REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, INFORMATIQUE, RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. MATHÉMATIQUE

VALERIU PREPELITA

Applications entrée-sortie sur un corps fini

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique, tome 6, nº 3 (1972), p. 3-21.

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_3_3_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, décembre 1972, R-3, p. 3-21)

APPLICATIONS ENTREE-SORTIE SUR UN CORPS FINI

par Valeriu PREPELITA [1]

Résumé. — *On étudie les systèmes linéaires discrets décrits par une application entrée-sortie, par une fonction de transfert ou par des équations d'état et de sortie, sur un corps fini. Cette étude est justifiée par ses applications dans la théorie des codes.*

On obtient la caractérisation de toutes les applications entrée-sortie f, à l'aide de certains invariants q, T et α_s.

On donne une relation directe entre la forme de l'application entrée-sortie, sa fonction de transfert et une réalisation. Dans le cas ou l'espace des entrées ou des sorties est unidimensionnel, une réalisation minimale est obtenue directement à l'aide des invariants de f.

Quand les espaces des entrées et des sorties sont multidimensionnels, la réalisation obtenue avec les invariants de l'application n'est pas minimale ; on donne un algorithme pour la détermination d'une réalisation minimale. Avec une modification non importante, cet algorithme peut être utilisé même dans le cas des corps commutatifs quelconques.

1. Introduction

Nous allons utiliser certaines notions introduites par R. Kalman dans [3], [4], [5].

a) *Description externe* des systèmes linéaires.

Soient K un corps commutatif, $U = K^m$ l'espace des entrées, $Y = K^p$ l'espace des sorties, $\Omega = K^m[z]$ l'ensemble des séquences d'entrée.

On appelle *application entrée-sortie* un K-homomorphisme $f : \Omega \to Y$. Donc, la sortie au moment $t = 1$, $y(1) = f(u)$ correspond par f à la séquence des entrées terminée au moment $t = 0$, $(u(-\nu), u(-\nu + 1), \ldots, u(0))$, écrite comme un polynôme $u = \sum_{s=0} u(-s)z^s$.

b) *Description interne*

Un système linéaire est un triplet $\Sigma = (F, G, H)$ de matrices sur K de type $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ respectivement.

(1) Institutul Politehmic Bucaresti, Facultatea Transporturi.

Les équations du système sont :

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),$$
$$y(t) = Hx(t)$$

où $x(t) \in X = K^n$ (l'espace des états),

$$u(t) \in U, \quad y(t) \in Y.$$

Si la séquence des entrées est $u(-\nu)$, $u(-\nu+1)$, ..., $u(0)$, la sortie au moment $t = 1$ sera $y(1) = \sum_{s=0}^{\nu} HF^s GU(-s)$; donc, l'application f_Σ, définie par $f_\Sigma\left(\sum_{s=0}^{\nu} u(-s)z^s\right) = \sum_{s=0}^{\nu} HF^s Gu(-s)$ correspond naturellement au système Σ, associant la sortie à une entrée donnée.

Le système Σ est une réalisation de l'application f si $f = f_\Sigma$.

c) *Fonction de transfert*

Ω est un $K[z]$ — module libre pour la loi de composition externe

$$\pi(z) \cdot \begin{bmatrix} u_1(z) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi(z)u_1(z) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \pi(z)u_m(z) \end{bmatrix};$$

un système de générateurs est

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$\Gamma = K^p[[z^{-1}]]$ est un $K(z)$ — module, avec la loi de composition externe

$$\left(\sum_{s=0}^{\nu} a_s z^s\right)\left(\sum_{i \geqslant 0} b_i \frac{1}{z^{i+1}}\right) = \sum_{i \geqslant 0} c_i \frac{1}{z^{i+1}}, \; ou \, c_i = \sum_{j=0}^{\nu} a_j b_{i+j}$$

(donc le produit d'un polynôme avec une série formelle, suivi par l'écart des puissances non-négatives de z).

L'application f détermine un $K[z]$ — homomorphisme

$$\bar{f} : \Omega \longrightarrow \Gamma$$
$$u \longrightarrow \sum_{s \geqslant 0} f(z^s u) \frac{1}{z^{s+1}},$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[rr, "\bar{f}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \Gamma \\ & \Omega/Ker\bar{f} \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

Le module quotient $X_f = \Omega/_{\mathrm{Ker}\bar{f}}$ est l'ensemble des états de l'application f. Donc f a une réalisation de dimension finie $\Leftrightarrow \dim_K X_f$ est finie $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\bar{f} = (0)$.

Dans ce cas, X_f est un module de torsion; soit $(\pi(z))$ son annulateur.

Alors

$$\pi(z) \cdot \bar{f}(e_i) = \bar{f}(\pi(z) \cdot e_i) = \psi[\pi(z)\varphi(e_i)] = 0 \in \Gamma.$$

donc

$$\pi(z)\bar{f}(e_i) = \theta_i(z) \in K^p[z], \text{ degré } \theta_i < \text{degré } \pi.$$

La fonction de transfert du système est la matrice

$$Z = [\theta_1(z)/\pi(z) \ldots \theta_m(z)/\pi(z)],$$

où $\bar{f}(e_i) = \theta_i(z)/\pi(z)$, développée en série formelle en z^{-1}.

On vérifie aisément que $Z = H(zI - F)^{-1}G$, si $\Sigma = (F, G, H)$ est une réalisation de l'application f.

Dans ce qui suit, nous considérons K un corps fini et les applications f avec la propriété : $\mathrm{Ker}\bar{f} \neq (0), \mathrm{Ker}\bar{f} \neq \Omega$.

