

MAURICE GAULTIER

**Brève communication. Une équation du second ordre**

*Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique*, tome 7, n<sup>o</sup> 1 (1973), p. 76-83.

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1973\\_\\_7\\_1\\_76\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_1_76_0)

© AFCET, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UNE EQUATION DU SECOND ORDRE

par Maurice GAULTIER (1)

Résumé. — Nous résolvons, dans un certain sens, l'équation du second ordre

$$\frac{d^2u}{dt^2} \in Au + Mu + f$$

sous les conditions  $u(0) = u_0 \in D(A)$  et  $u'(T) = 0$  ( $T$  fini  $> 0$ )\*\* où  $A$  est un opérateur (multivoque) maximal monotone dans un espace de Hilbert  $H$  et  $M$  un opérateur univoque.

### NOTATIONS ET DONNEES

Soient  $H$  un espace de Hilbert réel et  $T$  un nombre  $> 0$  fini. Le produit scalaire et la norme dans  $H$  sont respectivement désignés par  $(, )$  et  $|| \cdot ||$ .

On note :

•  $L^2(0, T; H)$  l'espace des classes de fonctions  $t \mapsto f(t)$  de  $]0, T[$  dans  $H$ , mesurables et telles que :  $\int_0^T |f(t)|^2 dt < +\infty$ .  $L^2(0, T; H)$  est un espace de

Hilbert pour le produit scalaire  $((f, g)) = \int_0^T (f(t), g(t)) dt$ . La norme asso-

ciée est  $||f|| = \left( \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$

$$\cdot ]-[^{2,2}(0, T; H) = \{ u \mid u \in L^2(0, T; H) \text{ et } \frac{d^2u}{dt^2} \in L^2(0, T; H) \}$$

On se donne :

1) Un sous-ensemble  $A$  de  $H \times H$ , maximal monotone. On désigne encore par  $A$  la multiplication associée. Adoptant les notations de [2], pour chaque

---

(1) U.E.R. de Mathématiques et Informatique, Talence.

$n \in \mathbf{N}^*$  nous désignons par  $A_n$  et  $J_n$  respectivement l'approximation de Yosida et le résolvant de  $A$ .

- 2) Un opérateur (univoque)  $M$ , non linéaire de  $L^2(0, T; H)$  dans  $L^2(0, T; H)$ .  
 3) Un opérateur noté  $D_2$  défini de la façon suivante :

$$\mathfrak{D}(D_2) = \{ u \mid u \in \mathcal{C}^{2,2}(0, T; H); u(0) = 0, u'(T) = 0 \}$$

$$D_2 u = \frac{d^2 u}{dt^2} \text{ quelque soit } u \in \mathfrak{D}(D_2)$$

- 4) Une contraction  $R$  de  $H$  et pour chaque  $n \in \mathbf{N}^*$  nous posons

$$\Phi_n = n(I - R)$$

Alors  $\Phi_n$  est monotone et de Lipschitz.

### RESULTATS PRELIMINAIRES

**Proposition 1.**  $\mathfrak{D}(D_2)$  est dense dans  $L^2(0, T; H)$  et pour chaque  $\lambda > 0$   
 l'opérateur  $(\lambda - D_2)^{-1}$  est partout défini dans  $L^2(0, T; H)$  et de norme  
 moindre que  $\frac{1}{\lambda + T^{-2}}$

*Démonstration.*

- 1) La densité est évidente.  
 2) Pour chaque  $u \in \mathfrak{D}(D_2)$  on vérifie facilement que

$$((D_2 u, u)) = -\frac{1}{T^2} \|u\|^2$$

- 3) Le problème

$$\lambda u - \frac{d^2 u}{dt^2} = f \text{ pour } f \text{ donné dans } L^2(0, T; H)$$

$$u(0) = 0$$

$$u'(T) = 0$$

a pour chaque  $\lambda \in \mathbf{C}$  tel que  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  UNE et UNE SEULE solution que nous écrivons :  $u = (\lambda - D_2)^{-1} f$ .

- 4) Soit  $\lambda > 0$  alors :

$$(\lambda - D_2)^{-1} f = u \Leftrightarrow u \in \mathfrak{D}(D_2) \text{ et } f = \lambda u - D_2 u$$

De ceci on déduit aussitôt que :  $\|(\lambda + T^{-2})^{-1}\| \leq \|f\|$  et ensuite que : quel que soit  $\lambda > 0$  :  $\|(\lambda - D_2)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda + T^{-2}}$

REMARQUE. Les résultats précédents prouvent que  $D_2$  est le générateur infinitésimal d'un demi groupe linéaire sur  $L^2(0, T; H)$  de domaine  $\mathcal{D}(D_2)$ .

