

ANTOINE KOUNADIS

**Brève communication. Inversion de matrices
tridiagonales symétriques**

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique, tome 7, n^o 1 (1973), p. 91-100.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_1_91_0

© AFCET, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INVERSION DE MATRICES TRIDIAGONALES SYMETRIQUES

par Antoine KOUNADIS ⁽¹⁾

Résumé. — Le présent article expose une méthode exacte, assez élégante, pour le calcul rapide de l'inverse de matrices tridiagonales symétriques, partitionnées en « blocs ». Il est à remarquer que ces dernières matrices ont une inverse « factorisable » ⁽²⁾ dont les éléments sont des « blocs ».

Ce procédé est aussi valable pour le cas particulier des matrices tridiagonales symétriques à éléments scalaires.

Dans tout ce qui suit, on supposera que la matrice R , dont on calculera l'inverse, aussi bien que les matrices K_i , sont régulières. De pareilles suppositions seront faites pour le cas particulier des matrices tridiagonales symétriques à éléments scalaires.

1. INVERSION DE MATRICES TRIDIAGONALES SYMETRIQUES PARTITIONNEES EN « BLOCS »

Si

$$R = \left[\begin{array}{ccccccc} A_1 & K_1 & & & & & \\ K'_1 & A_2 & K_2 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & K'_{i-1} & A_i & K_i & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & K'_{v-2} & A_{v-1} & K_{v-1} \\ & & & & & & K'_{v-1} & A_v \end{array} \right] \quad (1)$$

(1) Kallithéa, Athènes (Grèce).

(2) Pour la définition d'une matrice factorisable à éléments scalaires voir [2]. Il n'est pas difficile d'étendre cette définition au cas d'une matrice factorisable à éléments de « blocs ».

où

$A_i = A_i'(i = 1, 2, \dots, \nu)$, $K_i(i = 1, 2, \dots, \nu - 1)$ sont des matrices carrées du même ordre, la matrice inverse sera également symétrique à cause de la symétrie de R . Admettons que

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \Gamma_{\nu-1} & \Gamma_{\nu-2} & \Gamma_{\nu-3} & \dots & \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Theta \\ & \Pi_{1,\nu-2} & \Pi_{1,\nu-3} & \dots & \Pi_{12} & \Pi_{11} & \Sigma_1 \\ & & \Pi_{2,\nu-3} & \dots & \Pi_{22} & \Pi_{21} & \Sigma_2 \\ & & & \dots & & & \dots \\ & & & & \Pi_{\nu-3,2} & \Pi_{\nu-3,1} & \Sigma_{\nu-3} \\ \text{Symétr.} & & & & & \Pi_{\nu-2,1} & \Sigma_{\nu-2} \\ & & & & & & \Sigma_{\nu-1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

où les matrices de la diagonale principale sont évidemment symétriques.

Une réglemmentation se décrit de cet arrangement et numérotage des éléments de la matrice R^{-1} , concernant la détermination de ses $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ éléments inconnus (sous-matrices).

En effet, nous allons démontrer que, ayant déterminé la matrice fondamentale Θ , tous les éléments (sous-matrices) de R^{-1} sont calculés comme fonctions de celle-ci.

Premièrement on détermine les éléments $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{\nu-1}$ de la première ligne et $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{\nu-1}$ de la dernière colonne de R^{-1} par des formules de récurrence. Ensuite, les autres éléments (1) de R^{-1} sont calculés en fonction de $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{\nu-1}, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{\nu-1}$ et Θ .

En multipliant les matrices (1) et (2), on obtient :

