

J. M. THOMAS

M. CROUZEIX

Éléments finis et problèmes elliptiques dégénérés

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique, tome 7, n^o 3 (1973), p. 77-104.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_3_77_0

© AFCET, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Mathématique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ELEMENTS FINIS ET PROBLEMES ELLIPTIQUES DEGENERES

par M. CROUZEIX (1) et J. M. THOMAS (1)

Communiqué par P.-A. RAVIART

Résumé. — Nous décrivons ici une théorie générale de l'approximation, par la méthode des éléments finis, des problèmes elliptiques dégénérés sur un intervalle borné de \mathbb{R} . Nous donnons des estimations de l'erreur dans des espaces de Sobolev avec poids. Notre méthode permet d'obtenir des schémas de haute précision.

I. INTRODUCTION

Considérons le problème modèle

$$(1.1) \quad -\frac{d}{dx} \left(x^\sigma \frac{du}{dx} \right) + b(x)u(x) = f(x) \quad , \quad 0 < x < 1$$

muni par exemple des conditions aux limites de Dirichlet :

$$(1.2) \quad u(1) = 0 \quad , \quad \text{et} \quad u(0) = 0 \quad \text{si} \quad \sigma < 1$$

Ce problème présente une singularité au point $x = 0$ si $\sigma > 0$. L'approximation numérique de ce problème a d'abord été étudiée par Parter [7] et Jamet [4] au moyen d'une méthode de différences finies; le schéma ainsi obtenu peut en fait être retrouvé au moyen d'une méthode d'éléments finis en utilisant un espace de fonctions affines par morceaux.

Ciarlet, Natterer et Varga [1] ont montré l'intérêt que l'on avait à remplacer l'espace de fonctions affines par un espace adapté à la nature du problème. Leurs résultats ont été généralisés par Dayley et Pierce [3] à des problèmes auto-adjoints d'ordre 2 m.

(1) Analyse Numérique, T. 55, Université de Paris VI.

Notons alors que tous les résultats précédents sont obtenus sous la condition restrictive $0 \leq \sigma < 1$ dans le cas du problème modèle; or il existe de nombreux cas pratiques où cette condition n'est pas vérifiée. C'est le cas en particulier des problèmes elliptiques d'ordre 2 dans R^n qui, lorsqu'ils possèdent une symétrie sphérique, se ramènent au problème modèle (1.1) avec $\sigma = n - 1$.

Le but de cet article est de donner une méthode générale d'approximation par des éléments finis d'une classe de problèmes elliptiques dégénérés contenant le problème modèle quelque soit σ appartenant à R .

Dans le paragraphe 2, nous définissons dans un cadre général le problème d'ordre 2 m considéré et la méthode d'approximation utilisée; le paragraphe 3 étudie l'erreur qui en résulte. Nous décrivons au paragraphe 4 une application de notre méthode à des problèmes dégénérés d'ordre 2, et au paragraphe 5 une application à la résolution des problèmes d'ordre 4 en symétrie sphérique.

Nous nous sommes volontairement limités dans cet article à l'étude des problèmes linéaires. En fait notre méthode permet également de traiter des termes non linéaires du type de ceux considérés par [1] et [3].

II. POSITION DU PROBLEME

a) Notations

Soit Ω un intervalle ouvert borné de R . Toutes les fonctions considérées ici seront définies dans Ω et à valeurs réelles. On considère $(m + 1)$ opérateurs différentiels $\{A_j\}_{j=0, \dots, m}$ de la forme

$$(2.1) \quad A_j = \sum_{k=0}^j \theta_{jk} D^k \quad , \quad 0 \leq j \leq m,$$

où D^k désigne l'opérateur de dérivation $\frac{d^k}{dx^k}$ et où les fonctions θ_{jk} satisfont les hypothèses (2.2), (2.3) et (2.4) :

$$(2.2) \quad D^i \theta_{jk} \in L_{loc}^2(\Omega) \quad , \quad \text{pour tout entier } i \text{ avec } 0 \leq i \leq k \leq j \leq m.$$

$$(2.3) \quad \theta_{0,0} \in C^0(\Omega) \quad \text{et} \quad \theta_{0,0}(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \text{ de } \Omega$$

$$(2.4) \quad \theta_{m,m}(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \text{ de } \Omega$$

Pour les estimations d'erreurs, nous serons amenés à faire une hypothèse supplémentaire ((2.16)).

Pour tout ouvert $\mathcal{O} \subset \Omega$ et pour toute fonction $v \in L_{loc}^2(\mathcal{O})$, l'hypothèse (2.2) permet de définir $A_j v$, $0 \leq j \leq m$, comme la distribution sur \mathcal{O} satisfaisant :

$$(2.5) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}) \quad \langle A_j v, \varphi \rangle = \int_{\mathcal{O}} v A_j^* \varphi \, dx$$

où

$$A_j^* \varphi = \sum_{k=0}^j (-1)^k D^k (\theta_{jk} \varphi)$$

On définit l'espace $W(\mathcal{O})$ par :

$$(2.6) \quad W(\mathcal{O}) = \{ v \mid v \in L^2_{\text{loc}}(\mathcal{O}) \quad ; \quad A_j v \in L^2(\mathcal{O}), 0 \leq j \leq m \}$$

A l'aide des hypothèses (2.2) et (2.3), on vérifie que $W(\mathcal{O})$ est un espace de Hilbert pour la norme

$$(2.7) \quad \|v\|_{\mathcal{O}} = \left(\sum_{j=0}^m \|A_j v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \right)^{1/2}$$

On a $\mathcal{D}(\mathcal{O}) \subset W(\mathcal{O})$; on note

$$(2.8) \quad W_0(\mathcal{O}) = \text{adhérence de } \mathcal{D}(\mathcal{O}) \text{ dans } W(\mathcal{O}).$$

Nous utiliserons les semi-normes

$$(2.9) \quad [v]_{\mathcal{O}} = \left(\sum_{j=0}^{m-1} \|A_j v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \right)^{1/2}$$

$$(2.10) \quad [[v]]_{\mathcal{O}} = \|A_m v\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