**Proposition 2.** Pour  $u_0$  et  $u_1$  donnés dans  $H$ ,  $f$  donné dans  $L^2(0, T; H)$  et pour  $\mu T^2 < 1$  il existe UNE et UNE SEULE fonction  $u$  telle que

$$(1) \quad \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = \Phi_n(u(t)) + Mu(t) + f(t) \text{ p. p. } t \in ]0, T[$$

$$u(0) = u_0 \text{ et } u'(T) = u_1$$

De plus l'application :  $t \rightarrow \Phi_n(u(t))$  est de Lipschitz sur  $[0, T]$ .

#### Démonstration

Nous allons nous ramener aux conditions  $v(0) = 0$  et  $v'(T) = 0$  en posant  $v(t) = u(t) - u_0 - u_1 t = u(t) - \alpha(t)$ .

Le problème à résoudre est alors le suivant : trouver  $v \in \mathcal{D}(D_2)$  et tel que pour presque tout  $t \in ]0, T[$  :

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} = n(1 - R)(v(t) + \alpha(t)) + M(v(t) + \alpha(t)) + f(t)$$

Soit encore :  $v \in \mathcal{D}(D_2)$  et pour presque tout  $t \in ]0, T[$  :

$$(n - D_2)v(t) = nR(v(t) + \alpha(t)) - n\alpha(t) - M(v(t) + \alpha(t)) - f(t)$$

L'application suivante de  $L^2(0, T; H)$  dans  $\mathcal{D}(D_2)$  :

$$S : v \mapsto Sv = n(n - D_2)^{-1}R(v + \alpha) - n(n - D_2)^{-1}\alpha$$

$$- (n - D_2)^{-1}[M(v + \alpha) + f]$$

admet un point fixe UNIQUE; en effet : quels que soient les éléments  $v$  et  $w$  de  $L^2(0, T; H)$  nous vérifions que :

$$\|Sv - Sw\| \leq \frac{n + \mu}{n + T^{-2}} \|v - w\|$$

et grâce à l'hypothèse  $\mu T^2 < 1$ ; l'application  $S$  est une contraction STRICTE.

REMARQUE. Si  $\mu = 0$  ( $M$  opérateur nul) alors l'équation (1) admet une solution et une seule répondant aux conditions  $u(0) = u_0$  et  $u'(T) = u_1$  comme on le vérifie aisément (utiliser la monotonie de  $\Phi_n$ ).

**RESULTAT ESSENTIEL**

**Théorème.** Sous la condition  $\mu T^2 < 1$ , pour chaque  $f$  donné dans  $L^2(0, T; H)$  et pour chaque  $u_0$  donné dans  $D(A)$ ; il existe AU MOINS une fonction  $u \in L^\infty(0, T; H) \cap ]-]^{2,2}(0, T; H)$  et telle que

$$(2) \quad \begin{aligned} &u(t) \in D(A) \text{ p. p. sur } ]0, T[ \\ &\frac{d^2u(t)}{dt} \in Au(t) + Mu(t) + f(t) \text{ p. p. } t \in ]0, T[ \\ &u(0) = u_0 \text{ et } u'(T) = 0 \end{aligned}$$

*Démonstration*

La méthode que nous utilisons a déjà été employée dans [3]. Nous considérons l'approximation de Yosida  $A_n$  de  $A(n \in \mathbb{N}^*)$  et nous résolvons, grâce à la proposition 2, l'équation :

$$(3) \quad \frac{d^2u_n(t)}{dt} = A_n u_n(t) + M u_n(t) + f(t) \text{ p. p. } t \in ]0, T[$$

avec  $u_n(0) = u_0$  et  $u'_n(T) = 0$

**1) Estimations a priori**

Nous allons montrer que la suite  $\{u_n\}$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; H)$  et que la suite  $\left\{ \frac{d^2u_n}{dt^2} \right\}$  est bornée dans  $L^2(0, T; H)$ . En effet de (3) nous déduisons

$$(4) \quad \int_0^T \left| \frac{d^2u_n(t)}{dt^2} \right|^2 dt \leq \int_0^T |A^0 u| \left| \frac{d^2u_n(t)}{dt^2} \right| dt + \int_0^T |M u_n(t)| \cdot \left| \frac{d^2u_n(t)}{dt^2} \right| dt + \int_0^T |f(t)| \cdot \left| \frac{d^2u_n}{dt^2} \right| dt$$

D'autre part

$$(5) \quad |u_n(t)| \leq |u_0| + \int_0^t \left| \frac{du_n(\sigma)}{d\sigma} \right| d\sigma$$

et puisque :  $\frac{du_n(t)}{dt} = - \int_t^T \frac{d^2u_n(\sigma)}{d\sigma^2} d\sigma$ ; nous déduisons :

$$(6) \quad \left| \frac{du_n(t)}{dt} \right| \leq \sqrt{T-t} \left( \int_0^T \left| \frac{d^2u_n(t)}{dt^2} \right|^2 dt \right)^{1/2}$$