$$R^{-1} \cdot R = I =:$$

$$= \begin{bmatrix} \Gamma_{\nu-1}A_1 + \Gamma_{\nu-2}K_1' & \Gamma_{\nu-1}K_1 + \Gamma_{\nu-2}A_2 + \Gamma_{\nu-3}K_2' & \Gamma_{\nu-2}K_2 + \Gamma_{\nu-3}A_3 + \Gamma_{\nu-4}K_3' & \dots \\ \Gamma_{\nu-2}'A_1 + \Pi_{1,\nu-2}K_1' & \Gamma_{\nu-2}'K_1 + \Pi_{1,\nu-2}A_2 + \Pi_{1,\nu-3}K_2' & \Pi_{1,\nu-2}K_2 + \Pi_{1,\nu-3}A_3 + \Pi_{1,\nu-4}K_3' \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Theta'A_1 + \Sigma_1'K_1' & \Theta'K_1 + \Sigma_1'A_2 + \Sigma_2'K_2' & \Sigma_1'K_2 + \Sigma_2'A_3 + \Sigma_3'K_3' & \dots \\ \Gamma_3K_{\nu-3} + \Gamma_2A_{\nu-2} + \Gamma_1K_{\nu-2}' & \Gamma_2K_{\nu-2} + \Gamma_1A_{\nu-1} + \Theta K_{\nu-1}' & \Gamma_1K_{\nu-1} + \Theta A_\nu & \\ \Pi_{13}K_{\nu-3} + \Pi_{12}A_{\nu-2} + \Pi_{11}K_{\nu-2}' & \Pi_{12}K_{\nu-2} + \Pi_{11}A_{\nu-1} + \Sigma_1K_{\nu-1}' & \Pi_{11}K_{\nu-1} + \Sigma_1A_\nu & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Sigma_{\nu-4}'K_{\nu-4} + \Sigma_{\nu-3}'A_{\nu-3} + \Sigma_{\nu-2}'K_{\nu-2}' & \Sigma_{\nu-3}'K_{\nu-3} + \Sigma_{\nu-2}'A_{\nu-1} + \Sigma_{\nu-1}'K_{\nu-1}' & \Sigma_{\nu-2}'K_{\nu-1} + \Sigma_{\nu-1}A_\nu & \end{bmatrix} \quad (3)$$

(1) La sous-matrice $\Pi_{k\lambda}$ a toujours les indices des éléments (projections) Σ_k et Γ_λ , respectivement.

L'équation ci-dessus entraîne $\frac{v(v+1)}{2}$ relations, c'est-à-dire celles qui sont nécessaires pour calculer les $\frac{v(v+1)}{2}$ matrices inconnues. Pour raisons de technique, on va déterminer les éléments Γ_i , Σ_i et $\Pi_{\kappa\lambda}$ en fonction de Θ , avant le calcul de ce dernier.

1.1. Calcul des matrices Γ_i

Étant donné que tous les éléments de la première ligne de la matrice (3) (sauf celui de la diagonale principale) sont égaux à zéro les éléments Γ_i ($i = 1, 2, \dots, v-1$), sont calculés ainsi :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &= -\Theta A_v K_{v-1}^{-1} \\ \Gamma_2 &= -(\Gamma_1 A_{v-1} + \Theta K'_{v-1}) K_{v-2}^{-1} \\ \Gamma_3 &= -(\Gamma_2 A_{v-2} + \Gamma_1 K'_{v-2}) K_{v-3}^{-1} \\ &\dots \\ \Gamma_{v-2} &= -(\Gamma_{v-3} A_3 + \Gamma_{v-4} K'_3) K_2^{-1} \\ \Gamma_{v-1} &= -(\Gamma_{v-2} A_2 + \Gamma_{v-3} K'_2) K_1^{-1} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{En général} \\ \Gamma_\rho = -(\Gamma_{\rho-1} A_{v-\rho+1} \\ \quad + \Gamma_{\rho-2} K'_{v-\rho+1}) K_{v-\rho}^{-1} \\ \text{pour} \quad (4) \\ \rho = 2, 3, \dots, v-1 \\ \text{et} \\ \Gamma_0 = \Theta, \quad \Gamma_1 = -\Theta A_v K_{v-1}^{-1} \end{array}$$

1.2. Calcul des matrices Σ_i

Les éléments Σ_i ($i = 1, 2, \dots, v-1$) de la dernière ligne de la matrice (3) sont calculés comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_1 &= -K_1^{-1} A_1 \Theta \\ \Sigma_2 &= -K_2^{-1} (A_2 \Sigma_1 + K'_1 \Theta) \\ \Sigma_3 &= -K_3^{-1} (A_3 \Sigma_2 + K'_2 \Sigma_1) \\ &\dots \\ \Sigma_{v-2} &= -K_{v-2}^{-1} (A_{v-2} \Sigma_{v-3} + K'_{v-3} \Sigma_{v-4}) \\ \Sigma_{v-1} &= -K_{v-1}^{-1} (A_{v-1} \Sigma_{v-2} + K'_{v-2} \Sigma_{v-3}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{En général} \\ \Sigma_\rho = -K_\rho^{-1} (A_\rho \Sigma_{\rho-1} \\ \quad + K'_{\rho-1} \Sigma_{\rho-2}) \\ \text{pour} \quad (5) \\ \rho = 2, 3, \dots, v-1 \\ \text{et} \\ \Sigma_0 = \Theta, \quad \Sigma_1 = -K_1^{-1} A_1 \Theta \end{array}$$

