REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, INFORMATIQUE, RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. MATHÉMATIQUE

PHILIPPE MICHEL

Pour une extension du principe du maximum de Pontrjagin

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique, tome 6, nº 2 (1972), p. 65-76.

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_2_65_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, juillet 1972, R.2, p. 65-76)

POUR UNE EXTENSION DU PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRJAGIN

par Philippe MICHEL

Résumé. — *Pour exposer une technique nouvelle de démonstration du principe du maximum, celle-ci est utilisée dans l'établissement d'un énoncé classique simple, en mettant en évidence les différentes étapes : — position du problème, — mise en forme différentiable, — résolution. Le résultat classique est obtenu avec un léger affaiblissement des hypothèses.*

L'étude porte ensuite sur diverses applications et extensions que permet cette technique : application à la programmation différentielle, principe du maximum pour des commandes généralisées à valeurs dans un espace compact, formes nouvelles des liaisons, contraintes et critère, principe du maximum pour des espaces de dimension infinie, cas des commandes généralisées à valeurs dans un espace topologique séparé.

A. POSITION DU PROBLEME

a) **Équation du mouvement.** On considère l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = f(X(t), U(t), t) \tag{1}$$

où t appartient à un intervalle fixé $[0, T]$; les commandes U sont continues par morceaux et à valeurs dans un espace topologique $\mathcal{U}$, les solutions X sont à valeurs dans l'espace euclidien E à n dimensions.

Hypothèse (I) : on suppose que f est continue et admet une dérivée par rapport à la première variable continue sur $E \times \mathcal{U} \times [0, T]$.

b) **Problème d'optimalité** (P) : *maximiser* $\gamma(X(T))$ *pour les solutions* X *de l'équation* (1) *qui vérifient* :

$$\varphi_0(X(0)) = 0, \ \varphi_1(X(T)) = 0, \ \psi_0(X(0)) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \psi_1(X(T)) \geqslant 0. \tag{2}$$

Les fonctions φ_0, φ_1, ψ_0 et ψ_1 sont définies dans E et à valeurs respectivement dans les espaces de dimension finie F_0, F_1, G_0 et G_1; γ est une fonction numérique définie dans E.

Nous considérons une solution $\bar{X}$ de l'équation (1) associée à une commande $\bar{U}$ continue par morceaux et continue à droite en tout point de $[0, T[$.

Hypothèse (II) : on suppose que φ_0 est strictement dérivable en $\bar{X}(0)$, φ_1 est strictement dérivable en $\bar{X}(T)$, ψ_0 est dérivable en $\bar{X}(0)$, ψ_1 et γ sont dérivables en $\bar{X}(T)$.

Définition ([1] 1.2.2.). Une fonction $g(x)$ est strictement dérivable en x_0 si elle est dérivable en ce point et si l'on a :

$$g(y) - g(z) = g'(x_0) \cdot (y - z) + \|y - z\| \, \varepsilon(y, z)$$

où $\varepsilon(y, z)$ tend vers 0 quand (y, z) tend vers (x_0, x_0).

Cette propriété qui est plus faible que la dérivabilité continue, suffit pour appliquer le théorème des fonctions implicites ([1] 1.5.1), et, pour l'étude que nous nous proposons de faire, elle est plus aisée à formuler et à démontrer.

c) **Contraintes saturées.** On explicite les composantes de ψ_0 :

$$\psi_0 = (\psi_0^1, \psi_0^2, \ldots, \psi_0^m) ;$$

et on désigne par $\bar{\psi}_0$ l'application qui a pour composantes les contraintes saturées en $\bar{X}(0)$:

$$\bar{\psi}_0 = (\psi_0^k), \qquad k \in \{ i ; \psi_0^i(\bar{X}(0)) = 0 \}.$$

On procède de même pour ψ_1 : $\bar{\psi}_1$ est l'application qui a pour composantes les contraintes saturées en $\bar{X}(T)$; et on désigne par H_0 et H_1 respectivement les espaces de valeurs de $\bar{\psi}_0$ et $\bar{\psi}_1$.