2. Applications entrée-sortie $f : K[z] \to K$

Théorème 1

Soit $f : K[z] \to K$ une application entrée-sortie linéaire.

a) *Alors* $\exists q \geqslant 0$, $T \geqslant 0$; $\alpha_s \in K$, $s = 0, 1, \ldots, T + q - 1$ *telles que*

$$f\left(\sum_{s \geqslant 0} a_s z^s\right) = \sum_{s=0}^{q-1} a_s \alpha_s + \sum_{l \geqslant 0} \sum_{s=0}^{T-1} a_{lT+s+q} \alpha_{s+q}, \forall \sum_{s \geqslant 0} a_s z^s \in K[z]. \tag{1}$$

b) *La fonction de transfert correspondante est la fraction irréductible* définie par

$$Z = \sum_{s=0}^{q-1} \alpha_s \frac{1}{z^{s+1}} + \frac{\sum_{s=0}^{T-1} \alpha_{T+q-s-1} z^s}{z^q(z^T - 1)} = \sum_{s=0}^{q-1} \alpha_s \frac{1}{z^{s+1}} + \frac{\sum_{s=0}^{n-1} \gamma_s z^s}{z^q\left(z^n + \sum_{s=0}^{n-1} \beta_s z^s\right)} \tag{2}$$

c) *Une réalisation minimale de l'application f est*
$\Sigma = (F, G, H)$, avec

$$(3)\ F = \begin{bmatrix} F_{11} & 0_1 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} (n+q) \times 1, \qquad H = [\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{n+q-1}],$$

où

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 00 \ldots 00 \\ 10 \ldots 00 \\ 01 \ldots 00 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 00 \ldots 10 \end{bmatrix} \quad q \times q, \qquad F_{22} = \begin{bmatrix} 00 \ldots 0 - \beta_0 \\ 10 \ldots 0 - \beta_1 \\ 01 \ldots 0 - \beta_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 00 \quad\ 1 - \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad n \times n$$

$$F_{21} = \begin{bmatrix} 00 \ldots 01 \\ 00 \ldots 00 \\ \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 00 \quad 00 \end{bmatrix} \quad n \times q, \qquad 0_1 \textit{ matrice nulle } q \times n,$$

$\beta_i \in K$ *étant définis dans* (2).

Observation. Dans le cas $q = 0 (T = 0)$, nous prenons $\sum_{s=0}^{q-1} = 0 \left(\sum_{s=0}^{T-1} = 0\right)$ et nous considérons absentes (vides) les matrices ayant une dimension q (T).

Démonstration

Pour $u = \sum_{s=0}^{\nu} a_s z^s \in K[z]$, nous allons écrire $u = \sum_{s=0} a_s z^s$ où $a_s = 0 \ \forall\ s > \nu$.

(1) $Ker \bar{f}$ est un idéal de $K[z]$, donc est engendré par un polynôme unitaire $\pi(z)$.

Soit $\pi(z) = z^q \sigma(z)$, $(\sigma(z), z) = 1$.

Si $\sigma(z) = 1$, alors $Ker \bar{f} = (z^q)$ donc $f(z^{q+s}) = 0 \ \forall\ s \geqslant 0$,

donc $f\left(\sum_{s \geqslant 0} a_s z^s\right) = \sum_{s=0}^{q-1} a_s \alpha_s$ et $T = 0$.

K est un corps fini, donc il existe $T \geqslant 1$, tel que $\sigma(z) \mid z^T - 1$ (T est l'exposant du $\sigma(z)$, [1], [6]).

Si

$$\sigma(z) \neq 1, z^q \sigma(z) \mid z^q (z^T - 1),$$

donc

$$z^{T+q} - z^q \in Ker \bar{f}$$

donc

$$\bar{f}(z^{T+q}) = \bar{f}(z^q),$$

donc

$$f(z^{lT+q+s}) = f(z^{lq+s}),\ s = 0, 1, \ldots, T-1;\ l \geqslant 0.$$

Alors

$$f\left(\sum_{s\geqslant 0} a_s z^s\right) = \sum_{s\geqslant 0} a_s f(z) =$$

$$\sum_{s=0}^{q-1} a f(z^s) + \sum_{l\geqslant 0}\sum_{s=0}^{T-1} a_{lT+q+s} f(z^{q+s}) =$$

$$\sum_{s=0}^{q-1} a_s \alpha_s + \sum_{l\geqslant 0}\sum_{s=0}^{T-1} a_{lT+q+s}\alpha_{q+s},$$

où

$$\alpha_s = f(z^s),\ s = 0, 1, \ldots, T+q-1.$$

Si $q = 0, f(z^{lT+s}) = f(z^s),\ s = 0, 1, \ldots, T-1,\ l \geqslant 0$

donc

$$f\left(\sum_{s\geqslant 0} a_s z^s\right) = \sum_{s\geqslant 0}\sum_{s=0}^{T-1} a_{lT+s}\alpha_s.$$

(2) La fonction de transfert est

$Z = \bar{f}(1) = \theta(z)/\pi(z)$ fraction irréductible, degré $\theta <$ degré π.