1.3. Calcul des matrices $\Pi_{\kappa\lambda}$

Nous allons démontrer que pour une matrice $\Pi_{\kappa\lambda}$, quelconque, où $k = i$ ($i = 1, 2, \dots, v-2$), $\lambda = 1, 2, \dots, v-i-1$ il existe la relation suivante :

$$\Pi_{\kappa\lambda} = \Sigma_\kappa \Theta^{-1} \Gamma_\lambda \tag{6}$$

En effet, pour $k = 1$ et $\lambda = 1, 2, \dots, \nu - 1$, en vertu de la seconde ligne de la matrice (3), on obtient :

$$\Pi_{11} = -\Sigma_1 A_\nu K_{\nu-1}^{-1}$$

Et étant donné que

$$\Gamma_1 = -\Theta A_\nu K_{\nu-1}^{-1}$$

évidemment il vient

$$\Pi_{11} = \Sigma_1 \Theta^{-1} \Gamma_1$$

De la même manière il résulte

$$\Pi_{12} = \Sigma_1 \Theta^{-1} \Gamma_2$$

$$\Pi_{13} = \Sigma_1 \Theta^{-1} \Gamma_3$$

.....

$$\Pi_{1,\nu-2} = \Sigma_1 \Theta^{-1} \Gamma_{\nu-2}$$

Et, en général, pour $k = \rho$ et $\lambda = 1, 2, \dots, \nu - \rho - 1$, en vertu de la $(\rho + 1)$ ligne de la matrice (3), on obtient :

$$\Pi_{\rho 1} = -\Sigma_\rho \Theta^{-1} \Gamma_1$$

$$\Pi_{\rho 2} = \Sigma_\rho \Theta^{-1} \Gamma_2$$

$$\Pi_{\rho 3} = \Sigma_\rho \Theta^{-1} \Gamma_3$$

.....

$$\Pi_{\rho,\nu-\rho-1} = \Sigma_\rho \Theta^{-1} \Gamma_{\nu-\rho-1}$$

$$\Pi_{\rho,\nu-\rho} = \Sigma_\rho \Theta^{-1} \Gamma_{\nu-\rho}$$

1.4. Calcul de la matrice fondamentale Θ

Le calcul de la matrice Θ est obtenu par la relation

$$\Gamma_{\nu-1} A_1 + \Gamma_{\nu-2} K'_1 = I \tag{7}$$

où encore de

$$K_{\nu-1}' \Sigma_{\nu-2} + A_\nu \Sigma_{\nu-1} = I \tag{8}$$

Cependant, au point de vue de pratique il est préférable d'effectuer la détermination de Θ de la manière suivante :

Nous considérons le déterminant « symbolique » (1)

$$\Omega_v = (-1)^{v-1} \left\{ \begin{array}{cccc} A_1 & I & & \\ K'_1 & A_2 K_1^{-1} & I & \\ & K'_2 K_1^{-1} & A_3 K_2^{-1} & I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & K'_{v-2} K_{v-3}^{-1} & A_{v-1} K_{v-2}^{-1} & I \\ & & & K'_{v-1} K_{v-2}^{-1} & A_v K_{v-1}^{-1} \end{array} \right\} \quad (9)$$

dont les éléments sont des matrices carrées du même ordre, qui sera développé, toujours sous la restriction que ce développement sera effectué de la dernière ligne (ou colonne) à la direction de la première ligne (ou colonne), comme il est précisé par la relation (12).