Si $\bar{X}$ est une solution optimale locale du problème (P), il en sera de même pour le problème obtenu en remplaçant ψ_0 et ψ_1 respectivement par $\bar{\psi}_0$ et $\bar{\psi}_1$ dans les conditions (2).

B. MISE SOUS FORME DIFFERENTIABLE

a) **Paramétrisation des commandes** (1). Par commodité, on choisit un ordre total sur l'ensemble $\mathcal{U}$. On désigne par A l'espace des fonctions numériques à support fini définies dans $[0, T[\times \mathcal{U}$, et pour un sous-ensemble fini S, par A_S l'ensemble de celles qui sont à support contenu dans S. Pour tout élément

(1) Les perturbations des commandes introduites dans ce paragraphe sont analogues à celles utilisées dans [8] et dans [7]. Le mode de présentation est dû à R. Pallu de La Barrière.

(t, u) de $[0, T[\times \mathcal{U}$ et toute fonction $\lambda \geqslant 0$ de A_S, on désigne par $I_\lambda(t, u)$ l'intervalle :

$$\left[t + \sum_{v<u} \lambda(t, v), t + \sum_{v \leqslant u} \lambda(t, v)\right[.$$

A l'exception d'un nombre fini d'entre eux, ces intervalles sont vides; et pour S fixé, ils sont deux à deux disjoints pour $\|\lambda\| = \sum_{t,u} |\lambda(t, u)|$ assez petit. On définit alors la commande U_λ par :

$$U_\lambda(t) = u \qquad \text{pour} \qquad t \in \bigcup_s I_\lambda(s, u),$$

$$U_\lambda(t) = \bar{U}(t) \qquad \text{pour} \qquad t \notin \bigcup_{s,u} I_\lambda(s, u).$$

b) **Différentiabilité de la solution.** On désigne par $D(t, s)$ la résolvante de l'équation linéarisée :

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = f'_x(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t) \cdot X(t), \tag{3}$$

et par Δ l'application linéaire définie dans A par :

$$\Delta \cdot \lambda = \sum_{t,u} \lambda(t, u) D(T, t)[f(\bar{X}(t), u, t) - f(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t)].$$

Théorème 1. *Pour un ensemble fini fixé S, il existe un voisinage V_S de* $(0, 0)$ *dans $E \times A_S$ tel que, pour $(h, \lambda) \in V_S$ et $\lambda \geqslant 0$, l'équation* (1) *admet une solution unique $X_S(h, \lambda)$ d'état initial $\bar{X}(0) + h$ associée à la commande U_λ. Et on a la relation suivante :*

$$\begin{aligned} X_S(h,\lambda)(T) - X_S(h', \lambda')(T) = D(T, 0) \cdot (h - h') + \Delta \cdot (\lambda - \lambda') \\ + (\|h - h'\| + \|\lambda - \lambda'\|)\, \varepsilon(h, h', \lambda, \lambda') \end{aligned} \tag{4}$$

où $\varepsilon(h, h', \lambda, \lambda')$ tend vers 0 *quand $(h, h', \lambda, \lambda')$ tend vers* $(0, 0, 0, 0)$.

L'unicité résulte de l'hypothèse (I) car l'équation (1) est lipschitzienne pour les commandes U_λ.

Soit M la borne supérieure de $\|f'_x(x, u, t)\|$ pour les points (t, x) à distance au plus 1 du graphe de $\bar{X}$ et pour les points u appartenant au compact K_S réunion de la projection de S sur $\mathcal{U}$ et de l'adhérence de l'ensemble des valeurs prises par $\bar{U}$.

On considère la suite $X_0(t) = \bar{X}(t)$,

$$X_{n+1}(t) = \bar{X}(0) + h + \int_0^t f(X_n(s), U_\lambda(s), s)\, \mathrm{d}s\,;$$

il existe un voisinage V_S de (0, 0) tel que, si $(h, \lambda) \in V_S$ et $\lambda \geqslant 0$, on a pour tout t de $[0, T]$,

$$\|X_1(t) - \bar{X}(t)\| \leqslant \exp(-MT);$$

on aura alors, par récurrence sur n,

$$\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| \leqslant \frac{M^n t^n}{n!} \exp(-MT);$$

et la suite de Cauchy X_n converge uniformément vers la solution $X_S(h, \lambda)$.

