Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique

C. Bonnemoy

Brève communication. Obtention des fonctions splines usuelles à l'aide de la théorie des espaces gaussiens

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique, tome 7, nº 2 (1973), p. 73-81.

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_2_73_0>

R.A.I.R.O.
(7e année, R-2, 1973, p. 73-81)

OBTENTION DES FONCTIONS SPLINES USUELLES A L'AIDE DE LA THEORIE DES ESPACES GAUSSIENS

par C. BONNEMOY [1]

Résumé. — *Un cas particulier de fonction aléatoire non stationnaire (cf. 7) où un problème d'estimation Bayesienne peut se résoudre à l'aide de fonctions splines.*

I. PROBLEME INITIAL $[P_1]$

— Soit $X_t(\omega)$ la fonction aléatoire du Mouvement Brownien avec $t \geqslant 0$, $X_0 = 0$ p. s., $E(X_t) = 0 \ \forall\, t$, de fonction de corrélation

$$r(t, s) = E(X_t X_s) = \min(t, s), \qquad \text{soit} \qquad T = [0, b].$$

Soit H l'espace gaussien (cf. 1) engendré par les $X_t, t \in T$, c'est un sous-espace vectoriel fermé de $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, Hilbert pour le produit scalaire $(Z/Y)_H = E[ZY]$. Il est formé de variables gaussiennes centrées.

Soient $0 < t_1 < t_2, \dots, t_n < b$ n abscisses dans T et $y_1, y_2 \dots y_n$ n nombres réels, $n > 1$.

Nous nous posons le problème $[P_1]$ suivant :

Existe-t-il dans $H \subset L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ une variable aléatoire $S(\omega)$ telle que :

1° $E(SX_{t_i}) = y_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$

2° $E(S^2)$ soit minimum?

Proposition 1 :

Le problème $[P_1]$ admet une solution unique S.

(1) Maître-assistant à l'Université de Clermont.

On peut écrire :

(1) $$S = \sum_{j=1}^{n} c_j X_{t_j}$$

où les c_j sont solutions du système :

(2) $$y_i = \sum_{j=1}^{n} c_j r(t_i, t_j) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

ou encore en utilisant le fait que X_t est à accroissements indépendants

(3) $$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \qquad (y_0 = t_0 = 0)$$

II. ESPACES ISOMETRIQUES AVEC H, FONCTIONS SPLINES D'ORDRE 1

Rappelons les résultats suivants (cf. 1 et 4).

a) Il existe une isométrie :

$$B : L^2(T, \mathrm{d}x) \to H$$

qui à $g_t(.) = 1_{[0,t]}(.)$ fait correspondre $X_t = B(g_t)$
(il s'agit de la mesure brownienne et on peut définir X_t par une intégrale stochastique de g_t).

b) Il existe une application :

ψ de H dans $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$ définie par :

$$\psi(Z) = E(ZX .)$$

L'espace $\mathcal{R} = \psi(H)$ est engendré par les fonctions : $r(t, .)$, $t \in T$ et il est reproduisant pour le noyau $r(t, s)$. ψ est une isométrie entre H et $\mathcal{R}$. Dans le cas particulier du mouvement Brownien, on peut préciser l'espace hilbertien $\mathcal{R}$. Soit :

$$h = B^{-1}(Z), \varphi = \psi(Z) \qquad \text{où} \qquad Z \in H$$

alors :

$$\varphi(t) = E(ZX_t) = (h, g_t)_{L^2(T,dx)} = \int_T 1_{[0,t]}(x) h(x) dx \Rightarrow \varphi(t) = \int_0^t h(x) dx$$

Donc $\mathcal{R}$ est formée de fonctions continues, nulles à l'origine, à dérivées premières dans $L^2(T, \mathrm{d}x)$. Il est muni du produit scalaire :

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{\mathcal{R}} = E[z_1, z_2] = \int_T \varphi_1'(x) \varphi_2'(x) dx$$

Fonction spline d'ordre 1 dans $\mathcal{R}$

Donnons-nous les abscisses $0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n < b$ et les réels $y_1 \ldots y_n$ et cherchons dans $\mathcal{R}$ un élément s tel que :

1° $s(t_i) = y_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \qquad (s(0) = 0).$

