

JACQUES WOLF

**Brève communication. Construction de filtres
digitaux par la résolution d'équations différentielles**

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique, tome 6, n° 1 (1972), p. 92-98.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_1_92_0

© AFCET, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION DE FILTRES DIGITAUX PAR LA RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

par Jacques WOLF ⁽¹⁾

Sommaire — On se propose de construire des filtres digitaux (équations récurrentes) dont les caractéristiques sont « voisines » de filtres analogiques (équations différentielles) donnés

I. INTRODUCTION

La construction de filtres digitaux — ou numériques — peut se faire de différentes manières [1] dont l'une est de partir d'un filtre analogique. On se propose ici de représenter un filtre analogique par une équation différentielle que l'on intègre numériquement. Ce qui donnera un ensemble de filtres digitaux dont on peut espérer qu'il possède des caractéristiques voisines du filtre analogique original.

On considère donc le problème différentiel

$$(P1) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{d^k}{dt^k} u(t) \quad t \in [t_0, b] \quad (e) \\ \left[\frac{d^k}{dt^k} z(t) \right]_{t=t_0} \quad \text{données} \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \\ a_n \neq 0 \end{array} \right.$$

qui admet pour solution $z(t)$, $u(t)$ étant donnée

(1) Maître Assistant, Institut de Recherche en Mathématiques Avancées, Grenoble

II. OPERATEUR AVANCEMENT

2.1. Définition

2.1.1. — Soit $\{f_j\} j = 0, 1, \dots$ une suite donnée $f_j \in R$. On pose

$$Ef_i = f_{i+1} \quad \forall i \geq 0$$

On peut alors définir les puissances successives de E

$$E^p f_i = \underbrace{E \dots E}_{p \text{ fois}} f_i = f_{i+p} \quad \forall i \geq 0 \quad \forall p \geq 0 \text{ (entier)}$$

2.1.2. — Soit $\{y(j)\} j = 0, 1, \dots$ une suite de vecteurs de R^n . On pose

$$\varepsilon y(j) = y(j+1)$$

On remarque alors que

$$\begin{bmatrix} E & 0 & & 0 \\ 0 & \diagdown & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(j) \\ \vdots \\ y_n(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E y_1(j) \\ \vdots \\ E y_n(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(j+1) \\ \vdots \\ y_n(j+1) \end{bmatrix} = \varepsilon y(j)$$

2.2. Propriétés

Soient $\{f_j\}, \{g_j\} j = 0, 1, \dots$ deux suites d'éléments de R . On a

$$\begin{aligned} E(\alpha f_j + \beta g_j) &= \alpha E f_j + \beta E g_j \\ E(f_j g_j) &= E f_j E g_j \end{aligned}$$

2.3. Polynôme de E

Soient deux polynômes ρ et σ à coefficients réels

$$\rho(\lambda) = \sum_{p=0}^k \alpha_p \lambda^p \quad \alpha_k \neq 0 \quad \sigma(\lambda) = \sum_{p=0}^k \beta_p \lambda^p \quad |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$$

On peut définir $\rho(E)$ et $\sigma(E)$ par

$$\begin{aligned} \rho(E)f_j &= \sum_{p=0}^k \alpha_p E^p f_j = \sum_{p=0}^k \alpha_p f_{j+p} \\ \sigma(E)f_j &= \sum_{p=0}^k \beta_p E^p f_j = \sum_{p=0}^k \beta_p f_{j+p} \end{aligned}$$

Si p et q sont deux entiers (≥ 0), on a immédiatement

$$\sigma^p(E)\rho^q(E)f_j = \rho^q(E)\sigma^p(E)f_j.$$

III. CONVERGENCE

On considère le problème (D) aux différences

$$(D) \begin{cases} \sum_{p=0}^n a_p \frac{\rho^p(E)\sigma^{n-p}(E)}{h^p} z_j = \sum_{p=0}^{n-1} c_p \frac{\rho^p(E)\sigma^{n-p}(E)}{h^p} u_j & j = 0, 1, \dots, \quad (d) \\ z_i = \sum_{p=0}^{i-1} \frac{(ih)^p}{p!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{données}}}{z^{(p)}(t_0)} & i = 0, 1, \dots, n-1 \\ u_i \text{ connues } i = 0, 1, \dots \end{cases}$$

qui admet pour solution unique z_k .