Grâce à (5) :

$$(7) \quad |u_n(t)| \leq |u_0| + \frac{2}{3}[T^{3/2} - (T-t)^{3/2}]^2 \left\| \frac{d^2 u_n}{dt^2} \right\|$$

De (7) résulte aussitôt

$$(8) \quad \int_0^T |u_n(t)|^2 dt \leq 2T |u_0|^2 + \frac{2}{5} T^4 \left\| \frac{d^2 u_n}{dt^2} \right\|^2$$

De (4) et (8) nous déduisons :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} \right|^2 dt &\leq \int_0^T |A^0 u_0| \left| \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} \right| dt + \int_0^T |f(t)| \left| \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} \right| dt \\ &\quad + \mu \left( 2T |u_0|^2 + \frac{2}{5} T^4 \left\| \frac{d^2 u_n}{dt^2} \right\|^2 \right)^{1/2} \left\| \frac{d^2 u_n}{dt^2} \right\| \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} \right|^2 dt &\leq \int_0^T |A^0 u_0| \left| \frac{d^2 u_n}{dt^2} \right| dt + \int_0^T |f(t)| \cdot \left| \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} \right| dt \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \mu^2 T^4 \right) \int_0^T \left| \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} \right|^2 dt + \mu^2 T |u_0|^2 \end{aligned}$$

Grâce à la condition  $\mu T^2 < 1$  :  $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \mu^2 T^4 < \frac{7}{10}$  et donc :

$$(9) \quad \frac{3}{10} \int_0^T \left| \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} \right|^2 dt \leq \mu^2 T |u_0|^2 + \int_0^T |A^0 u_0| \left| \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} \right| dt + \int_0^T |M^0| \left| \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} \right| dt + \int_0^T |f(t)| \cdot \left| \frac{d^2 u_n(t)}{dt^2} \right| dt$$

L'inégalité (9) nous montre que la suite  $\left\{ \frac{d^2 u_n}{dt^2} \right\}$  est bornée dans  $L^2(0, T; H)$

et grâce à (7) que la suite  $\{u_n\}$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; H)$ . Compte tenu des propriétés de l'opérateur  $M$  la suite  $\{Mu_n\}$  est bornée dans  $L^2(0, T; H)$ ; et résulte ALORS de (3) que la suite  $\{A_n u_n\}$  est bornée dans  $L^2(0, T; H)$ .

## 2) La suite $\{u_n\}$ est de Cauchy dans $L^2(0, T; H)$

Nous avons en effet

$$(10) \quad |u_n(t) - u_m(t)|^2 \leq t \int_0^t |u'_n(\sigma) - u'_m(\sigma)|^2 d\sigma$$

Mais d'autre part, pour presque tout  $t \in ]0, T[$

$$\frac{d^2}{dt^2} (u_n(t) - u_m(t)) = (A_n u_n(t) - A_m u_m(t)) + \mu(u_n(t) - u_m(t))$$

Nous déduisons alors

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} |u_n(t) - u_m(t)|^2 &= 2 \left| \frac{d}{dt} (u_n(t) - u_m(t)) \right|^2 + 2(\mu(u_n(t) - u_m(t)), u_n(t) - u_m(t)) \\ (11) \qquad \qquad \qquad &+ 2(A_n u_n(t) - A_m u_m(t), u_n(t) - u_m(t)) \end{aligned}$$

et par un calcul analogue à celui fait dans [2] page 389 :

$$(A_n u_n(t) - A_m u_m(t), u_n(t) - u_m(t)) \geq (A_n u_m(t) - A_m u_n(t), \frac{1}{n} A_n u_n(t) - \frac{1}{m} A_m u_m(t))$$

Compte tenu de ceci (11) nous donne

$$\begin{aligned} \int_0^t \left| \frac{d}{d\sigma} (u_n(\sigma) - u_m(\sigma)) \right|^2 d\sigma &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{d}{d\sigma} |u_n(\sigma) - u_m(\sigma)|^2 \right) d\sigma \\ (12) \qquad \qquad \qquad &+ K \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) + \int_0^t |M u_n(\sigma) - M u_m(\sigma)| \cdot |u_n(\sigma) - u_m(\sigma)| d\sigma \end{aligned}$$

$K$  est une constante indépendante de  $n$  et de  $m$ .