2° $\int_T s'^2_{(x)}\, dx$ minimum

comme $\int_T s'^2_{(x)}\, dx = \|s\|^2_{\mathcal{R}}$, on voit que ce problème, reporté dans H est dientique au problème $[P_1]$. On a donc immédiatement la solution sous la forme :

(4) $$s(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} (r(t_i, t) - r(t_{i-1}, t)),\, y_0 = t_0 = r(t_0, t) = 0\ \forall\, t$$

Remarquons :

$$r(t_i, t) - r(t_{i-1}, t) = \min(t_i, t) - \min(t_{i-1}, t) = (t - t_{i-1})_+ - (t - t_i)_+.$$

On peut donc écrire :

(5) $$s(t) = \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} - y_i)[(t - t_{i-1})_+, (t - t_i)_+]$$

où $[f(t_{i-1}), f(t_i)]$ désigne la différence première divisée de f sur les abscisses t_{i-1}, t_i. On notera plus généralement $[f(t_i), \ldots, f(t_{i+k})]$ la différence $k^{\text{ième}}$ divisée de f sur les abscisses $t_i, \ldots, t_{i+k}$.

REMARQUE : Sous la forme (4) on retrouve l'écriture d'une spline à l'aide d'un multinoyau de Schwartz (cf. 3).

— Sous la forme (5) on trouve l'écriture de la spline telle qu'on l'aurait obtenue par la méthode d'intégration que nous rappelons :

(6) $$[s(t_{i-1}), s(t_i)] = \int_T [g_{t_{i-1}}(x), g_{t_i}(x)] s'(x) dx = \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$$

$$1 \leqslant i \leqslant n - 1$$

C'est le théorème de Peano appliqué à la fonctionnelle différence première divisée; ainsi, toutes les conditions sont reportées sur s' dans $L_2(T, \mathrm{d}x)$ or $(t - x)^0_+ = 1_{[0,t]}(x) = g_t(x)$ (convenir que $u \equiv 0$ si $u^0_+ \leqslant 0$).

$\alpha_i(x) = \dfrac{g_{t_i}(x) - g_{t_{i-1}}(x)}{t_i - t_{i-1}} = \dfrac{1_{[t_{i-1}, t_i]}(x)}{t_i - t_{i-1}}$ est une « spline de base » d'ordre 1 et c'est aussi la densité (cf. 5) d'une variable aléatoire uniforme sur $[t_{i-1}, t_i]$. Par un raisonnement identique à celui de la prop. 1 (2° méthode), on est amené à chercher $s'(x)$ sous la forme $\sum_1^n d_j \alpha_j(x)$.

Les conditions (6) s'écrivent :

$$\int_T \alpha_i(x)\left[\sum_1^n \mathrm{d}_j\alpha_j(x)\right]\mathrm{d}x = (y_i - y_{i-1})/(t_i - t_{i-1})$$

et comme :

$$\int_T \alpha_i(x)\alpha_j(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \dfrac{1}{t_i - t_{i-1}} & i = j \end{cases} \quad \text{on trouve} \qquad d_j = y_j - y_{j-1}$$

d'où :

$$s'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(g_{t_i}(t) - g_{t_{i-1}}(t))$$

comme $g_{t_i}(t) - g_{t_{i-1}}(t) = (t - t_{i-1})_+^0 - (t - t_i)_+^0$ et que $s(0) = 0$ en intégrant 1 fois, on retrouve (5) ou (4). $s(t)$ n'est d'ailleurs rien d'autre que la ligne brisée joignant les points $(t_i, y_i)_{i=0}^n$. Pour tout $t > t_n$, on a :

$$s(t) = y_n$$

REMARQUE : Dans ce cas particulier, le théorème de Peano exprime que la différence divisée $\dfrac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$ est l'espérance mathématique $E[s'_{(u(\omega))}]$ où $u_{(\omega)}$ est une variable uniforme sur $[t_{i-1}, t_i]$ de densité $\alpha_i(x)$.