Soit $t = t_0 + ph \in [t_0, b]$, fixé. On se propose de montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} z_p = z(t)$$

lorsque les polynômes σ et ρ sont convenablement choisis.

IV. PROPOSITION 1

Soit l'équation différentielle

$$\sum_{k=0}^n a_k z^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k u^{(k)}(t) \quad (e)$$

Le système différentiel

$$y' = Ay + u(t)b \quad (s)$$

admet pour solutions :

$$y(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n(t) \end{vmatrix} \quad \text{avec } y_1(t) = z(t) \text{ satisfaisant à (e)}$$

lorsque A et b sont des matrices convenablement choisies.

Cette propriété se montre en considérant

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ \frac{a_0}{a_n} & \dots & & & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \text{ et } b \text{ solution de } \begin{bmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & & & \\ \vdots & & & \\ a_1 & & & a_n \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} c_{n-1} \\ \vdots \\ c_0 \end{bmatrix}$$

V. PROPOSITION 2

Si on intègre numériquement le système différentiel

$$y' = Ay + u(t)b \tag{s}$$

par une (ρ, σ) méthode, alors l'équation différentielle (e) est intégrée numériquement au moyen de l'équation aux différences

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{\rho^k(E)\sigma^{n-k}(E)}{h^k} z_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\rho^k(E)\sigma^{n-k}(E)}{h^k} u_j$$

Intégrer $y' = Ay + ub$, par une (ρ, σ) méthode revient à remplacer le système (s), par le système :

$$\rho(\varepsilon)y(j) = h\sigma(\varepsilon)[Ay(j) + bu_j] \tag{s_1}$$

En posant $\rho(\varepsilon) = h\eta(\varepsilon)$, et prenant des notations simplifiées évidentes le système (s₁) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \eta y_i = \sigma y_{i+1} + b_i \sigma u & i = 1, \dots, n-1 \\ \eta y_n = - \sum_{k=1}^n \frac{a_{k-1}}{a_n} \sigma y_k + b_n \sigma u \end{cases}$$

Si on élimine y_2, \dots, y_n de ces n relations on obtient

$$\sum_{k=0}^n a_k \eta^k \sigma^{n-k} y_1 = \sum_{p=1}^n a_p \sum_{i=1}^p b_i \sigma^{n-p+i} \eta^{p-i} u$$

Le second membre peut s'écrire :

$$f = [a_1, \dots, a_n] \begin{bmatrix} \sigma^n & \sigma^{n-1}\rho & \dots & \sigma\rho^{n-1} \\ 0 & & & \sigma^{n-1}\rho \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & & 0 \\ & & & \sigma^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a^T \Lambda^T b$$

On a donc aussi $f = f^T = b^T \Lambda a$ et on peut écrire

$$\sum_{k=0}^n a_k \eta^k \sigma^{n-k} y_1 = \sum_{j=1}^n b_j \sum_{k=j}^n a_k \sigma^{n-(p-i)} \eta^{p-i} u$$

et d'après le système linéaire qui donne les $b_i (i = 1, \dots, n)$ ceci s'écrit encore

$$\sum_{k=0}^n a_k \eta^k \sigma^{n-k} y_1 = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \eta^k \sigma^{n-k} u$$

Puisque $y_1(t) = z(t)$, on a donc finalement

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{\rho^k(E) \sigma^{n-k}(E)}{h^k} z_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\rho^k(E) \sigma^{n-k}(E)}{h^k} u_j$$

ce qui démontre la proposition 2.

VI. EQUATION AUX DIFFERENCES

Soit le problème différentiel

$$(P_2) \begin{cases} y' = Ay + ub \\ y_1^{(i)}(t) \text{ données } i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ (} u \text{ donnée, donc } u^{(k)} \text{)} \end{cases}$$

Ce problème (P_2) se ramène immédiatement à un problème de conditions initiales, car

$$y_k(t) = y_1^{(k-1)}(t) - \sum_{i=1}^{k-1} b_i u^{(k-1-i)} \quad k = 1, \dots, n \quad \forall t$$

donc en particulier pour $t = t_0$.

Donc, si pour intégrer numériquement le problème (P_2) , on emploie une (ρ, σ) méthode consistante et stable [2], on a alors convergence de la solution approchée de (P_2) vers la solution exacte de (P_2) .