Si $\pi(z) = z^q$, alors $f(z^{q-1}) \neq 0$ et $f(z^{q+s}) = 0, \forall\ s \geqslant 0$ donc

$$Z = \bar{f}(1) = \alpha_0 \frac{1}{z} + \ldots + \alpha_{q-1} \cdot \frac{1}{z^q}$$

Si $\sigma(z) \neq 1$

$$\bar{f}(1) = \sum_{s\geqslant 0} f(z^s) \cdot \frac{1}{z^{s+1}} = \alpha_0 \frac{1}{z} + \alpha_1 \frac{1}{z^q} + \ldots + \alpha_{q-1}\frac{1}{z^q} +$$

$$+ \left(\alpha_q \frac{1}{z^q} + \alpha_{q+1}\frac{1}{z^{q+1}} + \ldots + \alpha_{T+q-1}\frac{1}{z^{T+q-1}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^{T+1}} + \ldots + \frac{1}{z^{lT+1}} + \ldots\right)$$

Mais $\frac{1}{z} + \frac{1}{z^{T+1}} + \ldots + \frac{1}{z^{T+1}} + \ldots$ est le développement en série formelle de la fraction $\frac{z^{T-1}}{z^T - 1}$.

Donc, la fonction de transfert est la fraction irréductible obtenue dans (2) par la simplification de

$$Z = \alpha_0 \frac{1}{z} + \dots + \alpha_{q-1} \frac{1}{z^q} + \frac{\alpha_q z^{T-1} + \dots + \alpha_{T+q-1}}{z^q(z^T - 1)}$$

(3) Les applications f et f_Σ étant des K-homomorphismes, on a $f = f_\Sigma$ si et seulement si $f(z^s) = f_\Sigma(z^s) = HF^s G, \forall\, s \geqslant 0$.

I) Dans le cas $\pi(z) = z^q$ ($T = 0$, donc $n = 0$), la réalisation est

$$F = \begin{bmatrix} 00 \ \dots \ 00 \\ 10 \ \dots \ 00 \\ 01 \ \dots \ 00 \\ \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \\ 00 \ \dots \ 10 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \qquad H = [\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{q-1}].$$

En effet si $s < q$,

$$F^s = \begin{bmatrix} 00 \dots 0 \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 00 \dots 0 \dots 0 \\ 10 \dots 0 \dots 0 \\ 01 \dots 0 \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 00 \dots 1 \dots 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow s+1, \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad \text{et} \qquad F^q = 0$$

donc

$$HF^s G = [\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{q-1}] \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_s = f(z^s), \quad s < q$$

$$HF G = 0 = f(z^s), \quad s \geqslant q.$$

II) Supposons maintenant $q = 0$; soit

$$\pi(z) = z^n + \beta_{n-1} z^{n-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0, \ \beta_0 \neq 0.$$

Alors

$$F = \begin{bmatrix} 00 \;...\; 0 - \beta_0 \\ 10 \;...\; 0 - \beta_1 \\ 01 \;...\; 0 - \beta_2 \\ \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 00 \;...\; 1 - \beta_{n-1} \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \qquad H = [\alpha_0 \;...\; \alpha_{n-1}].$$

π (z) est le polynôme caractéristique de la matrice F, donc (théorème de Hamilton-Cayley)

$$F^n + \beta_{n-1}F^{n-1} + ... + \beta_1 F + \beta_0 I = 0.$$

Nous devons considérer deux cas :

i) $n = T$, donc $\pi(z) = z^T - 1$,

$$F = \begin{bmatrix} 00 \;...\; 01 \\ 10 \;...\; 00 \\ 01 \;...\; 00 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 00 \;...\; 10 \end{bmatrix}, \quad F^T = I.$$

Alors

$$f(z^{lT+s}) = HF^{lT+s}G = HF^sG = [\alpha_0 \;...\; \alpha_{T-1}] \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow s+1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \alpha_s = f(z^s)$$

$$\forall\, l \geqslant 0, \qquad s = 0, 1, ..., T-1.$$

ii) $n < T$.

La relation (2) devient ($q = 0$) :

$$Z = \frac{\alpha_0 z^{T-1} + ... + \alpha_{T-2}z + \alpha_{T-1}}{z^T - 1} = \frac{\gamma_{n-1}z^{n-1} + ... + \gamma_1 z + \gamma_0}{z^n + \beta_{n-1}z^{n-1} + ... + \beta_1 z + \beta_0}$$

De l'égalité

$$(\alpha_0 z^{T-1} + ... + \alpha_{T-1})(z^n + \beta_{n-1}z^{n-1} + ... + \beta_0) =$$
$$= (z^T - 1)(\gamma_{n-1}z^{n-1} + ... + \gamma_0)$$

nous obtenons :

$$\alpha_0\beta_{n-k} + \alpha_1\beta_{n-k+1} + \dots + \alpha_{k-1}\beta_{n-1} + \alpha_k = \gamma_{n-k-1}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

$$\alpha_k\beta_0 + \alpha_{k+1}\beta_1 + \dots + \alpha_{n+k-1}\beta_{n-1} + \alpha_{n+k} = 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant T-n-1 \tag{5}$$

$$\alpha_{T-n+k}\beta_0 + \dots + \alpha_{T-2}\beta_{n-k-2} + \alpha_{T-1}\beta_{n-k-1} = -\gamma_{n-k-1}$$
$$= \alpha_0\beta_{n-k} - \alpha_1\beta_{n-k+1} - \dots - \alpha_{k-1}\beta_{n-1} - \alpha_k \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