La relation (4) résulte de la formule de différentiabilité de A. Ghouila-Houri ([2]) étendue au cas d'un intervalle fixé sans restriction ([4]) et transformée en considérant la différence de deux solutions proches de $\bar{X}$. En effet, pour S fixé, U_λ reste à valeurs dans le compact fixe K_S et on a :

$$U_\lambda(.) = \sum_u a_u(.)u + \left(1 - \sum_u a_u(.)\right)\bar{U}(.),$$

où a_u est la fonction caractéristique de l'ensemble $\bigcup_s I_\lambda(s, u)$.

On obtient alors :

$$\text{(5)} \quad X_S(h, \lambda)(T) - X_S(h', \lambda')(T) = D(T, 0)(h - h')$$
$$+ \sum_u \int_0^T (a_u(t) - a'_u(t))g_u(t)\,\mathrm{d}t + \left(\|h - h'\| + \sum_u \|a_u - a'_u\|\right)\varepsilon(h, h', a, a')$$

où $\varepsilon(h, h', a, a')$ tend vers 0 quand (h, h', a, a') tend vers (0, 0, 0, 0), et

$$g_u(t) = D(T, t)[f(\bar{X}(t), u, t) - f(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t)].$$

Pour toute fonction g continue à droite en t, on a :

$$\int_{t+\alpha}^{t+\beta} g(s)\,\mathrm{d}s = (\beta - \alpha)g(t) + |\beta - \alpha|\, \varepsilon(\alpha, \beta),$$

où $\varepsilon(\alpha, \beta)$ tend vers 0 quand (α, β) tend vers (0, 0) par valeurs positives; en appliquant cette relation à la fonction g_u et aux différents intervalles

$$\left[t + \sum_{v \leqslant u} \lambda'(t, v),\ t + \sum_{v \leqslant u} \lambda(t, v)\right],$$

on obtient :

$$\int_0^T (a_u(t) - a'_u(t))g_u(t)\,\mathrm{d}t = \sum_t (\lambda(t, u) - \lambda'(t, u))g_u(t) + \|\lambda - \lambda'\|\, \varepsilon(\lambda, \lambda')$$

où $\varepsilon(\lambda, \lambda')$ tend vers 0 quand (λ, λ') tend vers (0, 0).

Il suffit alors de remplacer ces différentes expressions dans la formule (5) pour obtenir l'expression (4).

REMARQUE. On peut également démontrer ce théorème en utilisant le théorème de linéarisation des équations différentielles : la démonstration diffère alors peu de celles des théorèmes 2 et 3 de [7] (chapitre 18).

c) **Notion de pseudo-solution.** $X_S(h, \lambda)$ est strictement dérivable en (0, 0) à ceci près qu'elle n'est définie que pour $\lambda \geqslant 0$.

Définition. Pour S fixé et $(h, \lambda) \in V_S$, on appelle *pseudo-solution* associée à (h, λ) la fonction $Z_S(h, \lambda)$ définie pour tout t par :

$$Z_S(h, \lambda)(t) = X_S(h, \lambda^+)(t) - \Delta \cdot \lambda^-,$$

où

$$\lambda^+ = \sup(\lambda, 0) \quad \text{et} \quad \lambda^- = \sup(-\lambda, 0).$$

Si on a $\lambda \geqslant 0$, $Z_S(h, \lambda)$ coïncide avec la solution $X_S(h, \lambda)$.

Théorème 2. *La fonction* $Z_S(h, \lambda)(T)$ *est une fonction de* (h, λ) *strictement dérivable en* (0, 0) *et sa dérivée est la restriction à* $E \times A_S$ *de la fonction linéaire* l *définie par :*

$$l \cdot (h, \lambda) = D(T, 0) \cdot h + \Delta \cdot \lambda$$

Cela résulte immédiatement de la formule (4) et de la définition de pseudo-solution car on a :

$$\|\lambda^+ - \lambda'^+\| \leqslant \|\lambda - \lambda'\|, \qquad \|\lambda^+\| \leqslant \|\lambda\| \qquad \text{et} \qquad \|\lambda'^+\| \leqslant \|\lambda'\|.$$

d) **Conclusion.** Si $\bar{X}$ est une solution optimale du problème (P), alors pour tout ensemble fini S contenu dans $[0, T[\times \mathcal{U}$, l'élément (0, 0) est un maximum local du problème suivant :