REMARQUE : Si on considère le problème d'extrapolation suivant : Z est donnée dans H et les valeurs $y_k = E(ZX_{t_k})$ $1 \leqslant k \leqslant n$ sont données, on cherche $U = \sum_1^n \alpha_i X_{t_i}$ telle que $E(U - Z)^2$ soit minimum. Les conditions nécessaires et suffisantes conduisent à $E(UX_{t_k}) = y_k$ et de plus $U \in H_n^{(1)} \Rightarrow E(U - Z^2)$ minimum $\Leftrightarrow E(U^2)$ minimum, donc $U = S$ solution de $[P_1]$. (En particulier, si $Z = X_\tau$ avec $\tau > t_n$ alors d'après (3) $U = X_{t_n}$ meilleure prédiction de X_τ).

(1) H_n : sous-espace engendré par $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$.

III. OBTENTION DES FONCTIONS SPLINES D'ORDRE $k > 1$

On peut généraliser la notion de spline aléatoire S à d'autres fonctions aléatoires que le mouvement Brownien, mais nous nous demandons ici comment faire intervenir les splines usuelles d'ordre k, c'est-à-dire celles dont les splines fondamentales sont des différences k^{ieme} divisées du noyau $(t - x)_+^k$.

Intégrales du mouvement Brownien

Introduisons la fonction aléatoire $(X_t^k(\omega))_{t\in T}$ définie en intégrant $(m.q)$ k fois le mouvement Brownien X_t :

$$X_t^k = \int_0^t \int_0^{y_{k-1}} \dots \int_0^{y_2} \int_0^{y_1} \quad X_{y_0} \mathrm{d}y_0 \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_{k-1}$$

c'est une fonction aléatoire gaussienne de fonction de corrélation :

$$r^k(t, s) = E[X_t^k X_z^k] = \int_0^t \dots \int_0^{y_1} \dots \int_0^s \dots \int_0^{z_1} r(y_0, z_0) \mathrm{d}y_0 \dots \mathrm{d}y_{k-1} \mathrm{d}z_0 \dots \mathrm{d}z_{k-1}$$

ce qui peut s'écrire, vu que $r(y_0, z_0) = \int_T g_{y_0}(x) g_{z_0}(x) \mathrm{d}x$

$$r^k(t, s) = \int_T g_t^k(x) g_s^k(x) \mathrm{d}x \text{ (avec toujours } T = [0, b],\ t \text{ et } s \leqslant b)$$

où :

$$g_t^k(x) = \int_0^t \int_0^{y_{k-1}} \dots \int_0^{y_1} 1_{[0, y_0]}(x) \mathrm{d}y_0 \mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_{k-1} = \frac{(t - x)_+^k}{k\,!}$$

X_t^k est définie pour $t \geqslant 0$ avec $X_0^k = 0p \cdot s$ (ainsi que $\left(\dfrac{d^p X_t^k}{d_t^p}\right)_{t=0} 1 \leqslant p \leqslant k$

elle est gaussienne centrée et $E(X_t^k)^2 = r^k(t, t) = t^{2k+1}/(k\,!)^2(2k+1)$.

— Le mouvement brownien est une fonction aléatoire à accroissements indépendants, ce qui vient du fait que la v.a. $X_t - X_s$ est indépendante du passé, c'est-à-dire :

$$E[X_u(X_t - X_s)] = 0 \quad \forall u \leqslant \min(t, s)$$

On en déduit :

Lemme : la variable aléatoire $[X_{t_{i_1}}^k, \dots, X_{t_{i_{k+2}}}^k]$ est indépendante des variables X_u^k pour $u \leqslant \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant k+2} t_{i_j}$.

Pour $k = 0$, on retrouve la propriété du mouvement brownien citée ci-dessus.

Espaces gaussiens d'ordre k et Hilbert isométriques

Considérons la fonction aléatoire $\{X_t^k(\omega)\}_{t\in T}$ gaussienne centrée, elle engendre un espace gaussien H^k formée des combinaisons linéaires finies de X_t^k et de leurs limites m.q., c'est un sous-espace Hilbertien fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, p)$

toujours pour le produit scalaire $E(YZ)$. Comme $X_t = B(g_t)$ on peut encore écrire :

$$X_t^k = B(g_t^k)$$

et H^k est isométrique par la mesure Brownienne B au sous-espace fermé $L_2(T, \mathrm{d}x)$ engendré par les fonctions $g_t^k(x) = \dfrac{(t-x)_+^k}{k\,!}$, $t \in T$.