De (4) et (5) il en résulte que :

$$f_\Sigma(1) = HG = \alpha_0$$
$$f_\Sigma(z^k) = HF^kC = \alpha_k \qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1$$
$$f_\Sigma(z^n) = HF^nG = -\beta_{n-1}HF^{n-1}G - \dots - \beta_1HFG - \beta_0HG$$
$$= -\beta_{n-1}\alpha_{n-1} - \dots - \beta_1\alpha_1 - \beta_0\alpha_0 = \alpha_n$$
$$f_\Sigma(z^{n+k}) = HF^{n+k}G = -\beta_{n-1}HF^{n+k-1}G - \dots - \beta_1HF^{k+1}G - \beta_0HF^kG$$
$$= -\beta_{n-1}\alpha_{n+k-1} - \dots - \beta_1\alpha_{k+1} - \beta_0\alpha_k = \alpha_{n+k},$$
$$0 \leqslant k \leqslant T-n-1$$

$$f_\Sigma(z^{T+k}) = HF^nF^{T-n+k}G = -\beta_{n-1}\alpha_{k-1} - \dots - \beta_1\alpha_{T-n+k+1}$$
$$-\beta_0\alpha_{T-n+k} = \alpha_k, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n$$

$$f_\Sigma(z^{T+n+k}) = -\beta_{n-1}\alpha_{n+k-1} - \dots - \beta_1\alpha_{k+1} - \beta_0\alpha_k = \alpha_{n+k}$$
$$0 \leqslant k \leqslant T-n-1.$$

Nous avons donc montré que

$$f_\Sigma(z^{T+s}) = f_\Sigma(z^s) = \alpha_s,\ s = 0, 1, \dots, T-1.$$

Supposons que $f_\Sigma(z^{(l-1)T+s}) = f_\Sigma(z^s) = \alpha_s$, $s = 0, 1, \dots, T-1$.

Alors $f_\Sigma(z^{lT}) = HF^{lT}G = HF^{(l-1)T+T-n} \cdot F^nG$

$$= -\beta_{n-1}HF^{(l-1)T+T-1}G - \dots - \beta_1HF^{(l-1)T+T-n+1}G$$
$$-\beta_0HF^{(l-1)T+T-n}G$$
$$= -\beta_{n-1}\alpha_{T-1} - \dots - \beta_1\alpha_{T-n+1} - \beta_0\alpha_{T-n} = \alpha_0.$$

On obtient successivement

$$f_\Sigma(z^{lT+k}) = HF^{(l-1)T+T-n+k}F^nG$$
$$= -\beta_{n-1}\alpha_{k-1} - \dots - \beta_1\alpha_{T-n+k+1} - \beta_0\alpha_{T-n+k} = \alpha_k,$$
$$0 \leqslant k \leqslant T-n-1$$

et

$$f_\Sigma(z^{lT+n+k}) = -\beta_{n-1}\alpha_{n+k-1} - \dots - \beta_1\alpha_{k+1} - \beta_0\alpha_k = \alpha_{n+k},$$
$$0 \leqslant k \leqslant T-n-1.$$

Nous avons démontré par induction que

$$f_\Sigma(z^{lT+s}) = f_\Sigma(z^s) = \alpha_s = f(z^s),\ s = 0, 1, \dots, T-1\ ;\ l \geqslant 0.$$

III) Soit maintenant $q > 0$, $n > 0$.

Considérons l'application $f_2\left(\sum_{s \geqslant 0} a_s z^s\right) = \sum_{l \geqslant 0} \sum_{s=0}^{T-1} a_{lT+s}\alpha_{q+s}$

Nous avons démontré qu'elle admet la fonction de transfert

$$Z = \frac{\sum_{s=0}^{T-1} \alpha_{T+q-s-1} z^s}{z^T - 1} = \frac{\sum_{s=0}^{n-1} \gamma_s z^s}{z^n + \sum_{s=0}^{n-1} \beta_s z^s}$$

et la réalisation $\Sigma_2 = (F_{22}, G_2, H_2)$,
F_{22} étant la matrice donnée dans l'énoncé,

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} n \times 1, \qquad H_2 = [\alpha_q \dots \alpha_{n+q-1}], \text{ donc}$$

$$f_2(z^{lT+s}) = H_2 F_{22}{}^{lT+s} G_2 = \alpha_{q+s},\ s = 0, 1, \dots, T-1;\ l \geqslant 0.$$

Si F, G, H sont les matrices de (3),

$$H_1 = [\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{q-1}], \qquad O_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} q \times 1, \text{ on a}$$

$$F^q G = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} q+1 = \begin{bmatrix} O_2 \\ G_2 \end{bmatrix}, \qquad F^s = \begin{bmatrix} F_{11}^s & O_1 \\ ? & F_{22}^s \end{bmatrix}, \quad s \geqslant 1.$$

Alors :

$$f_\Sigma(1) = HG = \alpha_0$$

$$f_\Sigma(z^k) = HF^kG = \alpha_k \qquad 0 \leqslant k \leqslant q-1$$

$$f_\Sigma(z^q) = HF^qG = [H_1 H_2]\begin{bmatrix} 0_2 \\ G_2 \end{bmatrix} = [H_2 \;\; G_2] = \alpha_q$$

$$f_\Sigma(z^{lT+q+s}) = HF^{lT+q+s}G = HF^{lT+s}F^qG =$$

$$= [H_1 \; H_2]\begin{bmatrix} F_{11}^{lT+s} & 0_1 \\ ? & F_{22}^{lT+s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0_2 \\ G_2 \end{bmatrix} = H_{22}\, F_{22}{}^{lT+s}\, G_2 = \alpha_{q+s}$$

$$s = 0, 1, \dots, T-1; \; l \geqslant 0$$

$X_f = \Omega/(\pi(z))$ et degré $\pi(z) = q + n$, donc $\dim_K X_f = q + n$, donc une réalisation minimale aura la dimension $q+n$ (Kalman [4]).

