Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique

Jacques Wolf

Étude de quelques signaux transitoires

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique, tome 7, nº 1 (1973), p. 101-106.

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_1_101_0>

R.A.I.R.O.
(7e année, avril 1973, R-1, p. 101-106)

ETUDE DE QUELQUES SIGNAUX TRANSITOIRES

par Jacques WOLF (1)

Résumé. — *Dans le cas de quelques signaux transitoires particuliers on propose des méthodes numériques, pratiquement utilisables, qui permettent de calculer assez rapidement la fréquence du fondamental existant dans le signal étudié.*

Certains signaux possèdent trois parties bien distinctes :

La partie transitoire, la partie stationnaire et l'extinction. On étudiera ici la partie transitoire, en supposant que les signaux observés admettent pour représentation [1], [2] sur l'intervalle $[a, b]$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} h_k(t) \cos (\omega_k t + \varphi_k)$$

On indique des moyens de calculer la fréquence du fondamental $f_1 = 2\pi\omega_1$ dans les deux cas suivants :

* $h_k(t)$ est un polynome de degré n_k (n_k borné $\forall k$), et la répartition des partiels est une répartition harmonique, c'est-à-dire $\omega_k = k\omega$ $(k = 1, 2, \ldots N)$.

* $h_k(t)$ est une combinaison linéaire d'exponentielles, la répartition des partiels étant *a priori* quelconque.

On appelle G_n le maillage défini par :

$$G_n = \{ t/t_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots n;\ h = (b - a)/n \}.$$

(1) Maître Assistant, Institut de Recherches en Mathématiques Avancées, Grenoble.

I. CAS OU $h_k(t)$ EST UN POLYNOME DE DEGRE n_k

On pose $M = \operatorname{Max}(n_k)$ et $h_k(t) = \sum_{i=0}^{M} a_{ki} t^{M-i}$.

Le signal $f(t)$ s'écrit alors

$$f(t) = \sum_{i=0}^{M} \left(\sum_{k=1}^{N} a_{ki} \cos(k\omega t + \varphi_k) \right) t^{M-i} = \sum_{i=0}^{M} \Psi_i(t) t^{M-i}$$

avec

$$\Psi_i(t) = \sum_{k=1}^{N} a_{ki} \cos(k\omega t + \varphi_k) \qquad i = 0, \ldots, M$$

fonctions périodiques de période $T = 2\pi/\omega$.

Calcul de ω

Soit $t \in [a, b]$, quelconque mais fixé, et soit

$$P_M(x) = \sum_{i=0}^{M} \Psi_i(t)(t + x)^{M-i} = \sum_{i=0}^{M} \beta_i x^{M-i}.$$

On considère les quantités

$$\xi_j(u) = f(t + ju) \qquad j = 0, 1, \ldots, N1 = \left[\frac{b - t}{u}\right] \tag{1}$$

($[x]$ = entier le plus proche, et inférieur à x)

u étant un paramètre réel positif, tel que, $\forall u$, $N1 > M$. (2)

On peut alors montrer :

Proposition 1

Si $u = kT$, $\forall k > 0$ entier, il existe un polynôme de degré M passant par les points (j, ξ_j) $j = 0, \ldots N1 > M$, ce polynôme est P_M.

Pour calculer effectivement ces valeurs kT ($k = 1, \ldots$) on utilise le schéma suivant :

Soit :
$$L^2(u) = \frac{1}{N1 - M} \sum_{j=0}^{N1-M-1} [\Delta_j^{M+1}(u)]^2$$

avec

$$\begin{cases} \Delta_j^k(u) = \Delta_{j+1}^{k-1}(u) - \Delta_j^{k-1}(u) \\ \Delta_j^0(u) = f(t + ju). \end{cases}$$

La fonction $L^2(u)$ est minimum ($= 0$) aux points $u = kT$.

REMARQUE : *Problème inverse.* Si $L^2(u) = 0$ a-t-on nécessairement $u = kT$? Non, ceci dépend essentiellement du point de départ t. On peut alors montrer :

Proposition 2 [3]

L'ensemble des « points de départ » t, tel que l'équation $L^2(u) = 0$ admet des solutions autres que $u = kT$ ($\forall k$) est de mesure nulle.

Les expériences numériques faites sur cette méthode n'ont d'ailleurs jamais conduit à trouver $u \neq kT$.