Considérons, d'autre part, l'espace $\mathcal{R}^k$ formé des fonctions réelles définies sur T :

$$t \longrightarrow E[X_t^k Z^k] = \varphi_{(t)} \qquad \text{avec} \qquad Z^k \in H^k\,(\varphi = \psi(Z^k))$$

il est muni d'une structure d'espace hilbertien isométrique à celle de H^k par :

$$(\varphi_1/\varphi_2)_{\mathcal{R}^k} = E[\psi^{-1}{}_{(\varphi_1)}\,\psi^{-1}{}_{(\varphi_2)}] = E[Z_1^k Z_2^k]$$

et il est reproduisant pour le noyau $r^k(t, s)$ puisque

$$(\varphi/r^k(t,\ .))_{\mathcal{R}^k} = E[Z^k X_t^k] = \varphi_{(t)}$$

— Cherchons, comme pour $\mathcal{R}$, à identifier le Hilbert $\mathcal{R}^k$. Posons :

$$Z_{(\omega)}^k = B(h^k),\ \varphi = \psi(Z^k)$$

On a :

$$\varphi_{(t)} = E[Z^k X_t^k] = (h^k/g_t^k)_{L^2(t,dx)} = \int_T h^k(x)\,\frac{(t-x)_+^k}{k\,!}\,\mathrm{d}x$$

d'où en intégrant k fois par partie

$$\varphi(t) = \int_0^t \int_0^{y_k} \dots \int_0^{y_1} h^k(y_0)\,\mathrm{d}y_0\,\mathrm{d}y_1 \dots \mathrm{d}y_k$$

d'où $\dfrac{d^{k+1}\varphi(t)}{dt^{k+1}} = h_{(t)}^k$ ce qui fait de $\mathcal{R}^k$ l'espace des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}_T^k$ avec $\varphi^{(k+1)} \in L^2\,(T, \mathrm{d}x)$ et $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi_{(0)}^{(k)} = 0$ (la dernière condition mise à part, c'est l'espace où l'on cherche les splines usuelles).

Problème $[P_k]$

Donnons-nous, comme ci-dessus, $\{ t_i, y_i \}_{i=1,n}$, existe-t-il dans H^{k-1} une variable aléatoire S telle que :

$$E[S X_{t_i}^{k-1}] = y_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

2° $E(S^2)$ minimum?

Proposition 2 : Si $n \geqslant k$, le problème $[P_k]$ admet une solution unique S, on peut l'écrire :

$$S = \sum_{j=0}^{n-k} \lambda_j u_j \tag{7}$$

où

$$u_j = [X_{t_j}^{k-1}, \ldots, X_{t_{j+k}}^{k-1}] \qquad 0 \leqslant j \leqslant n-k$$

les λ_j étant solution du système

$$\sum_{j=0}^{n-k} \lambda_j E[u_j u_i] = [y_i, \ldots, y_{i+k}] \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-k \tag{8}$$

la démonstration, se basant sur le lemme est identique à la méthode d'intégration (cf. 6), en particulier :

$$E[u_i u_j] = \frac{(-1)^k}{(2k-1)\,!}[h_j(t_i), \ldots h_j(t_{i+k})]$$

$$\text{où} \qquad h_j(y) = [(y-t_j)_+^{2k-1}, \ldots (y-t_{j+k})_+^{2k-1}]$$

ce qui entraîne que le système (8) est $2k-1$ diagonal et symétrique.

Fonction spline d'ordre k

Si nous cherchons maintenant dans $\mathcal{R}^{k-1}$ une fonction spline d'interpolation $s(x)$ telle que $s(t_i) = y_i \quad 0 \leqslant i \leqslant n (t_0 = y_0 = 0)$

$$s_{(0)}^{(p)} = 0, 1 \leqslant p \leqslant k-1, \int_T s_{(x)}^{(k)2} dx \text{ minimum},$$

on prend pour s l'image de la variable aléatoire S par l'isomorphisme ψ : $H^{k-1} \rightarrow \mathcal{R}^{k-1}$, on obtient donc :

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-k} \lambda_i [r^{k-1}(t_i, x), \ldots r^{k-1}(t_{i+k}, x)] \tag{9}$$

les λ_i étant solution de (8).