On va démontrer que le polynôme matriciel qui résulte de ce développement, est égal à Θ^{-1} , c'est-à-dire

$$\Omega_v = \Theta^{-1} \quad (10)$$

et par conséquent

$$\Theta = \Omega_v^{-1} \quad (11)$$

En effet, en développant le déterminant « symbolique » (9) par ses éléments de la dernière ligne (ou colonne), on obtient :

$$\Omega_v = -A_v K_{v-1}^{-1} \Omega_{v-1} - K'_{v-1} K_{v-2}^{-1} \Omega_{v-2} \quad (\text{pour } v = 1 : K_0^{-1} = 1, \Omega_0 = -1, \Omega_1 = A_1) \quad (12)$$

La relation (12) entraîne (10) si on prouve, auparavant, que

$$\Omega_i = -K_i \Sigma_i \Theta^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, v-1) \quad (13)$$

où Ω_i est un mineur principal « symbolique » d'ordre i , résultant de Ω_v en supprimant ses dernières $v-i$ lignes et $v-i$ colonnes sans changer l'arrangement du reste des éléments.

(1) La matrice correspondant au déterminant « symbolique » Ω_v est égale au produit des deux matrices suivantes :

$$\left(\begin{array}{cccc} A_1 & K_1 & & \\ K'_1 & A_2 & K_2 & \\ & K'_2 & A_3 & K_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & K'_{v-2} & A_{v-1} & K_{v-1} \\ & & & K'_{v-1} & A_v \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} I & & & \\ & K_1^{-1} & & \\ & & K_2^{-1} & \\ & & & \ddots \\ & & & & K_{v-2}^{-1} \\ & & & & & K_{v-1}^{-1} \end{array} \right)$$

(2) La formule (13) est valable même pour le cas trivial de $i = 0$, selon (12) et $\Sigma_0 = \Theta$.

En remplaçant les matrices Ω_{v-1} , Ω_{v-2} à (12), conformément à (13), on obtient :

$$\Omega_v = A_v K_{v-1}^{-1} K_{v-1} \Sigma_{v-1} \Theta^{-1} + K'_{v-1} K_{v-2}^{-1} K_{v-2} \Sigma_{v-2} \Theta^{-1}$$

ou

$$\Omega_v = (A_v \Sigma_{v-1} + K'_{v-1} \Sigma_{v-2}) \Theta^{-1}$$

et à cause de (8)

$$\Omega_v = \Theta^{-1}$$

La preuve de (13) sera effectuée par la méthode de l'*induction*. Pour $i = 2$ on aura

$$\Omega_2 = (-1)^{2-1} \begin{Bmatrix} A_1 & I \\ K'_1 & A_2 K_1^{-1} \end{Bmatrix} = -A_2 K_1^{-1} A_1 + K'_1$$

D'autre part, de la relation (5) on tire

$$\Sigma_2 = -K_2^{-1} (A_2 \Sigma_1 + K'_1 \Theta) = (K_2^{-1} A_2 K_1^{-1} A_1 - K_2^{-1} K'_1) \Theta$$

donc

$$-K_2 \Sigma_2 \Theta^{-1} = -A_2 K_1^{-1} A_1 + K'_1$$

c'est-à-dire $\Omega_2 = -K_2 \Sigma_2 \Theta^{-1}$

Ensuite, on accepte que (13) est vraie pour $i = 1, 2, \dots, v-2$ et on va démontrer que

$$\Omega_{v-1} = -K_{v-1} \Sigma_{v-1} \Theta^{-1}$$

Selon (12), on a

$$\Omega_{v-1} = -A_{v-1} K_{v-2}^{-1} \Omega_{v-2} - K'_{v-2} K_{v-3}^{-1} \Omega_{v-3}$$

En substituant dans cette dernière relation les expressions des Ω_{v-2} et Ω_{v-3} , selon (13), on obtient :

$$\Omega_{v-1} = A_{v-1} K_{v-2}^{-1} K_{v-2} \Sigma_{v-2} \Theta^{-1} + K'_{v-2} K_{v-3}^{-1} K_{v-3} \Sigma_{v-3} \Theta^{-1}$$

ou, à cause de (5)

$$\Omega_{v-1} = -K_{v-1} \Sigma_{v-1} \Theta^{-1}$$

D'autre part, en employant la méthode de l'*induction* on peut démontrer de la même manière que

$$\Omega_{v-i}^\sigma = -\Theta^{-1} \Gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, v-1) \quad (14)$$

où Ω_{v-i}^σ : est le déterminant « symbolique » d'ordre i , constituant le complément algébrique du mineur principal « symbolique » d'ordre $v-i$.