(P_S) *maximiser* $\gamma(Z_S(h, \lambda)(T))$ *pour les éléments* (h, λ) *de* $E \times A_S$ *qui vérifient les conditions :*

$$\lambda \geqslant 0, \qquad \varphi_0(\bar{X}(0) + h) = 0 \quad , \quad \varphi_1(Z_S(h, \lambda)(T)) = 0,$$

$$\bar{\psi}_0(\bar{X}(0) + h) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \bar{\psi}_1(Z_S(h, \lambda)(T)) \geqslant 0.$$

En effet, la condition $\lambda \geqslant 0$ impose à la pseudo-solution de coïncider avec la solution; il résulte du théorème 2 que (P_S) est un programme différentiable.

C. RESOLUTION

a) **Notations.** Pour tout ensemble fini S, on pose :

$$g_S(h, \lambda) = \gamma(Z_S(h, \lambda)(T)),$$

$$p_S(h, \lambda) = (\varphi_0(\bar{X}(0) + h), \varphi_1(Z_S(h, \lambda)(T))),$$

$$q_S(h, \lambda) = (\bar{\psi}_0(\bar{X}(0) + h), \bar{\psi}_1(Z_S(h, \lambda)(T)));$$

les fonctions g_S, p_S et q_S sont définies dans un voisinage de $(0, 0)$ dans $E \times A_S$ et sont à valeurs respectivement dans $\mathbf{R}$, $F = F_0 \times F_1$ et $H = H_0 \times H_1$; g_S et q_S sont dérivables en $(0, 0)$ et p_S est strictement dérivable en $(0, 0)$.

Pour $\lambda \in A_S$, nous noterons $\lambda \gg 0$ la relation : pour tout élément (t, u) de S, $\lambda(t, u) > 0$; et dans H nous noterons $x \ll y$ la relation : chacune des composantes de x est strictement inférieure à la composante correspondante de y.

b) **Lemme 1.** *Si* $(0, 0)$ *est une solution optimale locale du problème* (P_S) *et si la fonction* $p'_S(0, 0)$ *est surjective, alors pour tout élément* (h, λ) *de* $E \times A_S$ *qui vérifie :*

$$\lambda \gg 0, \quad p'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) = 0 \qquad \text{et} \qquad q'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) \gg 0,$$

on a $g'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) \leqslant 0$.

$p'_S(0, 0)$ étant surjective, ses composantes sont linéairement indépendantes dans le dual de E; on peut alors appliquer la technique du difféomorphisme ([7] chapitre 13, lemme 2) et on peut remplacer l'hypothèse de dérivabilité continue par celle de dérivabilité stricte ([1] 1.5.1) : il existe un arc $(h(r), \lambda(r))$ défini dans $[0, r_0]$, dérivable en 0, de dérivée (h, λ), tel que $p_S(h(r), \lambda(r)) = 0$ pour tout r, et que $(h(0), \lambda(0)) = (0, 0)$.

On a d'une part, $\lambda(r) = r\lambda + r\varepsilon(r)$, où $\varepsilon(r)$ tend vers 0 quand r tend vers 0; et il résulte de la condition $\lambda \gg 0$ que l'on a $\lambda(r) \geqslant 0$ pour r assez petit. On a d'autre part :

$$q_S(h(r), \lambda(r)) = q_S(0, 0) + rq'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) + r\varepsilon'(r),$$

où $\varepsilon'(r)$ tend vers 0 quand r tend vers 0; il résulte alors de la condition

$$q'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) \gg 0$$

que l'on a $q_S(h(r), \lambda(r)) \geqslant q_S(0, 0)$ pour r assez petit. Ainsi, pour r assez petit, d'une part la pseudo-solution $Z_S(h(r), \lambda(r))$ coïncide avec la solution $X_S(h(r), \lambda(r))$, et d'autre part elle vérifie les liaisons et les contraintes ; on a donc :

$$g_S(h(r), \lambda(r)) \leqslant g_S(0, 0),$$

et la conclusion du lemme résulte de la dérivabilité de g_S.