La norme dans $W(\mathcal{O})$ s'écrit ainsi :

$$\|v\|_{\mathcal{O}} = ([v]_{\mathcal{O}}^2 + [[v]]_{\mathcal{O}}^2)^{1/2}$$

b) Le problème variationnel

Soit V un sous-espace fermé de $W(\Omega)$ avec

$$(2.11) \quad W_0(\Omega) \subset V \subset W(\Omega)$$

Soit $u, v \mapsto a(u, v)$ une forme bilinéaire continue sur $V \times V$ et V -elliptique; i.e. on suppose qu'il existe deux constantes M et $E > 0$ telles que :

$$(2.12) \quad \forall u, v \in V \quad |a(u, v)| \leq M \|u\|_{\Omega} \|v\|_{\Omega}$$

$$(2.13) \quad \forall v \in V \quad a(v, v) \geq E \|v\|_{\Omega}^2$$

On désigne par V' le dual de V et note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualité entre V et V' . Étant donné $f \in V'$, on étudie le problème

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in V & \text{vérifiant} \\ \forall v \in V & a(u, v) = \langle f, v \rangle. \end{cases}$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (P) admet une solution et une seule. Nous nous intéressons ici à l'approximation numérique de cette solution.

c) Le problème approché

Soit $x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_{N+1}$ une subdivision de $\Omega =]x_0, x_{N+1}[$. On note $\Omega_i =]x_i, x_{i+1}[$; $h_i = x_{i+1} - x_i$ et $h = \max_{i=0, \dots, N} h_i$.

Pour tout entier i , $0 \leq i \leq N$, on se donne un sous-espace \mathcal{F}_i de fonctions définies sur Ω_i et de dimension finie p_i . On considère l'espace

$$(2.14) \quad V_h = \{ v_h \mid v_h \in V \quad ; \quad A_m^* A_m v_h^{(i)} \in \mathcal{F}_i, \quad 0 \leq i \leq N \}$$

où $v_h^{(i)}$ désigne la restriction à Ω_i de la fonction v_h définie sur Ω . Les hypothèses (2.2) et (2.4) entraînent que V_h est un sous-espace de V de dimension finie $(\leq 2mN + \sum_{i=0}^N p_i)$. Nous prenons pour problème approché de (P) le problème

$$(P_h) \quad \begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ vérifiant} \\ \forall v_h \in V_h \quad a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle \end{cases}$$

Ce problème (P_h) admet une solution u_h et une seule; on a la majoration classique d'erreur dans V :

$$(2.15) \quad \|u_h - u\|_{\Omega} \leq \frac{M}{E} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{\Omega}.$$

Au paragraphe suivant, nous évaluerons les erreurs $\|u_h - u\|_{\Omega}$ et $[u_h - u]_{\Omega}$. Pour cela on suppose que les opérateurs $\{A_j\}$ vérifient, outre les hypothèses (2.1) à (2.4), l'hypothèse fondamentale suivante :

$$(2.16) \quad \begin{cases} \text{Pour tout ouvert } \Omega_i, 0 \leq i \leq N, \text{ il existe une} \\ \text{constante } C(\Omega_i) > 0 \text{ telle que :} \\ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega_i) \quad [v]_{\Omega_i} \leq C(\Omega_i) \|[v]\|_{\Omega_i} \end{cases}$$

Cette hypothèse (2.16) exprime que sur $W_0(\Omega_i)$, $\|[v]\|_{\Omega_i}$ est une norme équivalente à $\|v\|_{\Omega_i}$. Insistons sur le fait que l'hypothèse (2.16) doit être vérifiée sur tout ouvert Ω_i de la subdivision mais non sur Ω tout entier. Dans les exemples, nous majorerons $C(\Omega_i)$ en fonction de h_i , longueur de Ω_i .

III. MAJORATION D'ERREUR

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on ne distinguera plus la fonction u définie sur Ω de sa restriction $u^{(i)}$ à Ω_i .

a) Définition de $r_h u$

Lemme 1 : Soit $u \in V$, il existe une fonction $r_h u \in V_h$ et une seule vérifiant dans tout Ω_i , $0 \leq i \leq N$:

$$(3.1) \quad \begin{cases} u - r_h u \in W_0(\Omega_i) \\ [[u - r_h u]]_{\Omega_i} = \inf_{\{w_h | u - w_h \in W_0(\Omega_i); A_m^* A_m w_h \in \mathcal{F}_i\}} [[u - w_h]]_{\Omega_i} \end{cases}$$

Démonstration : D'après l'hypothèse (2.16), $v \mapsto [[v]]_{\Omega_i}$ est une norme sur $W_0(\Omega_i)$. Nous notons $[[u, v]]_{\Omega_i}$ le produit scalaire associé à cette norme. Soit :

$$W_{0h}(\Omega_i) = \{ v_h \mid v_h \in W_0(\Omega_i) \quad ; \quad A_m^* A_m v_h \in \mathcal{F}_i \}$$

A la fonction $u \in V$ nous pouvons associer $u_i \in W_0(\Omega_i)$ (resp. $u_{ih} \in W_{0h}(\Omega_i)$) projection orthogonale de u dans $W_0(\Omega_i)$ (resp. dans $W_{0h}(\Omega_i)$) :

$$(3.3) \quad [[u - u_i, v]]_{\Omega_i} = 0 \quad , \quad \text{pour tout } v \in W_0(\Omega_i).$$

$$(3.4) \quad [[u - u_{ih}, v_h]]_{\Omega_i} = 0 \quad , \quad \text{pour tout } v_h \in W_{0h}(\Omega_i)$$

Définissons la fonction $r_h u$ dans tout Ω_i , $0 \leq i \leq N$, par :

$$r_h u = u - u_i + u_{ih} \quad , \quad \text{dans } \Omega_i$$

Dans tout Ω_i , on a $u - r_h u \in W_0(\Omega_i)$, d'où par recollement $u - r_h u \in W_0(\Omega)$, donc $r_h u \in V$. D'autre part (3.3) implique $A_m^* A_m (u - u_i) = 0$, au sens des distributions sur Ω_i , d'où $A_m^* A_m (r_h u)^{(i)} = A_m^* A_m u_{ih} \in \mathcal{F}_i$, pour tout i , $0 \leq i \leq N$. La fonction $r_h u$ ainsi construite appartient donc à l'espace V_h . Elle vérifie pour tout $v \in W(\Omega_i)$

$$[[u - r_h u, v]]_{\Omega_i} = [[u_i - u_{ih}, v]]_{\Omega_i}$$

donc pour tout $v_h \in W_{0h}(\Omega_i)$, en utilisant (3.3) et (3.4)

$$(3.5) \quad [[u - r_h u, v_h]]_{\Omega_i} = 0.$$

La propriété (3.5) équivaut à :

$$[[u - r_h u]]_{\Omega_i} \leq [[u - r_h u + v_h]]_{\Omega_i} \quad , \quad \text{pour tout } v_h \in W_{0h}(\Omega_i).$$

Ainsi la fonction $r_h u$ satisfait (3.1). D'autre part l'unicité de $r_h u$ est évidente d'après (2.16).