On retrouve exactement le résultat qui aurait été obtenu en appliquant la méthode d'intégration directement entre $L^2_{(T,dx)}$ et $\mathcal{R}^{k-1}$, compte tenu du fait que le polynôme p_{k-1} d'intégration est ici nul et du fait que :

$$[r_{(t_i,x)}^{k-1}, \ldots, r_{(t_{i+k},x)}^{k-1}] = \frac{(-1)^k}{(2k-1)\,!}[(x-t_i)_+^{2k-1}, \ldots (x-t_{i+k})_+^{2k-1}] \tag{10}$$

on obtient ainsi s sous sa forme classique.

Il reste à vérifier que S et s vérifient bien les conditions :

$$E[SX_{ti}^{k-1}] = s(t_i) = y_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

Or (8) exprime que $E[SU_i] = [y_i, \dots y_{i+k}]$, soit :

$$E[S[X_{ti}, \dots, X_{ti+k}]] = [E[SX_{ti}], \dots, E[SX_{ti+k}]] = [s(t_i), \dots s(t_{i+k})]$$
$$= [y_i, \dots, y_{i+k}] \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-k$$

D'autre part, on doit avoir $s(0) = s'(0) = \dots s_{(0)}^{(k-1)} = 0$.

Considérons la différence k^{ieme} généralisée de s prise sur des nœuds : $x_0(\alpha_0$ fois), $x_1(\alpha_1$ fois) ... $x_p(\alpha_p$ fois) avec $\sum_0^p \alpha_i = k+1$, elle s'écrit :

$$(11) \qquad \sum_{i=0}^{p} \sum_{m=0}^{\alpha_i - 1} \frac{s^{(m)}(x_i)}{m\,!\,(\alpha_i - m - 1)\,!} \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)}\right]_{x=x_i}$$

où $\omega(x) = \prod_{i=0}^{p} (x - x_i)^{\alpha_i}$.

Appliquons (11) au cas suivant : $x_0 = 0, \alpha_0 = k, s_{(0)}^{(m)} = 0$ pour $0 \leqslant m \leqslant k-1$

$$x_1 = t_1, \quad \alpha_1 = 1$$

il reste $s(t_1)/t_1^k$. Pour toute fonction φ de $\mathcal{R}^{k-1}$ telle que $\varphi(t_i) = y_i$ $1 \leqslant i \leqslant n$ l'identité des différences $k^{\text{ièmes}}$ divisées de s et φ sur ces points implique :

$$s(t_1) = \varphi(t_1) = y_1$$

On recommence dans le cas suivant :

$$x_0 = 0, \alpha_0 = k-1, s^{(m)}(0) = 0 \qquad 0 \leqslant m \leqslant k-2$$
$$x_1 = t_1, \alpha_1 = 1, x_2 = t_2, \alpha_2 = 1$$

par (11) on est conduit à : $s(t_2) = \varphi(t_2) = y_2$ etc... jusqu'au cas : $x_0 = t_{n-k}$, $\alpha_0 = 1 \dots x_k = t_n, \alpha_n = 1$ qui conduit à : $s(t_n) = y_n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. NEVEU, *Processus aléatoires gaussiens*, Séminaire Montréal, été 1968.

[2] C. BONNEMOY, *Quadratures optimales pour une fonction aléatoire gaussienne*. Colloque d'Analyse Numérique, Super-Besse, juin 1970.

[3] C. F. DUCATEAU, J. L. JOLY, *Fonctions Inf-loc^t-compactes, fonctions hilbertiennes, fonctions splines*. Institut de Math. Appliquées, CEDEX 53, 38-Grenoble-Gare. 1971.

[4] E. PARZEN, *Time series analysis papers*, Holden Day, 1967.

[5] H. B. CURRY- I. J. SCHOENBERG, *On polya frequency functions*, Journal d'Analyse Math., vol. XVIII, 1966.

[6] C. CARASSO, *Méthodes numériques pour l'obtention des fonctions splines*, Thèse de 3e Cycle, Grenoble, 1966.

[7] G. S. KIMELDORF et G. WAHBA, *A correspondance between Bayesian Estimation on Stochastic processes and Smoothing by Splines*, Annals of Math. Stat., 1970, vol. 41.