c) **Lemme 2.** *Si $\bar{X}$ est une solution optimale du problème (P), il existe des formes linéaires non toutes nulles u sur F, v sur H et a sur* **R** *telles que :*

1) *$a \geqslant 0$ et v est une forme linéaire positive ;*

2) *pour tout S fini, tout $h \in E$ et tout $\lambda \geqslant 0$ de A_S, on a :*

$$up'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) + vq'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) + ag'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) \leqslant 0.$$

La fonction $p'_S(0, 0)$ est égale à la restriction à $E \times A_S$ de l'application linéaire m définie par :

$$m \cdot (h, \lambda) = (\varphi'_0(\bar{X}(0)) \cdot h, \varphi'_1(\bar{X}(T)) \cdot [D(T, 0) \cdot h + \Delta \cdot \lambda]).$$

La famille filtrante croissante des sous-espaces vectoriels de F : $m(E \times A_S)$ admet un plus grand élément $m(E \times A_{S_0})$. Si celui-ci est distinct de F, il existe une forme linéaire non nulle u sur F telle que $u \cdot m \cdot (h, \lambda) = 0$ pour tout S et tout $(h, \lambda) \in E \times A_S$; alors si on pose $v = 0$ et $a = 0$, (u, v, a) satisfait les conclusions du lemme.

Plaçons-nous dans le cas où $m(E \times A_{S_0}) = F$: il en est de même pour tout ensemble S qui contient S_0.

On considère l'ensemble C des éléments (y, z, ρ) de $F \times H \times \mathbf{R}$ tels qu'il existe $S \supset S_0$ et $(h, \lambda) \in E \times A_S$ vérifiant :

$$\lambda \geqslant 0, \quad y = p'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda), \quad z \leqslant q'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) \quad \text{et} \quad \rho < g'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) ;$$

C est un cône et C est convexe car si $\lambda_1 \in A_{S_1}$ et $\lambda_2 \in A_{S_2}$ vérifient : $\lambda_1 \geqslant 0$ et $\lambda_2 \geqslant 0$, alors l'élément $\lambda_1 + \lambda_2$ de $A_{S_1 \cup S_2}$ vérifie : $\lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 0$.

Et d'après le lemme 1, le point $(0, 0, 0)$ n'appartient pas à C; il existe donc une forme linéaire non nulle (u, v, a) sur $F \times H \times \mathbf{R}$ telle que l'on ait, pour tout $(y, z, \rho) \in C$,

$$uy + vz + a\rho \leqslant 0.$$

Pour tout $S \supset S_0$ et tout $(h, \lambda) \in E \times A_S$ tel que $\lambda \geqslant 0$, pour tout élément $\alpha \geqslant 0$ de H et tout nombre $\beta > 0$,

$$y = p'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda), \quad z = q'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) - \alpha, \quad \rho = g'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) - \beta$$

définit un point (y, z, ρ) de C. On a donc :

$$up'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) + vq'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) + ag'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) - v\alpha - a\beta \leqslant 0 ;$$

il en résulte que v et a sont des formes linéaires positives et que l'on a, pour tout $\lambda \geqslant 0$ de A_S et tout h de E :

$$up'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) + vq'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) + ag'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda) \leqslant 0.$$

Pour S fini quelconque, il suffit de considérer l'ensemble $S \cup S_0$ et les éléments $\lambda \geqslant 0$ de $A_{S \cup S_0}$ à support contenu dans S.

d) **Théorème 3** (condition nécessaire d'optimalité). *Sous les hypothèses* (I) *et* (II), *si* $\bar{X}$ *est solution optimale du problème* (P), *il existe des formes linéaires non toutes nulles* u_0 *sur* F_0, u_1 *sur* F_1, v_0 *sur* H_0, v_1 *sur* H_1 *et* a *sur* $\mathbf{R}$, *et il existe une solution* $P(t)$ *de l'équation :*

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = - P(t) \cdot f'_x(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t)$$

telles que :