Les formules (13) et (14) fournissent une nouvelle variance de la méthode de détermination des matrices Σ_i et Γ_i , conduisant à une économie considérable d'opérations arithmétiques, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \Sigma_i = -K_i^{-1}\Omega_i\Theta & \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, v-1 \\ \text{mais aussi pour } i = 0 : \Sigma_0 = \Gamma_0 = \Theta \end{array} \right. \end{cases} \quad (15)$$

Ensuite, on aura

$$R^{-1} =$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc} \Gamma_{v-1} & \Gamma_{v-2} & \Gamma_{v-3} & \dots & \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Theta \\ & \Sigma_1\Theta^{-1}\Gamma_{v-2} & \Sigma_1\Theta^{-1}\Gamma_{v-3} & \dots & \Sigma_1\Theta^{-1}\Gamma_2 & \Sigma_1\Theta^{-1}\Gamma_1 & \Sigma_1 \\ & & \Sigma_2\Theta^{-1}\Gamma_{v-3} & \dots & \Sigma_2\Theta^{-1}\Gamma_2 & \Sigma_2\Theta^{-1}\Gamma_1 & \Sigma_2 \\ & & & \dots & & & \\ & & & & \Sigma_{v-3}\Theta^{-1}\Gamma_2 & \Sigma_{v-3}\Theta^{-1}\Gamma_1 & \Sigma_{v-3} \\ & \text{Symétr.} & & & & \Sigma_{v-2}\Theta^{-1}\Gamma_1 & \Sigma_{v-2} \\ & & & & & & \Sigma_{v-1} \end{array} \right) \quad (16)$$

où $\Theta = \Omega_v^{-1}$: est déterminée de nouveau par la formule (9) et Γ_i, Σ_i sont des matrices carrées déterminées par (15) ou par (4), (5).

1.5. Procédé systématique proposé pour le calcul de R^{-1}

En suite des notions mentionnées ci-dessus, le *procédé* systématique suivant est proposé pour la détermination de R^{-1} .

Premièrement la matrice fondamentale Θ est calculée, selon la forme de récurrence (12), comme suit :

$$\Omega_1 = A_1$$

$$\Omega_2 = -A_2(K_1^{-1}\Omega_1) - K_1'(-I) = A_2\Omega_1 + K_1'$$

où $\Omega_1 = -K_1^{-1}\Omega_1$

$$\Omega_3 = -A_3(K_2^{-1}\Omega_2) - K_2'(K_1^{-1}\Omega_1) = A_3\Omega_2 + K_2'\Omega_1$$

où $\Omega_2 = -K_2^{-1}\Omega_2$

.....

$$\Omega_v = \dots = A_v\Omega_{v-1} + K_{v-1}'\Omega_{v-2}$$

où $\Omega_{v-1} = -K_{v-1}^{-1}\Omega_{v-1}$

Ensuite, le reste des éléments de la première ligne de R^{-1} est déterminé selon la formule (4), c'est-à-dire :

$$\Gamma_1 = -\Theta A_v K_{v-1}^{-1}, \Gamma_2 = -(\Gamma_1 A_{v-1} + \Theta K'_{v-1}) K_{v-2}^{-1},$$

$$\Gamma_3 = -(\Gamma_2 A_{v-2} + \Gamma_1 K'_{v-2}) K_{v-3}^{-1}, \dots$$

En utilisant (6) et (15) on peut déterminer tous les éléments de R^{-1} en fonction des éléments de la première ligne, comme suit :

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \Gamma_{v-1} & \Gamma_{v-2} & \Gamma_{v-3} & \dots & \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Theta \\ & \Omega_1 \Gamma_{v-2} & \Omega_1 \Gamma_{v-3} & \dots & \Omega_1 \Gamma_2 & \Omega_1 \Gamma_1 & \Omega_1 \Theta \\ & & \Omega_2 \Gamma_{v-3} & \dots & \Omega_2 \Gamma_2 & \Omega_2 \Gamma_1 & \Omega_2 \Theta \\ & & & \dots & & & \\ & & & & \Omega_{v-3} \Gamma_2 & \Omega_{v-3} \Gamma_1 & \Omega_{v-3} \Theta \\ & \text{Symétr.} & & & & \Omega_{v-2} \Gamma_1 & \Omega_{v-2} \Theta \\ & & & & & & \Omega_{v-1} \Theta \end{pmatrix} \quad (17)$$

La méthode proposée, tenant compte de la symétrie de R et exigeant l'inversion des sous-matrices K_i, Ω_v , entraîne une économie considérable d'opérations. Après le calcul de Θ (la plus grande partie du travail) et des Γ_i , tout autre élément peut être calculé comme produit de deux sous-matrices déjà déterminées. La précision au calcul de R^{-1} dépend de celle à la détermination de Θ .