Lemme 2 : Soit $u \in V$ et soit $r_h u$ la fonction de V_h définie par le lemme 1. On a dans tout Ω_i , $0 \leq i \leq N$:

$$(3.6) \quad [[u - r_h u]]_{\Omega_i} = \inf_{v_h \in V_h} [[u - v_h]]_{\Omega_i}$$

Démonstration : Comme $r_h u \in V_h$, la propriété (3.6) équivaut à

$$(3.7) \quad [[u - r_h u, v_h]]_{\Omega_i} = 0 \quad , \quad \text{pour tout } v_h \text{ de } V_h.$$

A v_h , élément quelconque de V_h , nous pouvons associer v_{hi} , projection orthogonale de v_h dans $W_0(\Omega_i)$ pour le produit scalaire $[[\cdot, \cdot]]_{\Omega_i}$:

$$(3.8) \quad [[v_h - v_{hi}, v]]_{\Omega_i} = 0 \quad , \quad \text{pour tout } v \in W_0(\Omega_i).$$

On a $A_m^* A_m v_{hi} = A_m^* A_m v_h \in \mathcal{F}_i$, d'où $v_{hi} \in W_{0h}(\Omega_i)$.

On peut donc prendre dans (3.5) : $v_h = v_{hi}$, d'où

$$(3.9) \quad [[u - r_h u, v_{hi}]]_{\Omega_i} = 0$$

D'autre part comme $u - r_h u \in W_0(\Omega_i)$, on peut prendre dans (3.8) $v = u - r_h u$, d'où

$$(3.10) \quad [[u - r_h u, v_h - v_{hi}]]_{\Omega_i} = 0$$

(3.7) résulte de (3.9) et (3.10).

d) **Erreur** $\|u_h - u\|_{\Omega}$

On désigne par $W^{-1}(\Omega_i)$ le dual de $W_0(\Omega_i)$.

Lemme 3 : Soit X_i un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{X_i}$; on suppose

$$(3.11) \quad X_i \subset W^{-1}(\Omega_i) \quad \text{avec injection continue.}$$

Soit $u \in V$; soit $r_h u$ la fonction de V_h définie par le lemme 1. Si $A_m^* A_m u \in X_i$, on a la majoration :

$$(3.12) \quad [[u - r_h u]]_{\Omega_i} \leq L_{X_i} \inf_{p \in \mathcal{F}_i \cap X_i} \|A_m^* A_m u - p\|_{X_i}$$

où

$$(3.13) \quad L_{X_i} = \sup_{\{v \in W_0(\Omega_i); v \neq 0; A_m^* A_m v \in X_i\}} \frac{[[v]]_{\Omega_i}}{\|A_m^* A_m v\|_{\Omega_i}}$$

Démonstration : L'hypothèse (3.11) assure $L_{X_i} < +\infty$. Soit p une fonction quelconque de l'espace vectoriel $\mathcal{F}_i \cap X_i$. D'après (2.16) et (3.11), il existe une fonction v_p (unique) telle que :

$$\begin{cases} u - v_p \in W_0(\Omega_i) \\ \forall w \in W_0(\Omega_i) \quad [[v_p, w]]_{\Omega_i} = \int_{\Omega_i} p w \, dx \end{cases}$$

Cette fonction v_p vérifie $A_m^* A_m v_p = p \in \mathcal{F}_i$. En appliquant le lemme 1 avec $w_h = v_p$, on obtient

$$[[u - r_h u]]_{\Omega_i} \leq [[u - v_p]]_{\Omega_i}.$$

D'où par définition de L_{X_i} :

$$[[u - r_h u]]_{\Omega_i} \leq L_{X_i} \|A_m^* A_m (u - v_p)\|_{X_i}$$

Soit pour tout $p \in \mathcal{F}_i \cap X_i$

$$[[u - r_h u]]_{\Omega_i} \leq L_{X_i} \|A_m^* A_m u - p\|_{X_i}$$

ce qui démontre le lemme 3.

Théorème 1

Soit u la solution de (P); soit u_h la solution de (P_h). On suppose que la solution u vérifie :

$$A_m^* A_m u^{(i)} \in X_i \quad 0 \leq i \leq N$$

où les X_i sont des espaces de Banach satisfaisant (3.11). Alors on a

$$(3.14) \quad \|u_h - u\|_{\Omega} \leq \frac{M}{E} \text{Max}_{i=0, \dots, N} \{ (1 + C(\Omega_i)) L_{X_i} \} R(u, X, \mathcal{F})$$

avec

$$(3.15) \quad R(u, X, \mathcal{F}) = \left(\sum_{i=0}^N \text{Inf}_{p \in \mathcal{F}_i \cap X_i} \|A_m^* A_m u - p\|_{X_i}^2 \right)^{1/2}$$

Démonstration

D'après (2.15), on a

$$\|u_h - u\|_{\Omega} \leq \frac{M}{E} \|u - r_h u\|_{\Omega}$$

D'après l'hypothèse (2.16), on a

$$\|u - r_h u\|_{\Omega}^2 \leq \sum_{i=0}^N (1 + C^2(\Omega_i)) [[u - r_h u]]_{\Omega_i}^2$$

D'après le lemme 3, on obtient ainsi :

$$\|u_h - u\|_{\Omega}^2 \leq \frac{M^2}{E^2} \sum_{i=0}^N (1 + C^2(\Omega_i)) L_{X_i}^2 \text{Inf}_{p \in \mathcal{F}_i \cap X_i} \|A_m^* A_m u - p\|_{X_i}^2$$

d'où le résultat (3.14).

c) **Un critère de convergence**

Soit $\{S_h\}$ une suite de subdivision de Ω : $\Omega = \bigcup_{\Omega_i \in S_h} \Omega_i$, avec

$$h = \text{Max}_{\Omega_i \in S_h} (\text{diam}(\Omega_i)).$$

On note

$$c_h = \text{Max}_{\Omega_i \in S_h} C(\Omega_i)$$

Théorème 2

Soit $\mathcal{U} = \left\{ v \mid v \in V; \frac{1}{\theta_{0,0}} A_m^* A_m v \in L^2(\Omega) \right\}$. On suppose que :

$$(3.16) \quad \mathcal{U} \text{ est dense dans } V.$$

On suppose d'autre part que :

$$(3.17) \quad \lim_{h \rightarrow 0} c_h = 0.$$

Alors si u est la solution de (P) et u_h la solution de (P_h), on a :

$$(3.18) \quad \lim_{h \rightarrow 0} u_h = u \quad \text{dans } V \text{ (fort).}$$