1) *les formes* v_0, v_1 *et* a *sont positives ;*

2) $P(t)$ *vérifie les conditions aux limites :*

$$P(0) = - u_0\varphi'_0(\bar{X}(0)) - v_0\bar{\psi}'_0(\bar{X}(0))$$
$$P(T) = u_1\varphi'_1(\bar{X}(T)) + v_1\bar{\psi}'_1(\bar{X}(T)) + a\gamma'(\bar{X}(T))$$

3) *En tout point* t *de* $[0, T[$, *on a :*

$$P(t) \cdot f(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t) = \max_{u \in \mathcal{U}} P(t) \cdot f(\bar{X}(t), u, t).$$

Les formes linéaires u sur $F = F_0 \times F_1$ et v sur $H = H_0 \times H_1$ du lemme 2 peuvent s'écrire $u = (u_0, u_1)$ et $v = (v_0, v_1)$ pour des formes linéaires u_0 sur F_0, u_1 sur F_1 et des formes linéaires positives v_0 sur H_0 et v_1 sur H_1.

Il résulte du lemme 2, pour $S = \{ (t, u) \}$, que l'on a pour tout $(h, \lambda) \in E \times A_S$ tel que $\lambda \geqslant 0$:

$$L \cdot h + M\lambda \leqslant 0$$

où

$$L = u_0\varphi'_0(\bar{X}(0)) + v_0\bar{\psi}'_0(\bar{X}(0)) + [u_1\varphi'_1(\bar{X}(T)) + v_1\bar{\psi}'_1(\bar{X}(T)) + a\gamma'(\bar{X}(T))] \cdot D(T, 0)$$

et

$$M\lambda = [u_1\varphi'_1(\bar{X}(T)) + v_1\bar{\psi}'_1(\bar{X}(T)) + a\gamma'(\bar{X}(T))] \cdot \Delta \cdot \lambda ;$$

par conséquent la forme linéaire L est nulle et on a $M \leqslant 0$.

Posons

$$P(t) = [u_1\varphi_1'(\bar{X}(T)) + v_1\bar{\psi}_1'(\bar{X}(T)) + a\gamma'(\bar{X}(T))] \cdot D(T, t) ;$$

alors $P(t)$ est solution de l'équation adjointe à l'équation linéarisée (3) dont D est la résolvante. Les conditions aux limites pour $P(T)$ et $P(0)$ résultent de la définition de $P(t)$, car $D(T, T)$ est l'identité, et de la propriété $L = 0$.

Enfin, la condition $M \leqslant 0$ s'écrit :

$$P(t) \cdot [f(\bar{X}(t), u, t) - f(\bar{X}(t), \bar{U}(t), t)] \leqslant 0,$$

ce qui prouve la troisième conclusion du théorème qui est alors entièrement démontré.

e) **Hypothèses de régularité.** La démonstration et la conclusion du théorème 3 n'ont nécessité aucune hypothèse de régularité; mais pour que la conclusion ne soit pas triviale, il est nécessaire que l'on ait $P(t) \neq 0$. Or les formes u_0, u_1, v_0, v_1 et a ne sont pas toutes nulles; il résulte donc des conditions aux limites que l'on aura $P(t) \neq 0$ si l'hypothèse suivante est satisfaite :

il n'existe pas de formes linéaires non toutes nulles u_0, u_1, v_0, v_1 et a telles que v_0, v_1 et a soient positives et que l'on ait :

$$u_0\varphi_0'(\bar{X}(0)) + v_0\bar{\psi}_0'(\bar{X}(0)) = 0$$

$$u_1\varphi_1'(\bar{X}(T)) + v_1\bar{\psi}_1'(\bar{X}(T)) + a\gamma'(\bar{X}(T)) = 0$$

Cette hypothèse est légèrement plus faible que l'hypothèse d'indépendance linéaire qui est usuellement faite et qui ne limite pas la condition aux formes v_0, v_1 et a positives. La conclusion $P(t) \neq 0$ est en particulier assurée dans le cas où la seule relation de dépendance linéaire est du type :

$$\gamma'(\bar{X}(T)) = c\psi_1^{k\prime}(\bar{X}(T))$$

pour une constante $c > 0$ et une contrainte saturée ψ_1^k. De manière générale, il est logique que la conclusion $P(t) \neq 0$ soit satisfaite dans le cas où les contraintes et le critère « jouent dans le même sens » et ne se neutralisent pas.