Une condition nécessaire d'utilisation de cette méthode découle immédiatement de la condition (2) $N1 = \left[\frac{b - t}{u}\right] > M$, lorsqu'on utilise $t = a$, et $u = T$:

$$(b - a) > MT$$

EXEMPLE D'APPLICATION

On a représenté ici (fig. 1) le signal étudié, dans ce cas $M = 4$. Sur la figure 2 est tracée la fonction $Ln(L^2(u))$ sur laquelle on voit apparaître le minimum (autre qu'en $u = 0$) pour $u = 0{,}05$ seconde qui est bien la période correspondant au fondamental

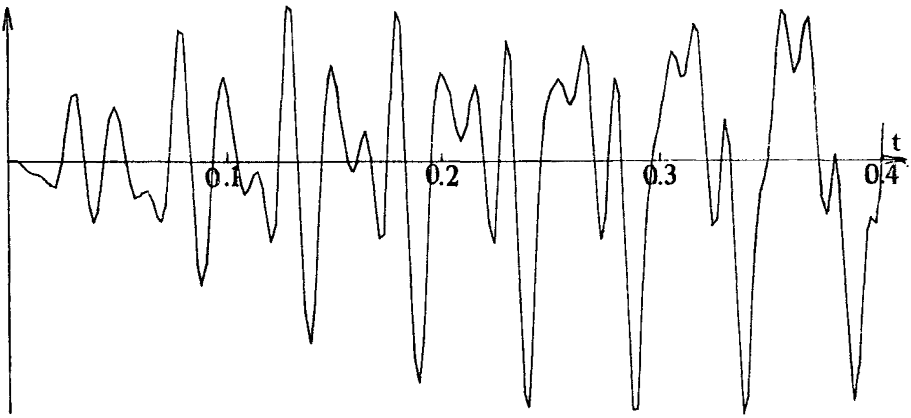

Figure 1
Signal : $f(t)$

Calcul de $h_k(t)$

La période T étant supposée, désormais, connue on peut alors calculer les coefficients β_i du polynome P_M. Par résolution du système linéaire

$$\sum_{i=0}^{M} (t + jT)\Psi_i(t) = \sum_{k=0}^{M} \beta_k(jT)^{M-k} \qquad j = 0, 1, \ldots, M$$

on peut ainsi calculer $\Psi_i(t)$.

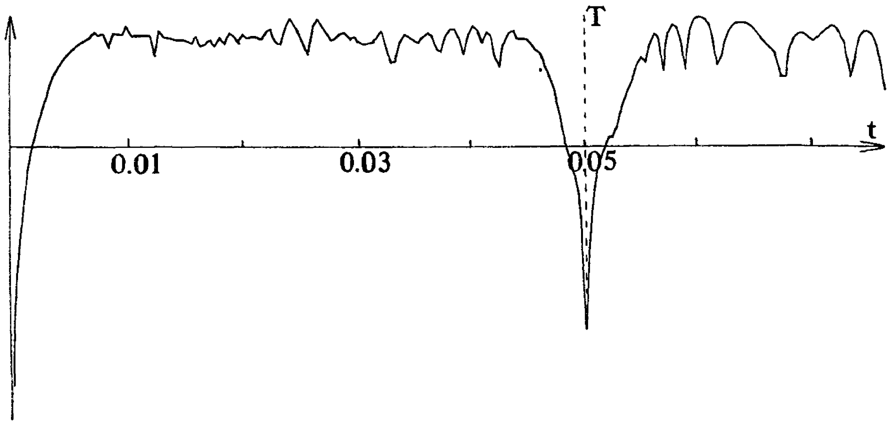

Figure 2
Courbe $Ln(L^2(t))$

Le procédé indiqué est utilisé en prenant plusieurs valeurs de départ $t = t_s \in G_n$, ce qui permet de calculer successivement

$$\Psi_i(t_s) \begin{cases} i = 0, ..., M \\ s = 0, ..., N_2, \end{cases}$$

Ces valeurs sont alors utilisées avec une méthode quelconque (analyse de Fourier, moindres carrés) pour calculer les coefficients a_{ki} et φ_k ce qui donne une approximation des fonctions $h_k(t)$.

Conclusion

Les essais numériques ont donné de bons résultats. L'expérience montre que la précision sur la fréquence du fondamental est d'autant plus grande que l'enregistrement est plus long. Dans le cas où des bornes supérieure et inférieure de la fréquence du fondamental sont connues, on doit évidemment étudier $L^2(u)$ sur un intervalle bien plus petit que dans le cas de la figure 2.

