2} \right\}$ seulement si $n - k$ est impair, $d(x) = 1$ et G_x a un nombre minimal d'arêtes.

b) $\gamma(G_x) = k - 1$. En ce cas il y a une partition de l'ensemble des sommets X dont les classes sont des ensembles intérieurement stables de la forme suivante : $\{x\}$, C_1, \dots, C_{k-1} et le sommet x est relié par une arête avec au moins un sommet de chaque classe C_1, C_2, \dots, C_{k-1} , donc $d(x) \geq k - 1$, puisque au cas contraire nous obtenons $\gamma(G) \leq k - 1$, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc le nombre des arêtes du graphe G est minoré par le nombre des

arêtes de G_x plus $k - 1$, et conformément à l'hypothèse d'induction nous obtenons :

$$m \geq \binom{k-1}{2} + \left\{ \frac{n-1-(k-1)}{2} \right\} + k-1 = \binom{k}{2} + \left\{ \frac{n-k}{2} \right\}$$

l'égalité ayant lieu seulement si $d(x) = k - 1$ et le sous-graphe G_x a un nombre minimal d'arêtes.

En suivant cette démonstration et les cas où les inégalités écrites ci-dessus deviennent des égalités, nous obtenons par induction la caractérisation des graphes G sans sommets isolés, à n sommets et de nombre chromatique k qui ont un nombre minimal d'arêtes sous la forme suivante :

Si $n - k$ est pair, le graphe G qui a un nombre minimal d'arêtes est unique (jusqu'à un isomorphisme près) et il est composé d'un k -sous-graphe complet et de $n - k$ sommets qui sont reliés deux à deux par $\frac{n-k}{2}$ arêtes.

Si $n - k$ est impair, alors il y a deux types de graphes non-isomorphes qui ont un nombre minimal d'arêtes :

Un graphe composé d'un k -sous-graphe complet, de $n - k - 1$ sommets qui sont reliés deux à deux par $\frac{n-k-1}{2}$ arêtes et d'un autre sommet qui est relié par une arête à un sommet qui appartient au sous-graphe complet à k sommets. L'autre est composé d'un k -sous-graphe complet, de $n - k - 1$ sommets qui sont reliés deux à deux par $\frac{n-k-1}{2}$ arêtes et d'un autre sommet qui est relié par une arête à un sommet qui n'appartient pas au sous-graphe complet à k sommets.

Pour $k = 2$ ces deux types de graphes coïncident.

En effet, au cas *a*) pour obtenir la valeur minimale de m il faut que $n - k - 1$ soit pair, donc le sous-graphe G_x ayant un nombre minimal d'arêtes est unique et pour x nous avons deux possibilités de liaison par une arête ainsi que $d(x) = 1$.

Au cas *b*) le sommet x se relie à tous les sommets du sous-graphe complet à $k - 1$ sommets de G_x qui a un nombre minimal d'arêtes, parce que au cas contraire nous obtenons $\gamma(G) < k$, ce qui contredit l'hypothèse, donc le graphe minimal doit avoir nécessairement la structure indiquée ci-dessus.

Si nous n'imposons aucune restriction au graphe G à n sommets et de nombre chromatique k , le nombre minimal d'arêtes est égal à $\binom{k}{2}$, parce que entre deux classes quelconques d'une partition de l'ensemble des sommets composée de k ensembles intérieurement stables il y a au moins une arête, au cas contraire $\gamma(G) < k$.

On peut démontrer aisément par induction sur n que le seul graphe qui a ce nombre minimal d'arêtes est composé d'un k -sous-graphe complet et de $n - k$ sommets isolés.

Nous avons obtenu $m \geq \frac{k^2 - k}{2} + \frac{n - k}{2}$ ou $k^2 - 2k + n - 2m \leq 0$
d'où $k \leq 1 + \sqrt{2m - n + 1}$.

Corollaire. Si le graphe G à n sommets et m arêtes n'a pas de sommets isolés, son nombre chromatique vérifie l'inégalité :

$$\gamma(G) \leq 1 + \sqrt{2m - n + 1}$$

Cette inégalité devient égalité par exemple pour le graphe complet à n sommets K_n .

A. Ershov et G. Kuzhukhin ont obtenu dans [2] une majoration pour le nombre chromatique d'un graphe connexe à n sommets et m arêtes sous la forme suivante :

$$\gamma(G) \leq \frac{3 + \sqrt{9 + 8(m - n)}}{2}$$

d'où on déduit que si le graphe G est connexe et $\gamma(G) = k$, son nombre d'arêtes $m \geq \binom{k}{2} + n - k$.

Le graphe connexe qui a ce nombre minimal d'arêtes n'est pas unique.

Par exemple il est composé d'un k -sous-graphe complet et de $n - k$ sommets qui sont reliés chacun par une arête à un sommet du k -sous-graphe complet ou il est composé d'un k -sous-graphe complet et d'une chaîne à $n - k$ sommets qui est reliée par un de ses sommets à un sommet du k -sous-graphe complet.

Pour $k = 3$ un tel graphe connexe minimal est composé aussi d'un polygone impair à q sommets, les autres $n - q$ sommets en se reliant à un sommet du polygone ou ils forment des chaînes qui se relient par un sommet à un sommet du polygone impair.

On pose ainsi le problème de caractériser et de dénombrer les graphes connexes minimaux à n sommets et de nombre chromatique k , problème qui est résolu dans [3].

BIBLIOGRAPHIE

1. C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
2. A. ERSHOV et G. KUZHUKHIN, « Estimates of the chromatic number of connected graphs », *Dokl. Akad. Nauk*, 142, 2, 1962, p. 270-273.
3. I. TOMESCU, *Le nombre des graphes connexes k -chromatiques minimaux aux sommets étiquetés*, C.R. Acad. Sc. Paris, A, 273, 1971, p. 1124-1126.