D. APPLICATIONS ET EXTENSIONS

Les applications de la technique utilisée ne se limitent pas au cas classique que nous avons étudié.

a) **Application à la programmation différentielle statique.** Pour $T = 0$, $\varphi_0 = 0$ et $\psi_0 = 0$, le problème (P) se réduit au problème d'optimalité statique : maximiser $\gamma(x)$ pour les éléments x de E qui vérifient $\varphi_1(x) = 0$ et $\psi_1(x) \geqslant 0$.

Il résulte du lemme 2 que si $\bar{x}$ est une solution optimale de ce problème, il existe des formes linéaires non toutes nulles u_1 sur F_1, v_1 sur H_1 et a sur $\mathbb{R}$ telles que :

1) $a \geqslant 0$ et v_1 est une forme linéaire positive;

2) $u_1 \varphi_1'(\bar{x}) + v_1 \bar{\psi}_1'(\bar{x}) + a\gamma'(\bar{x}) = 0$.

Cette conclusion ne nécessite aucune hypothèse de régularité.

b) **Principe du maximum pour des commandes généralisées à valeurs dans un espace compact $\mathcal{U}$.** Pour les commandes généralisées définies comme mesures de Radon positives sur $[0, T] \times \mathcal{U}$ de projection sur $[0, T]$ la mesure de Lebesgue ([2]), la solution X associée à la commande:

$$\mu = \sum_i \lambda_i(.)\mu_i + \left(1 - \sum_i \lambda_i(.)\right)\bar{\mu}$$

est une fonction strictement dérivable de l'état initial et des paramètres λ_i de l'espace L^∞ pour $\lambda_i \geqslant 0$ et pour un ensemble fini fixé de commandes μ_i.

A l'aide de la notion de pseudo-solution définie de manière similaire, la résolution du problème d'optimalité s'opère de la même façon et nous donne l'expression du principe du maximum pour ces commandes.

c) **Formes nouvelles des liaisons, contraintes et critère.** Pour la démonstration du lemme 2, nous avons regroupé les liaisons qui portaient séparément sur l'état initial et l'état final et nous avons fait de même pour les contraintes. On traite sans aucun changement le cas où liaisons, contraintes et critère portent sur le couple constitué par l'état initial et l'état final. Plus généralement, liaisons, contraintes et critère peuvent porter sur le triplet constitué par l'état initial, l'état final et la commande pourvu que ces fonctions soient strictement dérivables par rapport aux paramètres choisis pour la commande. Plus généralement encore, *liaisons, contraintes et critère peuvent porter sur l'ensemble de la solution et sur la commande* dans le cas où la solution X est une fonction strictement dérivable des paramètres choisis pour la commande : c'est le cas de la paramétrisation des commandes généralisées faite ci-dessus.

De plus, la formulation obtenue du principe du maximum s'applique alors directement à des liaisons, contraintes et critère sous forme intégrale sans procéder à la transformation qui introduit de nouvelles hypothèses (exemple traité dans [5], chapitre VI, § 4).

d) **Principe du maximum en dimension infinie.** Si l'espace des états E et les espaces des valeurs des liaisons F et des contraintes H sont des espaces de Banach de dimension infinie, la démonstration et l'énoncé du principe du maximum que nous avons fait restent valables à condition d'imposer les hypothèses supplémentaires suivantes :

(III) l'intérieur du cône positif de H est non vide;

(IV) les liaisons vérifient l'alternative suivante :

— ou bien il existe un hyperplan fermé de F qui contient tous les sous-espaces $p'_S(0, 0)(E \times A_S)$;

— ou bien il existe un ensemble fini S_0 tel que p'_{S_0} (0, 0) soit surjective.

L'hypothèse (III) permet de remplacer la condition $0 \leqslant q'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda)$ par l'appartenance de $q'_S(0, 0) \cdot (h, \lambda)$ à l'intérieur du cône positif de H. Pour étudier un problème d'optimalité avec contraintes à valeurs dans un espace dont le cône positif a un intérieur vide, on peut modifier cette hypothèse ([6], remarque 3.5).