Démonstration

D'après l'hypothèse (3.16), il suffit d'établir la convergence de u_h vers u pour $u \in \mathcal{U}$. Soit donc $u \in \mathcal{U}$. Posons pour tout $i, i = 0, \dots, N$:

$$(3.19) \quad \begin{cases} X_i = \left\{ v \mid \frac{1}{\theta_{0,0}} v \in L^2(\Omega_i) \right\} \\ \|v\|_{X_i} = \left\| \frac{1}{\theta_{0,0}} v \right\|_{L^2(\Omega_i)} \end{cases}$$

Quel que soit le choix des espaces \mathcal{F}_i , on a $p = 0 \in \mathcal{F}_i \cap X_i$; d'où

$$R(u, X, \mathcal{F}) \leq \left\| \frac{1}{\theta_{0,0}} A_m^* A_m u \right\|_{L^2(\Omega)}$$

Évaluons, pour le choix (3.19), la constante L_{X_i} : si $v \in W_0(\Omega_i)$ avec $\frac{1}{\theta_{0,0}} A_m^* A_m v \in L^2(\Omega_i)$, on a

$$\begin{aligned} [[v]]_{\Omega_i}^2 &= \int_{\Omega_i} A_m v A_m v \, dx \\ &= - \int_{\Omega_i} v A_m^* A_m v \, dx \\ [[v]]_{\Omega_i}^2 &\leq \| \theta_{0,0} v \|_{L^2(\Omega_i)} \left\| \frac{1}{\theta_{0,0}} A_m^* A_m v \right\|_{L^2(\Omega_i)} \end{aligned}$$

Comme

$$\|\theta_{0,0}v\|_{L^2(\Omega_i)} \leq [v]_{\Omega_i} \leq C(\Omega_i)[[v]]_{\Omega_i}$$

On en déduit que pour tout $v \in W_0(\Omega_i)$ avec $\frac{1}{\theta_{0,0}} A_m^* A_m v \in L^2(\Omega_i)$, on a

$$[[v]]_{\Omega_i} \leq c(\Omega_i) \left\| \frac{1}{\theta_{0,0}} A_m^* A_m v \right\|_{L^2(\Omega_i)}$$

Pour le choix (3.19), on a donc :

$$(3.20) \quad L_{xi} \leq C(\Omega_i).$$

D'après le théorème 1, on en déduit pour $u \in \mathcal{U}$

$$\|u_h - u\|_{\Omega} \leq \frac{M}{E} c_h(1 + c_h) \left\| \frac{1}{\theta_{0,0}} A_m^* A_m u \right\|_{L^2(\Omega)}$$

ce qui démontre le théorème 2, sous l'hypothèse (3.17).

b) Erreur $[u_h - u]_{\Omega}$

Dans ce paragraphe, nous faisons l'hypothèse supplémentaire suivante : $a(u, v)$ peut se mettre sous la forme :

$$(3.21) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} a(x) A_m u A_m v \, dx + b(u, v)$$

avec

$$(3.22) \quad a(x) \in W^{1,\infty}(\Omega) \quad , \quad \text{i.e.} \quad a(x) \in L^{\infty}(\Omega) \text{ et } \frac{da}{dx}(x) \in L^{\infty}(\Omega)$$

et

$$(3.23) \quad |b(u, v)| \leq M_1 [u]_{\Omega} \|v\|_{\Omega}, \text{ pour tout } u \text{ et } v \text{ de } V.$$

La forme $a(u, v)$ est alors évidemment continue sur $V \times V$. Nous la supposons encore V -elliptique : pour tout $v \in V$

$$(3.24) \quad a(v, v) \geq E \|v\|_{\Omega}^2.$$

Lemme 4

Soit u la solution de (P); soit u_h la solution de (P_h).

On a :

$$(3.25) \quad E \|u_h - r_h u\|_{\Omega} \leq M_1 [u - r_h u]_{\Omega} + \frac{h}{2} \|Da\|_{L^{\infty}(\Omega)} [[u - r_h u]]_{\Omega}.$$

Démonstration

On écrit, pour tout $v_h \in V_h$

$$\begin{aligned} a(u_h - r_h u, v_h) &= a(u - r_h u, v_h) \\ &= \sum_{i=0}^N \int_{\Omega_i} a(x) A_m(u - r_h u) A_m v_h \, dx + b(u - r_h u, v_h) \end{aligned}$$

D'après le lemme 2, on a :

$$\int_{\Omega_i} a(x) A_m(u - r_h u) A_m v_h \, dx \leq \frac{h_i}{2} \|Da\|_{L^\infty(\Omega)} [[u - r_h u]]_{\Omega_i} [[v_h]]_{\Omega_i}$$

d'où par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de (3.23) :

$$a(u_h - r_h u, v_h) \leq \frac{h}{2} \|Da\|_{L^\infty(\Omega)} [[u - r_h u]]_{\Omega} [[v_h]]_{\Omega} + M_1 [u - r_h u]_{\Omega} \|v_h\|_{\Omega}$$

Prenons $v_h = u_h - r_h u$; d'après la V -ellipticité, on a

$$E \|u_h - r_h u\|_{\Omega}^2 \leq \frac{h}{2} \|Da\|_{L^\infty(\Omega)} [[u - r_h u]]_{\Omega}^2 + M_1 [u - r_h u]_{\Omega} \|u - r_h u\|_{\Omega}.$$

Théorème 3

On suppose que la forme $a(u, v)$ vérifie les hypothèses (3.21), ..., (3.24). Soit u la solution de (P); soit u_h la solution de (P_h). On suppose que la solution u vérifie

$$A_m^* A_m u^{(i)} \in X_i \quad 0 \leq i \leq N$$

où les X_i sont des espaces de Banach satisfaisant (3.11). Alors il existe une constante C , qui ne dépend que de M_1 et de E , telle que

$$(3.26) \quad [u_h - u]_{\Omega} \leq C \operatorname{Max}_{i=0, \dots, N} \{ (h \|Da\|_{L^\infty(\Omega)} + C(\Omega_i)) L_{X_i} \} R(u, X, \mathfrak{F})$$

avec $R(u, X, \mathfrak{F})$ donné par (3.15).