On considère maintenant les problèmes

$$(P') \begin{cases} \tilde{y}' = A\tilde{y} + ub \\ \tilde{y}_1(t_0 + ih) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(ih)^p}{p!} y_1^{(p)}(t_0) & i = 0, 1, \dots, n-1 \\ u(t_0 + ih) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(ih)^p}{p!} u^{(p)}(t_0) & i = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

$$(P'_h) \begin{cases} x' = Ax + ub \\ x_1(t_0 + ih) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(ih)^p}{p!} y_1^{(p)}(t_0) + \frac{i^n}{n!} y_1^{(n)}(\alpha_i) h^n & i = 0, 1, \dots, n-1 \\ u(t_0 + ih) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(ih)^p}{p!} u^{(p)}(t_0) + \frac{i^n}{n!} u^{(n)}(\beta_i) h^n & i = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Lemme

Si $F(t)$ est une fonction n fois dérivable, à dérivée $n^{\text{ième}}$ continue, on peut alors écrire :

$$F^{(k)}(t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ij} \frac{k!}{h^k} F(t_0 + ih) + O(h^{n-k}) \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

On peut écrire

$$F(t_i) = \sum_{j=0}^p \frac{(ih)^j}{j!} F^{(j)}(t_0) + \omega_{pi} h^{p+1} \left[\omega_{pi} = \frac{i^{p+1}}{(p+1)!} F^{(p+1)}(\theta_i) \right]$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ik} F_i = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ik} \sum_{j=0}^p \frac{(ih)^j}{j!} F^{(j)}(t_0) + h^{p+1} \Omega_p$$

ce qui permet de calculer $F^{(j)}(t_0)$ en choisissant α_{ik} tel que

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^j \alpha_{ik} = \delta_{kj} \quad j = 0, 1, \dots, p$$

système linéaire de Vandermonde, ce qui entraîne que l'on doit avoir

$$n = p + 1$$

On a alors

$$F^{(k)}(t_0) = \frac{k!}{h^k} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ik} F_i - k! h^{n-k} \Omega_{n-1}$$

ce qui démontre le lemme.

Pour le problème (P'_h) on a :

$$x_k(t_0) = x_1^{(k-1)}(t_0) - \sum_{i=1}^{k-1} b_i u^{(k-1-i)}(t_0) = y_k(t_0)$$

appliquant le lemme aux termes du second membre

$$y_k(t_0) = (k-1)! \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i-k-1} x_1(t_i)}{h^{k-1}} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{b_i (k-1-i)!}{h^{k-1-i}} \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{jk-1-i} u_j + O(h)$$

puisque $x_1(t_i) = \tilde{y}_1(t_i) + \xi_i h^n$.

$$y_k(t_0) = (k-1) \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_{ik-1} \tilde{y}_1(t_i)}{h^{k-1}} - \sum_{i=1}^{k-1} b_i (k-1-i)! \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_{jk-1-i}}{h^{k-1-i}}}_{\tilde{y}_k(t_0) + O(h)} + O(h)$$

Le problème (P_h) peut donc s'écrire

$$(P_h) \begin{cases} \tilde{y}' = A\tilde{y} + ub \\ \tilde{y}(t_0) = y(t_0) + O(h) \\ u(t_0 + ih) \text{ donnés.} \end{cases}$$

De plus si pour intégrer, ce système on emploie une (ρ, σ) méthode stable et consistante, alors la solution approchée du problème (P_h) converge vers la solution du problème différentiel (P_2) , lorsque $h \rightarrow 0$, en un point fixé [3].

Ceci montre donc, puisque l'application d'une (ρ, σ) à (P_h) conduit à l'équation aux différences (d) , et en vertu de la proposition 1, le résultat indiqué dans le paragraphe 3.

VII. CONCLUSION

Toute (ρ, σ) méthode conduit à une équation aux différences — c'est-à-dire à un filtre digital —. Si de plus cette (ρ, σ) méthode est stable et consistante, pour un pas h « suffisamment petit » les propriétés des filtres digitaux obtenus seront alors voisines du filtre analogique initial.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] RADER-GOLD, « Digital filter design techniques in the frequency domain », *Proceedings of the IEEE*, vol. 55, n° 2, february 1967, pp. 149-171.
- [2] HENRICI, *Discrete variable methods in ordinary differential equations*, Wiley, 1962.
- [3] HENRICI, « Error propagation for difference methods », *The Siam Series in Applied Mathematics*, Wiley, 1963.