Quand F est de dimension infinie, la famille filtrante des sous-espaces $m(E \times A_S)$ n'admet pas en général de plus grand élément; et dans le cas où aucun de ces sous-espaces ne coïncide avec F, l'hypothèse (IV) nous assure l'existence d'une forme linéaire continue u non nulle sur F telle que $u, v = 0$ et $a = 0$ vérifient les conclusions du lemme 2. Toutefois, cette hypothèse peut être allégée en séparant les liaisons linéaires et les liaisons non linéaires ([5], chapitre V, § 2, et [6], § 4).

Précisons que la séparation des convexes effectuée dans le lemme 2 reste possible en dimension infinie car le cône convexe C qu'on y considère est ouvert. Mais la conclusion du lemme 2 n'est pas valable en dimension infinie sans hypothèse supplémentaire, même dans le cas de la programmation statique ($T = 0$) ainsi que le montre le contre-exemple qui suit.

Contre-exemple. On cherche à maximiser $\gamma(x) = -\sum_n x_n$ sur l'espace E des suites sommables de nombres réels $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui vérifient

$$\varphi(x) = \left(\frac{x_n}{n^2 + 1}\right)_{n \in \mathbf{N}} = 0.$$

La fonction φ étant injective de E dans E, le problème admet la solution 0, mais il n'existe pas de formes linéaires continues u sur E et a sur $\mathbf{R}$, non toutes deux nulles, telles que l'on ait $u\varphi + a\gamma = 0$: φ reste bornée sur l'ensemble des $x \in E$ qui vérifient $|x_n| \leqslant 1$ pour tout n, et γ ne l'est pas.

Application. La formulation du principe du maximum obtenue s'applique au problème du calcul des variations pour des extrémités appartenant à des variétés fermées fixées d'un espace de Banach ([6], § 6).

e) **Cas des commandes généralisées à valeurs dans un espace topologique séparé.** Dans le cas où la commande généralisée optimale ne prend pas ses valeurs dans un sous-espace compact de $\mathcal{U}$, l'hypothèse (I) ne suffit pas à assurer la dérivabilité stricte de la solution (théorème 1). On introduit l'hypothèse suivante :

il existe un nombre $\rho > 0$ tel que, pour tout sous-ensemble fini B de $\mathcal{U}$, la fonction

$$k(t) = \sup \{ \|f'_x(x, u, t)\| \; ; u \in B \cup \{ \bar{U}(t) \} \quad \text{et} \quad \|x - \bar{X}(t)\| \leqslant \rho \}$$

est intégrable sur $[0, T]$.

Alors, pour les commandes généralisées à valeurs dans un espace topologique séparé, on peut définir une paramétrisation qui permet en appliquant la même technique d'obtenir une condition nécessaire d'optimalité ([6], théorèmes 2.6 et 5.7).

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, *Variétés différentielles et analytiques*, Fascicule de résultats, Ed. Hermann, 1967.

[2] A. GHOUILA-HOURI, « Sur la généralisation de la notion de commande d'un système guidable », *R.I.R.O.*, 1re année, n° 4, 1967, p. 7-32.

[3] E. J. MCSHANE, « Necessary conditions in generalized-curve problems of the calculus of variations », *Duke Math., J.* 7, 1940, p. 1-27.

[4] P. MICHEL, « Complétion de l'ensemble des trajectoires d'un système a commande », *Cahier de l'I.R.I A.*, n° 4, mars 1971, p. 79-98.

[5] P. MICHEL, *Étude des commandes généralisées à valeurs dans un espace topologique séparé*, thèse, Université Paris VI, 1972.

[6] P. MICHEL, « Commandes généralisées . Conditions nécessaire d'optimalité dans un espace de Banach » (à paraître).

[7] R. PALLU DE LA BARRIÈRE, *Cours d'automatique théorique*, Dunod, 1966.

[8] L. S. PONTRJAGIN, V. G. BOLTYANSKII, R V. GAMKRELIDZE, E. F. MISCHENKO, *The mathematical theory of optimal processes*, Fizmatgiz, Moscou, 1961 (traduction : Interscience, New-York, 1962)