Démonstration

De l'inégalité triangulaire :

$$[u - u_h]_{\Omega} \leq [u - r_h u]_{\Omega} + [u_h - r_h u]_{\Omega}$$

on déduit, d'après le lemme 4 :

$$[u - u_h]_{\Omega} \leq \left(1 + \frac{M_1}{E} \right) [u - r_h u]_{\Omega} + \frac{h}{2E} \|Da\|_{L^\infty(\Omega)} [[u - r_h u]]_{\Omega}.$$

Or, d'après le lemme 3 :

$$\begin{aligned} [[u - r_h u]]_{\Omega} &\leq \text{Max}_{i=0, \dots, N} L_{X_i} R(u, X, \mathcal{F}), \\ [u - r_h u]_{\Omega} &\leq \text{Max}_{i=0, \dots, N} \{ C(\Omega_i) L_{X_i} \} R(u, X, \mathcal{F}), \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème 3.

La même technique fournit sans difficulté la généralisation suivante :

Théorème 3 bis

Soit \mathcal{N} une semi-norme continue sur V . Sous les hypothèses du théorème précédent, il existe une constante C telle que :

$$\mathcal{N}(u_h - u) \leq \mathcal{N}(u - r_h u) + C \text{Max}_{i=0, \dots, N} \{ (h \|Da\|_{L^\infty(\Omega)} + C(\Omega_i)) L_{X_i} \} R(u, X, \mathcal{F}),$$

IV. 1^{re} APPLICATION : PROBLEMES DEGENERES ELLIPTIQUES DU SECOND ORDRE

a) Résultats généraux

Pour alléger les notations, nous prendrons ici $\Omega =]0, 1[$. Nous ne considérons que des subdivisions de Ω telles que $h \leq \frac{1}{2}$ (ce qui du point de vue pratique n'est guère restreignant !).

Nous ferons appel au lemme technique suivant :

Lemme 5

Soit φ et Ψ deux fonctions continues sur Ω vérifiant :

$$(4.1) \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) > 0 \quad \text{et} \quad \Psi(x) > 0 \quad , \text{ pour tout } x \text{ avec } 0 < x < 1 \\ \varphi(x) \sim K_0 x^{\alpha_0} \quad \text{et} \quad \Psi(x) \sim K'_0 x^{\alpha'_0} \quad , \text{ au voisinage de } x = 0 \\ \varphi(x) \sim K_1 (1-x)^{\alpha_1} \quad \text{et} \quad \Psi(x) \sim K'_1 (1-x)^{\alpha'_1} \quad , \text{ au voisinage de } x = 1 \\ \text{avec pour } \nu = 0, 1 \quad \alpha_\nu - 2 \leq \alpha'_\nu \leq \alpha_\nu \quad \text{et} \quad (\alpha_\nu, \alpha'_\nu) \neq (+1, -1). \end{array} \right.$$

Alors il existe une constante C , indépendante de $\Omega_i =]x_i, x_{i+1}[$ telle que

$$(4.2) \quad \|\sqrt{\Psi}v\|_{L^2(\Omega_i)} \leq Ch_i \frac{\Psi(x_{i+1/2})}{\varphi(x_{i+1/2})} \|\sqrt{\varphi}Dv\|_{L^2(\Omega_i)} \text{ pour tout } v \in \mathcal{D}(\Omega_i) \text{ avec}$$

$$x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}).$$

Démonstration

Soit F une primitive de Ψ' . On a pour toute fonction $v \in \mathcal{D}(\Omega_i)$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \Psi'(x)v^2(x) dx = -2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x)v(x)Dv(x) dx ;$$

d'où, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \Psi'(x)v^2(x) dx \leq 4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{F^2(x)}{\Psi'(x)} (Dv(x))^2 dx.$$

Pour démontrer le lemme 5, il suffit de démontrer qu'une primitive F de Ψ' peut être choisie de sorte que :

$$(4.3) \quad \text{Sup}_{x_i < x < x_{i+1}} \frac{F^2(x)}{\varphi(x)\Psi'(x)} \leq Ch_i^2 \frac{\Psi'(x_{i+1/2})}{\varphi(x_{i+1/2})} \quad , \quad \text{avec } C \text{ constante}$$

indépendante de Ω_i .

Pour des raisons de symétrie, nous ne montrons (4.3) que dans le cas où $x_{i+1/2} \leq \frac{1}{2}$. Comme par hypothèse, $h_i \leq \frac{1}{2}$, on a $\Omega_i \subset]0, \frac{3}{4}[$. Il suffit alors

de montrer (4.3) pour $\varphi(x) = x^\alpha$ et $\Psi'(x) = x^{\alpha'}$, avec $\alpha = \alpha_0$ et $\alpha' = \alpha'_0$. Lorsque $x_i \geq h_i$, le résultat est immédiat. Étudions le cas où $x_i < h_i$ et $\alpha' \neq -1$ (on procède de façon analogue lorsque $\alpha' = -1$, donc $\alpha < 1$). En prenant pour primitive de Ψ' la fonction F :

$$F(x) = \frac{1}{1 + \alpha'} x^{1+\alpha'}$$

on a, puisque $2 - \alpha + \alpha' \geq 0$:

$$\begin{aligned} \text{Sup}_{x_i < x < x_{i+1}} \frac{F^2(x)}{\varphi(x)\Psi'(x)} &= \frac{1}{(1 + \alpha')^2} x_{i+1}^{2-\alpha+\alpha'} \\ &\leq \frac{2^{2-\alpha+\alpha'}}{(1 + \alpha')^2} x_{i+1/2}^{2-\alpha+\alpha'} \end{aligned}$$

et comme $x_{i+1/2} \leq \frac{3}{2} h_i$

$$\text{Sup}_{x_i < x < x_{i+1}} \frac{F^2(x)}{\varphi(x)\Psi'(x)} \leq Ch_i^2 \frac{\Psi'(x_{i+1/2})}{\varphi(x_{i+1/2})}$$

Soient φ et Ψ' deux fonctions continues sur $\Omega =]0,1[$ vérifiant les hypothèses (4.1); on suppose en outre

$$(4.4) \quad D\varphi \in L_{loc}^2(\Omega).$$

Nous considérons l'espace

$$(4.5) \quad W(\Omega) = \{ v \mid v \in L^2_{loc}(\Omega) ; \sqrt{\Psi}v \in L^2(\Omega) ; \sqrt{\varphi}Dv \in L^2(\Omega) \}$$