Mais dim Σ = ordre $F = q + n$, donc Σ est une réalisation minimale de l'application f, q.e.d.

Conséquence. Détermination de l'application entrée-sortie f_Σ d'un système $\Sigma = (F, G, H)$, où G et H' sont des matrices $n \times 1$:

1. On détermine le polynôme minimal

$$\pi(z) = z^q\sigma(z) \text{ de la matrice } F.$$

2. Si $\sigma = 1$, ou pose $T = 0$;

Si degré $\sigma > 0$, on détermine l'exposant T de $\pi(z)$

$$T = \min \{ k : \pi(z) \mid z^k - 1 \}$$

3. On détermine $\alpha_s = HF^sG$, $s = 0, 1, \dots, T + q - 1$

4. On écrit $f_\Sigma\left(\sum_{s \geqslant 0} a_s z^s\right) = \sum_{s=0}^{q-1} a_s\alpha_s + \sum_{l \geqslant 0}\sum_{s=0}^{T-1} a_{lT+q+s}\alpha_{q+s}$.

3. Applications entrée-sortie $f : K^m[z] \to K$

Théorème 2

Soit $f : K^m[z] \to K$ une *application entrée-sortie linéaire.*

a) *Alors* $\exists q_i \geqslant 0$, $T_i \geqslant 0$, $\alpha_{si} \in K$, $s = 0, 1, \dots, q_i + T_i - 1$; $i = 1, \dots, m$ *telles que*

$$f(u) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{s=0}^{q_i-1} a_{si}\alpha_{si} + \sum_{l \geqslant 0}\sum_{s=0}^{T_i-1} a_{lT_i+q_i+s,i}\alpha_{q_i+s,i}\right) \qquad (6)$$

ou

$$u = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{s \geqslant 0} a_{si} z^s \right) e_i, \; a_{si} = 0 \qquad s > \nu_i.$$

b) *La fonction de transfert de l'application f est $Z = [Z_1 Z_2 \dots Z_m]$, où Z_i est la fraction irréductible définie par*

$$Z_i = \sum_{s=0}^{q_i - 1} \alpha_{si} \frac{1}{z^{s+1}} + \frac{\sum_{s=0}^{T_i - 1} \alpha_{T_i + q_i - s - 1, i} z^s}{z^{q_i}(z^{T_i} - 1)} = \sum_{s=0}^{q_i - 1} \alpha_{si} \frac{1}{z^{s+1}} + \frac{\sum_{s=0}^{n_i - 1} \gamma_{si} z^s}{z^{q_i}\left(z^{n_i} + \sum_{s=0}^{n_i - 1} \beta_{si} z^s \right)} \tag{7}$$

c) Une réalisation est $\Sigma = (F, G, H)$,

$$F = \begin{bmatrix} F_1 0 & \dots & 0 \\ 0 F_2 & \dots & 0 \\ . & . & . \\ 0 \; 0 & & F_m \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} G_1 0 & \dots & 0 \\ 0 G_2 & \dots & 0 \\ . & . & . \\ 00 & & G_m \end{bmatrix} \qquad H = [H_1 H_2 \dots H_m], \tag{8}$$

où (F_i, G_i, H_i) est la réalisation donnée dans (3) pour l'application $f_i : K[z] \to K$ définie par

$$f_i\left(\sum_{s \geqslant 0} a_{si} z^s \right) = \sum_{s \geqslant 0}^{q_i - 1} a_{si} \alpha_{si} + \sum_{l \geqslant 0} \sum_{s=0}^{T_i - 1} a_{l T_i + q_i + s, i} \alpha_{q_i + s, i} \tag{9}$$

Démonstration

Nous considérons les $K[z]$ — homomorphismes

$$g_i : K[z] \to \prod_{k=1}^{m} M_k^i \text{ où } M_k^i = \{ 0 \} \text{ si } k \neq i \text{ et } M_i^i = K[z],$$

définie par : $g_i(\tau(z)) = \tau(z).\ e_i \,\forall\, \tau(z) \in K[z]$.

Alors l'application $f_i = f \circ g_i : K[z] \to K$ est K-linéaire. En vertu du Th 1, $\exists q_i, T_i, \alpha_{si}, s = 0, 1, \dots, T_i + q_i - 1$, telles que $f_i(z^s) = \alpha_{si}$ et f a la forme (9).

La relation (6) est une conséquence de

$$f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{s \geqslant 0} a_{si} z^s \right) e_i = \sum_{i=1}^{m} f_i \left(\sum_{s \geqslant 0} a_{si} z^s \right) \right).$$

La fonction de transfert sera $Z = [Z_1 Z_2 \dots Z_m]$ où Z_i, la fonction de transfert de l'application $f_i = f \circ g_i$, donnée par (2), est celle de (7).

Soit (F_i, G_i, H_i), la réalisation donnée dans (3) pour l'application f_i, donc:

$$f(z^s e_i) = f \cdot g_i(z^s) = \alpha_{si} = H_i F_i^s G_i.$$

Mais

$$f_\Sigma(z^s e_i) = HF^s Ge_i = [H_1 H_2 \dots H_m] \begin{bmatrix} F_1^s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2^3 & & 0 \\ & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & F_m^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ G_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = H_i F_i^s G_i,$$

donc $f_\Sigma = f$ q.e.d.

$$\text{Soit } A_s = \begin{bmatrix} a_{s1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{sm} \end{bmatrix}, \text{ donc } u = \sum_{s \geqslant 0} A_s z^s, \text{ avec } A_s = 0 \ \forall\, s > \max \nu_i.$$

Corollaire

Soit $f : K^m[z] \to K$ une application K-linéaire.