II. CAS OU $h_k(t) = \sum_{i=1}^{M} a_{ki}\, e^{\nu_{ki} t}$

Le signal observé $f(t)$ est donc de la forme :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} a_{ki}\, e^{\nu_{ki} t} \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (3) \qquad t \in [a, b].$$

On suppose M et N connus, et $f(t)$ connue $\forall t \in G_n$. Pour simplifier les notations on pose $f_n = f(a+nh)$, et $a = 0$.

En posant

$$\rho_{kj} = e^{\nu_{kj} + i\omega_k} \qquad k = 1, ..., N$$
$$D_{kj} = a_{kj}\, e^{i\varphi k/2} \qquad j = 1, ..., M.$$

On peut écrire :

$$f(t) = \sum_{k,j} (D_{kj}\rho_{kj}^t + \bar{D}_{kj}\bar{\rho}_{kj}^t).$$

On pose à nouveau :

$$\left.\begin{array}{ll} \rho_{kj} = R_{N(j-1)+k} \;, & \bar{\rho}_{kj} = R_{NM+N(j-1)+k} \\ D_{kj} = C_{N(j-1)+k} \;, & \bar{D}_{kj} = C_{N(j-1)+k+NM} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} k = 1, ..., N \\ j = 1, ..., M. \end{array}$$

Le signal $f(t)$ peut maintenant s'écrire :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{2M\times N} C_k(R_k)^t \qquad (P = 2 \times M \times N).$$

Utilisant une méthode due à Prony [4], on se propose de calculer R_k ($k = 1, ..., P$), c'est-à-dire ω_k puisque $\omega_k = \operatorname{Arg}(R_{N(j-1)+k})$ $(\forall j)$.

Puisque $f(t)$ est connue aux instants t_i ($\in G_n$), on doit résoudre le système :

$$\sum_{k=1}^{P} C_k R_k^{jh} = f_j \qquad j = 0, 1, ..., n$$

aux $2P$ inconnues C_k, $Y_k = R_k^h$. Ce système est non-linéaire.

Écrivons ce système :

$$\begin{array}{llll} C_1 + C_2 + ... + C_P & = f_0 & & S(0) \\ C_1Y_1 + C_2Y_2 + ... + C_PY_P & = f_1 & & S(1) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ C_1Y_1^{2p-1} \quad + ... + C_PY_P^{2p-1} & = f_{2p-1} & & S(2p-1) \end{array}$$

d'où la nécessité d'avoir $n \geqslant 2p - 1 \geqslant 2P - 1$.

On écrit alors que $Y_1, ..., Y_P$ sont les racines de l'équation algébrique :

$$Y^P - C_1Y^{P-1} - C_2Y^{P-2} - ... - C_P = 0. \tag{4}$$

On obtient, en faisant des combinaisons linéaires des lignes $S(_i)$, que les coefficients C_k sont solution du système linéaire :

$$(S)\quad \begin{cases} f_{P-1}C_1 + f_{P-2}C_2 + \dots + f_0 C_P = f_P \\ \quad\vdots \\ f_{2P-2}C_1 + f_{2P-3}C_2 + \dots + f_{P-1}C_P = f_{2P-1} \end{cases}$$

(On peut considérer plus d'informations, en écrivant d'autres équations

$$f_{p-1}C_1 + f_{p-2}C_2 + \dots + f_{p-P}C_P = f_p \qquad (p \geqslant 2P)$$

si les f_p sont connues pour $p \geqslant 2P$, et résoudre le système (S) par des méthodes de moindres carrés.)

Les C_i $(i = 1, \dots, P)$ étant désormais supposés connus par la résolution de (S), il suffit donc de déterminer les racines de l'équation (4) pour connaître les fréquences $2\pi\omega_k$ $(k = 1, \dots, M)$.

Si de plus on cherche la courbe d'établissement de ces fréquences on calcule les coefficients a_{ki} par résolution d'un système linéaire.

RÉFÉRENCES

[1] M. D. FREEDMAN, *Analysis of Musical Instrument Tones*, J. Acoust. Soc. Am., 1967, 41, 793.

[2] J. LAGASSE, *Études des circuits électriques*, tome II, Eyrolles (Paris), 1963.

[3] J. WOLF, *Recherche de périodicités*, Colloque C.N.R.S. Super Besse 1970.

[4] F. B. HILDEBRAND, *Introduction to numerical analysis*, Mac Graw Hill 1956.