Cet espace est muni de la norme hilbertienne :

$$\|v\|_{\Omega} = (\|\sqrt{\Psi}v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sqrt{\varphi}Dv\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}$$

Nous sommes donc dans le cas particulier du cadre donné en II lorsque :

$$m = 1 \quad ; \quad A_0 = \sqrt{\Psi}D^0 \quad ; \quad A_1 = \sqrt{\varphi}D.$$

$$[v]_{\Omega} = \|\sqrt{\Psi}v\|_{L^2(\Omega)} \quad ; \quad [[v]]_{\Omega} = \|\sqrt{\varphi}v\|_{L^2(\Omega)}$$

Soit V un sous-espace fermé de $W(\Omega)$ avec $\mathcal{D}(\Omega) \subset V \subset W(\Omega)$. Nous considérons le problème :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Étant donné } f \in V', \text{ trouver } u \in V \text{ vérifiant } \forall v \in V \\ \int_0^1 a(x)\varphi(x)Du(x)Dv(x) dx + \int_0^1 b(x)\Psi(x)u(x)v(x) dx = \langle f, v \rangle. \end{array} \right.$$

On suppose

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \in W^{1,\infty}(\Omega) \\ b \in L^{\infty}(\Omega) \\ \forall v \in V \int_0^1 a(x)\varphi(x)(Dv(x))^2 dx + \int_0^1 b(x)\Psi(x)v^2(x) dx \geq E \|v\|_{\Omega}^2, \end{array} \right. \quad (E > 0).$$

Le problème (P) admet une solution unique qui vérifie formellement l'équation

$$-D(a\varphi Du) + b\Psi u = f \quad , \quad \text{dans }]0,1[;$$

ainsi que des conditions aux limites liées aux choix de V .

Notre problème approché dans V_h , sous-espace de dimension finie de V , est :

$$(P_h) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ vérifiant} \quad : \quad \forall v_h \in V_h \\ \int_0^1 a(x)\varphi(x)Du_h(x)Dv_h(x) dx + \int_0^1 b(x)\Psi(x)u_h(x)v_h(x) dx = \langle f, v_h \rangle \end{array} \right.$$

Nous obtiendrons différentes méthodes d'éléments finis suivant le choix de l'espace V_h , c'est-à-dire suivant le choix des espaces \mathcal{F}_i . D'après le lemme 5, l'hypothèse fondamentale (2.16) est satisfaite avec :

$$(4.7) \quad C(\Omega_i) = Ch_i \frac{\Psi(x_{i+1/2})}{\varphi(x_{i+1/2})}$$

Dans les exemples qui suivent, nous utiliserons le résultat classique suivant (cf. par exemple Ciarlet-Raviart [2]) :

Lemme 6

Soit k un entier ≥ 0 ; on désigne par P_{k-1} l'espace des polynômes de degré $\leq (k-1)$ ($P_{-1} = \{0\}$). Il existe une constante C , qui ne dépend que de k , telle que pour tout v de l'espace de Sobolev

$$H^k(\Omega_i) = \{v \mid D^j v \in L^2(\Omega_i), 0 \leq j \leq k\}$$

on ait

$$(4.8) \quad \inf_{p \in P_{k-1}} \|v - p\|_{L^2(\Omega_i)} \leq Ch_i^k \|D^k v\|_{L^2(\Omega_i)}$$

Donnons deux choix caractéristiques d'espaces V_h ; k est un entier ≥ 0 fixé.

Choix 1 : On prend pour espace V_h :

$$(4.9) \quad V_h = \left\{ v_h \mid v_h \in V ; \frac{1}{\sqrt{\Psi}} D(\varphi Dv_h^{(i)}) \in P_{k-1}, 0 \leq i \leq N \right\}$$

Théorème 4

On suppose que la solution u de (P) vérifie pour un certain entier l , $0 \leq l \leq k$:

$$(4.10) \quad \frac{1}{\sqrt{\Psi}} D(\varphi Du) \in H^l(\Omega)$$

Alors la solution u_h de (P_h) obtenue avec le choix (4.9) de V_h vérifie :

$$(4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\sqrt{\Psi}(u_h - u)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{l+2(1-\sigma)} \left\| D^l \left(\frac{1}{\sqrt{\Psi}} D(\varphi Du) \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ \|\sqrt{\varphi} D(u_h - u)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{l+1-\sigma} \left\| D^l \left(\frac{1}{\sqrt{\Psi}} D(\varphi Du) \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \end{array} \right.$$

avec

$$(4.12) \quad \sigma = \frac{1}{2} \text{Max} (\alpha_0 - \alpha'_0, \alpha_1 - \alpha'_1).$$

Démonstration

Avec les notations de II et III, le choix (4.9) équivaut à :

$$\mathfrak{F}_i = \left\{ g \mid \frac{1}{\sqrt{\Psi}} g \in P_{k-1} \right\}, \quad 0 \leq i \leq N.$$

Pour le calcul d'erreur nous prenons ici :

$$(4.13) \quad \begin{cases} X_i = \left\{ g \mid \frac{1}{\sqrt{\Psi}} g \in L^2(\Omega_i) \right\} & , \quad 0 \leq i \leq N \\ \|g\|_{X_i} = \left\| \frac{1}{\sqrt{\Psi}} g \right\|_{L^2(\Omega_i)} \end{cases}$$

On a évidemment $\mathfrak{F}_i \subset X_i$ et :

$$\inf_{g \in \mathfrak{F}_i \cap X_i} \|A_1 A_1^* u - g\|_{X_i} = \inf_{p \in P_{k-1}} \left\| \frac{1}{\sqrt{\Psi}} D(\varphi Du) - p \right\|_{L^2(\Omega_i)}$$

D'après l'hypothèse (4.10) et le lemme 6, il existe une constante C (qui ne dépend que de l) telle que

$$\inf_{p \in P_{k-1}} \left\| \frac{1}{\sqrt{\Psi}} D(\varphi Du) - p \right\|_{L^2(\Omega_i)} \leq Ch_i^l \left\| D^l \left(\frac{1}{\sqrt{\Psi}} D(\varphi Du) \right) \right\|_{L^2(\Omega_i)}$$

D'où

$$R(u, X, \mathfrak{F}) \leq Ch^l \left\| D^l \left(\frac{1}{\sqrt{\Psi}} D(\varphi Du) \right) \right\|_{L^2(\Omega)}$$

D'autre part, d'après le lemme 5, il existe une constante C (indépendante de Ω_i) telle que :

$$C(\Omega_i) \leq Ch^{1-\sigma} \quad , \quad 0 \leq i \leq N$$

Enfin nous avons montré que pour le choix (4.13) de X_i , on a (cf. (3.20)) :

$$L_{X_i} \leq C(\Omega_i)$$

L'application des théorèmes 1 et 3 fournit alors les majorations (4.11).