Ainsi, on a prouvé que les matrices tridiagonales symétriques, partitionnées en « blocs », ont une inverse factorisable à éléments de « blocs », calculable explicitement et rapidement. Ce dernier résultat constitue la partie originale de l'article.

La méthode est aussi efficace quand R est mal conditionnée (au cas où A_i, K_i sont respectivement mal et bien conditionnées) et en général présente une stabilité numérique satisfaisante.

2. INVERSION DE MATRICES TRIDIAGONALES SYMETRIQUES A ELEMENTS SCALAIRES

Si on remplace R par A et $A_i, K_i, \Gamma_i, \Theta$ par $d_i, k_i, \gamma_i, \theta$ respectivement, on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & k_1 & & & & & \\ & k_1 & d_2 & k_2 & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & k_{i-1} & d_i & k_i & \\ & & & & \dots & \dots & \\ & & & & & k_{v-2} & d_{v-1} & k_{v-1} \\ & & & & & & k_{v-1} & d_v \end{pmatrix} \tag{18}$$

et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{v-1} & \gamma_{v-2} & \gamma_{v-3} & \dots & \gamma_2 & \gamma_1 & \theta \\ & \omega_1 \gamma_{v-2} & \omega_1 \gamma_{v-3} & \dots & \omega_1 \gamma_2 & \omega_1 \gamma_1 & \omega_1 \theta \\ & & \omega_2 \gamma_{v-3} & \dots & \omega_2 \gamma_2 & \omega_2 \gamma_1 & \omega_2 \theta \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Symétr.} & & & & \omega_{v-3} \gamma_2 & \omega_{v-3} \gamma_1 & \omega_{v-3} \theta \\ & & & & & \omega_{v-2} \gamma_1 & \omega_{v-2} \theta \\ & & & & & & \omega_{v-1} \theta \end{pmatrix} \tag{19}$$

où

les éléments scalaires ω_i et θ sont déterminés, comme suit :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= d_1 \\ \omega_2 &= d_2 \omega_1 + k_1 & \text{où encore} & \omega_1 = -k_1^{-1} \omega_2 \\ \omega_3 &= d_3 \omega_2 + k_2 \omega_1 & \text{»} & \text{»} & \omega_2 = -k_2^{-1} \omega_3 \\ & \dots & & & \dots \\ \omega_v &= d_v \omega_{v-1} + k_{v-1} \omega_{v-2} & \text{»} & \text{»} & \omega_{v-1} = -k_{v-1}^{-1} \omega_v \\ \theta &= \omega_v^{-1} \end{aligned}$$

Enfin, on calcule le reste des éléments de la première ligne :

$$\gamma_\rho = -(\gamma_{\rho-1}d_{v-\rho+1} + \gamma_{\rho-2}k_{v-\rho+1})k_{v-\rho}^{-1}$$

pour $\rho = 2, 3, \dots, v-1$, $\gamma_0 = \theta, \gamma_1 = -\gamma_0 d_v k_{v-1}^{-1}$

Ainsi, on a prouvé que les matrices tridiagonales symétriques (à éléments scalaires) ont une inverse factorisable, calculable explicitement et assez rapidement, par la méthode exposée. Sur ce sujet, assez connu d'ailleurs, il y a aussi d'autres démonstrations, mais tout à fait différentes (voir : [2]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. SCHECHTER, *Quasi-Tridiagonal Matrices and Type-Insensitive Difference Equations*, A.E.C. Computing and Appl. Mathematics Center, Institut of Mathematical Science, NYU, 1959, NYO-2542.
- [2] J. BARANGER et M. DUC-JACQUET, *Matrices tridiagonales symétriques et matrices factorisables*, R.I.R.O., 5^e année, 1971, n° R-3, p. 61-66.