Alors $\exists\, q \geqslant 0$, $T \geqslant 0$, M_s des matrices $1 \times m$, $s = 0, 1, \dots, T + q - 1$, *telles que*

$$f(u) = \sum_{s=0}^{q-1} M_s A_s + \sum_{l \geqslant 0} \sum_{s=0}^{T-1} M_{s+q} A_{lT+s+q}. \tag{10}$$

Le corollaire résulte de (6), en prenant

$$q = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} q_i, \ T = \text{p.p.c.m } (T_1, \dots, T_m),$$

$$M_s = [\alpha_{s1} \alpha_{s2} \dots \alpha_{sm}].$$

La réalisation du théorème 2 n'est pas généralement minimale (complètement contrôlable et complètement observable).

Nous pouvons obtenir :

Théorème 3

Si l'application f est donnée par (6) *une réalisation minimale* est

$\Sigma = (F, G, H)$,

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & \dots & -\beta_{n-1} \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} \alpha_{01}\alpha_{02} & \dots & \alpha_{0m} \\ \alpha_{11}\alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-1,1}\alpha_{n-1,2} & \dots & \alpha_{n-1,m} \\ \alpha_{n1} \quad \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}$$

$H = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \ 1 \times n,$

où $\pi(z) = z^n + \beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0$ *est le plus petit commun multiple des polynômes*

$$\pi_i(z) = z^{2i}\left(z^{ni} + \sum_{s=0}^{ni-1} \beta_{si}z^s\right)$$

Démonstration

Soit $\pi(z) = \pi_i(z)\tau_i(z)$.

Alors $Z_i = \dfrac{\theta_i(z)}{\pi_i(z)} = \dfrac{\theta_i(z)\tau_i(z)}{\pi(z)}$.

De la démonstration du théorème 1 il résulte que $F', H', (Ge_i)' = [\alpha_{0i}\alpha_{1i} \dots \alpha_{ni}]$ est une réalisation de l'application $f \circ g_i$, c'est-à-dire

$$f(z^s e_i) = f \circ g_i(z^s) = (Ge_i)'F'H' = HFGe_i$$

(la dernière égalité est une conséquence du fait que $f(z^s e_i)$ est un scalaire).

Le polynôme caractéristique de F est $\pi(z)$, qui est le plus petit dénominateur commun de Z_i, donc $\Sigma = (F, G, H)$ est une réalisation minimale de f, q.e.d.

4. Application entrée-sortie $f : K[z] \to K^p$

Considérons les projections

$$h_j = pr_j : K^p - K$$

$$h_j : \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \cdot \\ \vdots \\ \gamma_p \end{bmatrix} \to \gamma_j$$

Alors $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_p \end{bmatrix}$, où $f_j = h_j \circ f : \to K$, donc

$$f_j\left(\sum_{s \geq 0} a_s z^s\right) = \sum_{s=0}^{q_j-1} a_s \alpha_{js} + \sum_{l \geq 0} \sum_{s=0}^{T_j-1} a_{lT_j+q_j+s}\alpha_{j,q_j+s}.$$

On peut formuler aisément un théorème analogue au théorème 2. Nous nous bornons à donner une réalisation minimale pour l'application f :

$$F = \begin{bmatrix} 00 \ldots 0 - \beta_0 \\ 10 \ldots 0 - \beta_1 \\ 01 \ldots 0 - \beta_2 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 00 \ldots 1 - \beta_{n-1} \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} \alpha_{01} & \ldots & \alpha_{0n} \\ \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ & \cdot \cdot \cdot \cdot & \\ \alpha_{p1} & \ldots & \alpha_{pn} \end{bmatrix}$$

où $\operatorname{Ker} f_j = (\pi_j(z))$ et $\pi(z) = z^n + \beta_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \beta_1 z + \beta_0$ est le plus petit commun multiple de $\pi_1(z), \ldots, \pi_p(z)$.

5. Le cas général

Théorème

Soit $f : K^m[z] \to K^p$ une application entrée-sortie linéaire.

1) Alors $\exists q_{ij} \geqslant 0,\ T_{ij} \geqslant 0,\ \alpha_{sij} \in K,\ s = 0, 1, \ldots, q_{ij} + T_{ij} - 1;$

$$i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, p$$

telles que

$$f(u) = \begin{bmatrix} h_1 \circ f(u) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ h_p \circ f(u) \end{bmatrix}, \quad h_j \circ f(u) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{s=0}^{q_{ij}-1} a_{si} \alpha_{sij} + \sum_{l \geqslant 0} \sum_{s=0}^{T_{ij}-1} a_{lT_{ij}+q_{ij}+s,i} \alpha_{q_{ij}+s,i,j} \right) \tag{11}$$

où $u = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{s \geqslant 0} a_s z^s \right) e_i \in K^m[z]$.

ii) *La fonction de transfert de l'application f est*

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & \ldots & Z_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ Z_{p1} & \ldots & Z_{pm} \end{bmatrix}$$ *où Z_{ji} est la fonction de transfert donnée par* (2) *pour l'application $h_j \circ f \circ g_i$.*

c) Une réalisation est $\Sigma = (F, G, H)$,

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & F_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & F_p \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \cdot \\ G_p \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & H_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & H_p \end{bmatrix}$$

où $\Sigma_j = (F_j, G_j, H_j)$ *est une réalisation de l'application* $h_j \circ f : K^m[z] \to K$ (donnée par théorème 2 ou théorème 3).

Démonstration. On peut appliquer le théorème 2 à l'application

$$h_j \circ f : K^m[z] \to K$$

pour obtenir (11).