Choix 2

On prend pour espace V_h :

$$(4.14) \quad V_h = \left\{ v_h \mid v_h \in V ; \frac{\sqrt{\Psi}}{\varphi} D(\varphi Dv_h^{(l)}) \in P_{k-1} \quad , \quad 0 \leq i \leq N \right\} .$$

Théorème 5

On suppose que la solution u de (P) vérifie pour un certain entier l , $0 \leq l \leq k$:

$$(4.15) \quad \frac{\sqrt{\Psi}}{\varphi} D(\varphi Du) \in H^l(\Omega) .$$

Alors la solution u_h de P_h obtenue avec le choix (4.14) de V_h vérifie :

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \|\sqrt{\overline{\Psi}}(u_h - u)\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^{l+2} \left\| D^l \left(\frac{\sqrt{\overline{\Psi}}}{\varphi} D(\varphi Du) \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ \|\sqrt{\varphi} D(u_h - u)\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^{l+1} \left\| D^l \left(\frac{\sqrt{\overline{\Psi}}}{\varphi} D(\varphi Du) \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Démonstration

Le choix (4.14) équivaut à :

$$\mathcal{F}_i = \left\{ g \mid \frac{\sqrt{\overline{\Psi}}}{\varphi} g \in P_{k-1} \right\}, \quad 0 \leq i \leq N.$$

En prenant

$$(4.17) \quad \begin{cases} X_i = \left\{ g \mid \frac{\sqrt{\overline{\Psi}}}{\varphi} g \in L^2(\Omega_i) \right\}, & 0 \leq i \leq N, \\ \|g\|_{X_i} = \left\| \frac{\sqrt{\overline{\Psi}}}{\varphi} g \right\|_{L^2(\Omega_i)}; \end{cases}$$

Nous obtenons d'après l'hypothèse (4.15) :

$$R(u, X, \mathcal{F}) \leq Ch^l \left\| D^l \left(\frac{\sqrt{\overline{\Psi}}}{\varphi} D(\varphi Du) \right) \right\|_{L^2(\Omega)}$$

D'après le lemme 5, on peut choisir

$$C(\Omega_i) = Ch_i \sqrt{\frac{\overline{\Psi}(x_{i+1/2})}{\varphi(x_{i+1/2})}}$$

Les majorations (4.16) du théorème 5 s'obtiennent alors par application des théorèmes 1 et 3 et du lemme suivant :

Lemme 7

Soit X_i l'espace de Banach défini en (4.17). Il existe une constante C indépendante de Ω_i telle que

$$(4.18) \quad L_{X_i} \leq Ch_i \sqrt{\frac{\varphi(x_{i+1/2})}{\overline{\Psi}(x_{i+1/2})}}$$

Démonstration

Soit $v \in W_0(\Omega_i)$ avec $\frac{\sqrt{\overline{\Psi}}}{\varphi} D(\varphi Dv) \in L^2(\Omega_i)$. on a :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x) (Dv(x))^2 dx = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x) D(\varphi Dv)(x) dx$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit :

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\varphi}Dv\|_{L^2(\Omega_i)} &\leq \left(\sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} \frac{\varphi(x)}{\Psi(x)} \right) \|\sqrt{\Psi}v\|_{L^2(\Omega_i)} \left\| \frac{\sqrt{\Psi}}{\varphi} D(\varphi Dv) \right\|_{L^2(\Omega_i)} \\ \|\sqrt{\varphi}Dv\|_{L^2(\Omega_i)} &\leq C \frac{\varphi(x_{i+1/2})}{\Psi(x_{i+1/2})} C(\Omega_i) \left\| \frac{\sqrt{\Psi}}{\varphi} D(\varphi Dv) \right\|_{L^2(\Omega_i)} \end{aligned}$$

D'où, d'après (4.7)

$$\|\sqrt{\varphi}Dv\|_{L^2(\Omega_i)} \leq Ch_i \sqrt{\frac{\varphi(x_{i+1/2})}{\Psi(x_{i+1/2})}} \left\| \frac{\sqrt{\Psi}}{\varphi} D(\varphi Dv) \right\|_{L^2(\Omega_i)}$$

ce qui démontre (4.18).

b) Exemple

Nous précisons les résultats obtenus sur l'exemple simple suivant :

$$(4.19) \quad \begin{cases} \Omega =]0,1[\\ \varphi(x) = x^\alpha & , \quad 0 \leq \alpha \leq 2 \\ \Psi(x) = 1 \end{cases}$$

$$W(0,1) = \{ v \mid v \in L^2(0,1) \quad , \quad x^{-\alpha/2}v \in L^2(0,1) \}.$$

Pour $0 \leq \alpha < 1$, on a :

$$W(0,1) \subset C^0[0,1]$$

Pour $1 \leq \alpha \leq 2$, les fonctions de $W(0,1)$ sont continues dans $]0,1[$, mais non nécessairement bornées au voisinage de $x = 0$. Les hypothèses (4.1) et (4.4) sur φ et Ψ sont satisfaites. On a :

$$C[]x_i, x_{i+1}[) = Ch_i x_{i+1/2}^{-\alpha/2}$$

Soit

$$(4.20) \quad V = W_0(0,1) \quad , \quad \text{adhérence de } \mathcal{D}(]0,1[) \text{ dans } W(0,1).$$

On a la caractérisation suivante de V :

$$V = \{ v \mid v \in W(0,1) \quad ; \quad v(0) = v(1) = 0 \}, \quad \text{si } 0 \leq \alpha < 1$$

$$V = \{ v \mid v \in W(0,1) \quad ; \quad v(1) = 0 \} \quad , \quad \text{si } 1 \leq \alpha \leq 2.$$

Soit :

$$(4.21) \quad \begin{cases} a \in W^{1,\infty}(0,1) & , \quad a(x) \geq e > 0 & \text{pour tout } 0 \leq x \leq 1. \\ b \in L^\infty(0,1) & , \quad b(x) \geq 0 & \text{p.p. en } x \in]0,1[. \end{cases}$$