Comme d'autre part on a (10), nous déduisons de (12)

$$\begin{aligned} |u_n(t) - u_m(t)|^2 &\leq t(u'_n(t) - u'_m(t), u_n(t) - u_m(t)) + Kt \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) \\ (13) \qquad \qquad \qquad &+ \mu t \int_0^T |u_n(\sigma) - u_m(\sigma)|^2 d\sigma \end{aligned}$$

(12) et (13) nous donnent alors :

$$\begin{aligned} \int_0^T |u_n(t) - u_m(t)|^2 dt &\leq \frac{T}{2} |u_n(T) - u_m(T)|^2 - \frac{1}{2} \int_0^T |u_n(t) - u_m(t)|^2 dt \\ (14) \qquad \qquad \qquad &+ \frac{KT^2}{2} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) + \mu \frac{T^2}{2} \int_0^T |u_n(t) - u_m(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Utilisons (13) pour  $t = T$  et compte tenu de l'hypothèse

$$u'_n(T) = u'_m(T) = 0$$

il vient :

$$(15) \quad |u_n(T) - u_m(T)|^2 \leqslant KT \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) + \mu T \int_0^T |u_n(t) - u_m(t)|^2 dt$$

Enfin en portant dans (14)

$$\left( \frac{3}{2} - \mu T^2 \right) \int_0^T |u_n(t) - u_m(t)|^2 dt \leqslant KT^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)$$

### 3) Passage à la limite

Compte tenu des estimations a priori précédentes et des propriétés de l'opérateur  $M$  nous pouvons supposer que si  $n \rightarrow \infty$

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T; H) \text{ faible}^*$$

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ fort}$$

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \text{ dans } H \text{ fort p.p. } t \in ]0, T[$$

$$Mu_n(t) \rightarrow Mu(t) \text{ dans } H \text{ faible p.p. } t \in ]0, T[$$

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2 u}{dt^2} \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ faible}$$

$$A_n u_n \rightarrow \chi \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ faible}$$

Nous posons ensuite, comme dans [3].

$$\mathcal{A} = \{ [u, v] \in L^2(0, T; H) \times L^2(0, T; H), u(t) \in D(A)$$

$$\text{et } v(t) \in Au(t) \text{ p. p. } t \in ]0, T[$$

$$\mathcal{F}_n = (1 + n^{-1}\mathcal{A})^{-1} \text{ et } \mathcal{A}_n = n(1 - \mathcal{F}_n) \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\mathcal{A}$  est maximal monotone dans  $L^2(0, T; H) \times L^2(0, T; H)$  et par une technique en tout point analogue à celle de [3] nous montrons que :

$$u(t) \in D(A) \text{ et } \chi(t) \in Au(t) \text{ p.p. } t \in ]0, T[ \text{ et } :$$

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} \in Au(t) + Mu(t) + f(t) \text{ p. p. } t \in ]0, T[$$

$$u(0) = u_0 ; u'(T) = 0$$

**Corollaire.** Lorsque  $\mu = 0$  ( $M$  opérateur nul); l'équation (2) a une solution UNIQUE répondant aux conditions  $u(0) = u_0$  et  $u'(T) = 0$ .

L'existence découle du théorème précédent (puisque la condition  $\mu T^2 < 1$  est alors vérifiée), l'unicité se démontre immédiatement grâce à la monotonie de  $A$ .



EXEMPLE. Soient  $K$  un convexe fermé de  $H$ ;  $\Psi_K$  sa fonction indicatrice et  $\partial\Psi_K$  le sous-différentiel de  $\Psi_K$ ; on sait (voir par exemple [4] que  $\partial\Psi_K$  est maximal monotone. Nous supposons que quelque soit  $\lambda > 0$ ;  $(1 + \lambda A)^{-1}K \subset K$  alors  $A + \partial\Psi_K$  est aussi maximal monotone [1]. Appliquons le théorème : pour chaque  $f \in L^2(0, T; H)$  il existe  $u$  et  $w$  tels que pour presque tout  $t \in ]0, T[$  :

$$u(t) \in D(A) \cap K; w(t) \in Au(t) \text{ et}$$

$$(u''(t) - w(t) - Mu(t), v - u(t)) \leq (f(t), v - u(t)) \quad \forall v \in K$$

avec  $u(0) = u_0$  élément donné de  $D(A) \cap K$  et  $u'(T) = 0$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. E. BROWDER, *Nonlinear maximal monotone operators in Banach spaces*, Math. Annalen, (1958), 175, 89-113.
- [2] M. CRANDALL et A. PAZY, *Semi groups of nonlinear contractions and dissipative sets*, Journal of functional analysis (1969), 3, 376-418.
- [3] M. GAULTIER, *Résolution d'une équation non linéaire*, C.R.A.S., janvier 1972, tome 274, p. 332-334.
- [4] J. J. MOREAU, *Fonctionnelles convexes*. Cours du collège de France (1966-1967).
- \*\* M. Viorel BARBU a résolu (voir C.R.A.S. tome 274, p. 459-462, février 1972) l'équation  $\frac{d^2u}{dt^2} \in A u$  avec les conditions  $u(0) = a$ ,  $u(T) = b$  où  $A$  est un opérateur maximal monotone dans l'espace de Hilbert  $H$ .