La fonction de transfert est $Z = [(\bar{f}e_1) \dots \bar{f}(e_m)]$.

Mais

$$\bar{f}(e_i) = \sum_{s \geq 0} f(z^s e_i) \frac{1}{z^{s+1}} = \begin{bmatrix} \sum_{s \geq 0} h_1 \circ f \circ g_i(z^s) \frac{1}{z^{s+1}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{s \geq 0} h_p \circ f \circ g_i(z^s) \frac{1}{z^{s+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{1i} \\ \dots \\ Z_{1p} \end{bmatrix}$$

donc $Z = [Z_{ji}]$

$1 \leq i \leq m.$

$1 \leq j \leq p$

Enfin, $f = f_\Sigma$ parce que

$$f(z^s e_i) = HF^s G e_i = \begin{bmatrix} H_1 F_1^s G_1 e_i \\ \dots\dots\dots \\ H_p F_p^s G_p e_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \circ f(z^s e_i) \\ \dots\dots\dots \\ h_p \circ f(z^s e_i) \end{bmatrix} = f(z^s e_i)$$

$\forall s \geq 0$ q.e.d.

Corollaire

Soit $f : K^m[z] \to K^p$ *une application entrée-sortie.*

Alors $\exists\, q \geq 0$, $T \geq 0$, M_s *des matrices* $p \times m$, $s = 0, 1, \dots, T + q - 1$ *telles que*

$$f(u) = \sum_{s=0}^{q-1} M_s A_s + \sum_{l \geq 0} \sum_{s=0}^{T-1} M_{q+s} A_{lT+q+s} \tag{12}$$

pour $u = \sum_{s \geq 0} A_s z^s \in K^m[z]$.

Démonstration

Cf. cor. théorème 2

$$h_j \circ f(u) = \sum_{s=0}^{q_j-1} M_{sj} A_s + \sum_{l \geq 0} \sum_{s=0}^{T_j-1} M_{q_j+s,j} A_{lT_j+q_j+s}.$$

Soit $q = \max q_j$ $T = \text{p.p.c.m.}\ (T_1, \dots, T_p)$.

Notons

$$M_s = \begin{bmatrix} M_{s1} \\ \cdots \\ M_{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{s11} \dots \alpha_{sm1} \\ \\ \alpha_{s1p} \dots \alpha_{smp} \end{bmatrix} \text{ où } \alpha_{sij} = h_j \circ f \circ g_i(z^s).$$

On obtient immédiatement (12).

REMARQUE. L'algorithme pour la détermination de l'application f_Σ d'un système $\Sigma = (F, G, H)$ indiqué après le théorème 1 est valable et dans le cas général.

6. Algorithme pour la construction d'une réalisation minimale

Une réalisation minimale est donnée par l'algorithme suivant (où nous utilisons une méthode duale à celle de [2]).

1. On détermine $\pi_{ij}(z) = z^{q_{ij}}\sigma_{ij}$ telles que
Ker $h_j \circ f \circ g_i = (\pi_{ij}(z))$ et ensuite l'exposant
T_{ij} de π_{ij}, $q = \max\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} q_{ij}$, $T =$ p.p.c.m (T_{ij})

2. On calcule $M_s = [h_j \circ f \circ g_i(z^s)]_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant i \leqslant m}} = [\alpha_{sij}]$, $s = 0, 1, \dots, T + q - 1$.

3. On considère la réalisation de l'application f

$$F = \begin{bmatrix} 0_p I_p 0_p \dots 0_p & 0_p \\ 0_p 0_p I_p \dots 0_p & 0_p \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ 0_p 0_p 0_p \dots 0_p \dots & I_p \\ 0_p \qquad \underset{q+1}{I_p} \dots & 0_p \end{bmatrix} \text{ matrice bloc d'ordre } q + T,\ G = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{T+q-1} \end{bmatrix}$$

$$H = [I_p O_p \dots O_p] \text{ matrice bloc } 1 \times (q + T).$$

Le système $\Sigma = (F, G, H)$ est complètement observable.

4. On écrit la matrice

$$M = [G\ FG \dots F^{T+q+1}G]$$

Soit $n =$ rang M.

5. Avec n colonnes linéairement indépendantes de la matrice M on écrit la matrice T.

6. Avec n lignes linéairement indépendantes $i_1, \dots, i_n$ de la matrice T on forme la matrice R.

7. On calcule la matrice R^{-1}.

8. On écrit la matrice S ayant les colonnes i_j égale à la colonnes j de la matrice R^{-1} et les autres colonnes nulles.

La matrice S sera l'inverse à gauche de la matrice T : $ST = I_m$.

9. On détermine la réalisation minimale

$$\tilde{F} = SFT, \quad \tilde{G} = SG, \quad \tilde{H} = HT.$$

Démonstration

Évidemment, $HF^s = [0_p \dots 0_p \underset{s+1}{I_p} 0_p \dots 0_p] \quad s = 0, 1, \dots, T + q - 1$

et $F^{q+T} = F^q$.

Alors $HF^sG = M_s \qquad s = 0, 1, \dots, q - 1$

$$HF^{lT+q+s}G = HF^{q+s}G = M_{q+s}, \; l \geqslant 0, s = 0, 1, \dots, T - 1.$$

Il en résulte :

$$f_\Sigma(z^s e_i) = HF^sGe_i = M_s e_i = f(z^s e_i) \; s = 0, 1, \dots q - 1; i = 1, 2, \dots, m.$$

$$f_\Sigma(z^{lT+q+s}e_i) = HF^{lT+q+s}Ge_i = M_{q+s}e_i = f(z^{lT+q+s}e_i)$$

$$l \geqslant 0 \; ; s = 0, 1, \dots, T - 1; i = 1, 2, \dots m.$$

Donc $f = f_\Sigma$ et $\Sigma = (F, G, H)$ est une réalisation de f.

Soit $x \in K^{T+q}$ arbitraire et vecteur $\bar{x}$ défini par $\bar{x}' = x'(I - TS)$. I matrice unité d'ordre $q + T$.

Alors $\bar{x}'T = x'(T - TST) = x'(T - T) = 0$, donc $\bar{x}'M = 0$ parce que les colonnes de la matrice M sont linéairement dépendantes de celles de la matrice T.

En particulier $\bar{x}'G = 0$, $x'F^sG = 0 \quad s = 0, 1, \dots T + q - 1$ et avec $F^{T+q} = F^q$ il en résulte $\bar{x}'F^sG = 0 \qquad \forall \, s \geqslant 0$.

Le vecteur x étant arbitraire, de $\bar{x}'G = 0$ il s'ensuit que $x' \, (I - TS)G = 0$ donc $G = TSG$ (13).

D'une manière analogue

$$\bar{x}'F^sG = 0 \text{ implique } F^sG = TSF^sG, \forall \, s \geqslant 0 \tag{14}$$

Par (13) on a $HG = HTSG = \tilde{H}\tilde{G}$ et par (14)

$$HFG = HTSFG = HTSFTSG = \tilde{H}\tilde{F}\tilde{G}$$

Démontrons par induction la relation

$$\tilde{F}^s\tilde{G} = SF^sG \tag{15}$$

Pour $s = 1 \quad \tilde{F}\tilde{G} = SFTSG = SFG$ [par (13)].

Soit (15) vraie pour $s - 1$.

Alors par (14)

$$\tilde{F}^s\tilde{G} = \tilde{F}\tilde{F}^{s-1}\tilde{G} = \tilde{F}SF^{s-1}G = SF(TSF^{s-1}G) = SF \cdot F^{s-1}G = SF^sG$$

Il en résulte que

$$\tilde{H}\tilde{F}^s\tilde{G} = (HT)SF^sG = H(TSF^sG) = HF^sG \qquad \forall\, s \geqslant 0$$

Donc $\tilde{\Sigma}$ est une réalisation de l'application f, parce que

$$f_{\tilde{\Sigma}} = f_\Sigma = f.$$

Considérons les matrices

$$\tau = [\tilde{G}, \tilde{F}\tilde{G} \dots \tilde{F}^{T+q-1}\tilde{G}]$$
$$O = [\tilde{H}', \tilde{F}'\tilde{H}' \dots \tilde{F}'^{T+q-1}\tilde{H}'].$$

Évidemment, rang $\tau \leqslant n$ et rang $O \leqslant n$.

Mais

$$O'\tau = \begin{bmatrix} \tilde{H}\tilde{G} & \tilde{H}\tilde{F}\tilde{G} & \dots & \tilde{H}\tilde{F}^{T+q-1} & \tilde{G} \\ \tilde{H}\tilde{F}\tilde{G} & \tilde{H}\tilde{F}^2\tilde{G} & \dots & \tilde{H}\tilde{F}^{T+q} & \tilde{G} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \tilde{H}\tilde{F}^{T+q-1}\tilde{G} & \tilde{H}\tilde{F}^{T+0}\tilde{G} & \dots & \tilde{H}\tilde{F}^{2(T+q-1)}\tilde{G} & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} M_0 & M_1 \dots M_{T+q-1} \\ M_1 & M_2 \dots M_0 \\ \cdot & \cdot \qquad \cdot \\ M_{T+q-1} & M_0 \dots M_{T+q-2} \end{bmatrix} = M$$

Alors n = rang M = rang $O'\tau \leqslant$ min (rang τ, rang O) et rang τ = rang $O = n$; le système $\tilde{\Sigma}$ est complètement contrôlable et complètement observable, donc minimal.

Observation

L'algorithme peut être utilisé pour la détermination d'une réalisation minimale même si K est un corps commutatif quelconque. Dans ce cas, les instructions 1, 2, 3 sont remplacées par 1′, 2′.

1′ On détermine r tel que

$$M_{r+s} = \sum_{i=0}^{r-1} \beta_i M_{s+i} \qquad s = 0, 1, \dots$$

2. On considère la réalisation : (voir [5])

$$F = \begin{bmatrix} 0_p & 1_p & 0_p & \dots & 0_p \\ 0_p & 0_p & 1_p & \dots & 0_p \\ 0_p & 0_p & 0_p & \dots & 1_p \\ \beta_0 1_p & \beta_1 1_p & \beta_2 1_p & \dots & B_{r-1} 1_p \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{r-1} \end{bmatrix} \quad H = \underbrace{[1_p 0_p \dots 0_p]}_{r}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Gh. Galbura, *Corpuri de functii algebrice si varietati algebrice.*

[2] Arthur Gill, *Linear Sequential Circuits*, Mc Graw-Hill, 1966.

[3] R. E. Kalman, *Algebraic Aspects of the Theory of Dynamical Systems. Differential Equations and Dynamical Systems*, 1967.

[4] R. E. Kalman, *Lectures on controllability and observability.* C.I.M.E., 1968.

[5] R. E. Kalman, P. L. Falb et M. A. Arbib. *Topics in Mathematical System Theory*, Mc. Graw. Hill., 1969.

[6] Serge Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1965.