Proposition 1

Si la solution u de (P) vérifie pour un certain entier l , $0 \leq l \leq k$,

$$(4.25) \quad D(x^\alpha Du) \in H^l(0, 1),$$

alors la solution u_h de (P_h) obtenue avec le choix (4.24) de V_h satisfait :

$$(4.26) \quad \begin{cases} \|u_h - u\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^{l+2-\alpha} \|D^{l+1}(x^\alpha Du)\|_{L^2(0,1)} \\ \|x^{\alpha/2} D(u_h - u)\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^{l+1-\alpha/2} \|D^{l+1}(x^\alpha Du)\|_{L^2(0,1)} \end{cases}$$

On a en outre :

$$(4.27) \quad \begin{cases} \text{Max}_{i=1, \dots, N} |x_i^{\frac{\alpha-1}{2}} (u_h(x_i) - u(x_i))| \leq Ch^{l+2-\alpha} \|D^{l+1}(x^\alpha Du)\|_{L^2(0,1)}, & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \text{Max}_{i=1, \dots, N} |x_i^\varepsilon (u_h(x_i) - u(x_i))| \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} h^{l+1} \|D^{l+1}(x^\alpha Du)\|_{L^2(0,1)}, & \text{si } \alpha = 1, \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Démonstration

Les majorations (4.26) ne sont autres que les majorations (4.11) du théorème 4 dans le cas particulier ici traité. Les majorations (4.27) résultent du théorème 3 bis appliqué avec pour semi norme \mathcal{N}^α :

$$(4.28) \quad \begin{cases} \mathcal{N}^\alpha(v) = \text{Max}_{i=1, \dots, N} |x_i^{\frac{\alpha-1}{2}} v(x_i)| & , \quad \text{si } 0 \leq \alpha \leq 2 & , \quad \alpha \neq 1 \\ \mathcal{N}^\alpha(v) = \text{Max}_{i=1, \dots, N} |x_i^\varepsilon v(x_i)| & , \quad \text{si } \alpha = 1 & (\varepsilon > 0) \end{cases}$$

Le lemme 8 prouvera que la semi norme définie en (4.28) est continue sur V On remarquera qu'en cette semi-norme on a

$$\mathcal{N}^\alpha(u - r_h u) = 0$$

Ainsi l'erreur $\mathcal{N}^\alpha(u_h - u)$ est du même ordre que l'erreur $\|u_h - u\|_{L^2(0,1)}$.

Lemme 8

Soit $v \in \mathcal{D}(]0,1[)$. On a :

$$(4.29) \quad \|x^{\frac{\alpha-1}{2}} v\|_{L^\infty(0,1)} \leq \frac{1}{\sqrt{|1-\alpha|}} \|x^{\alpha/2} Dv\|_{L^2(0,1)} & , \quad \text{si } \alpha \neq 1.$$

$$(4.30) \quad \|x^\varepsilon v\|_{L^\infty(0,1)} \leq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \|x^{1/2} Dv\|_{L^2(0,1)} & (\varepsilon > 0).$$

On obtient comme précédemment les résultats suivants :

Proposition 2

Si la solution u de (P) vérifie pour un certain entier l , $0 \leq l \leq k$, :

$$(4.32) \quad x^{-\alpha} D(x^\alpha Du) \in H^l(0, 1),$$

alors la solution u_h de (P_h) obtenue avec le choix (4.31) de V_h satisfait :

$$(4.33) \quad \begin{cases} \|u_h - u\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^{l+2} \|D^l(x^{-\alpha} D(x^\alpha Du))\|_{L^2(0,1)} \\ \|x^{\alpha/2} D(u_h - u)\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^{l+1} \|D^l(x^{-\alpha} D(x^\alpha Du))\|_{L^2(0,1)} \end{cases}$$

On a en outre :

$$(4.34) \quad \begin{cases} \text{Max}_{i=1, \dots, N} |x_i^{\frac{\alpha-1}{2}} (u_h(x_i) - u(x_i))| \leq Ch^{l+2} \|D^l(x^{-\alpha} D(x^\alpha Du))\|_{L^2(0,1)}, & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \text{Max}_{i=1, \dots, N} |x_i^\varepsilon (u_h(x_i) - u(x_i))| \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} h^{l+2} \left\| D^l \left(\frac{1}{x} D(xDu) \right) \right\|_{L^2(0,1)}, & \text{si } \alpha = 1 \quad (\varepsilon > 0). \end{cases}$$

REMARQUE 1

Pour $k = 0$, les choix (4.24) et (4.31) coïncident. Si $0 \leq \alpha < 1$, V_h est l'espace des fonctions v_h continues dans $[0, 1]$, vérifiant les conditions aux limites $v_h(0) = v_h(1) = 0$ et dont la restriction à tout $]x_i, x_{i+1}[$ est de la forme

$$v_h^{(i)}(x) = \lambda_{0,i} + \lambda_{1,i} x^{1-\alpha}$$

Si $1 \leq \alpha \leq 2$, V_h est l'espace des fonctions v_h continues dans $[0, 1]$ vérifiant la condition aux limites $v_h(1) = 0$ et dont la restriction à tout $]x_i, x_{i+1}[$ est de la forme

$$\begin{aligned} v_h^{(i)}(x) &= \lambda_{0,i} + \lambda_{1,i} \text{Log } x & , & \quad \text{si } \alpha = 1 \\ v_h^{(i)}(x) &= \lambda_{0,i} + \lambda_{1,i} \frac{1}{x^{\alpha-1}} & , & \quad \text{si } 1 < \alpha \leq 2 \end{aligned}$$

avec $\lambda_{1,0} = 0$. (Cette dernière condition exprime que $v_h \in \mathcal{W}(0, 1)$).

REMARQUE 2

Soit $k = 0$ et soit V_h l'espace défini ci-dessus. Sous les hypothèses de régularité (4.21) et (4.22), on a $D(x^\alpha Du) \in L^2(0, 1)$ et :

$$\|D(x^\alpha Du)\|_{L^2(0,1)} \leq C \|f\|_{L^2(0,1)}$$

D'après la proposition 1, on a donc :

$$\|u_h - u\|_{L^2(0,1)} \geq Ch^{2-\alpha} \|f\|_{L^2(0,1)}$$

$$\|x^{\alpha/2} D(u_h - u)\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^{1-\alpha/2} \|f\|_{L^2(0,1)}$$

ce qui généralise les résultats de Ciarlet, Natterer, Varga [1].

Nous faisons les hypothèses complémentaires suivantes :

$$(4.21 \text{ bis}) \quad \begin{cases} a \in W^{2,\infty}(0,1) & \text{et} & Da(0) = 0 \\ x^{-\alpha} b \in L^\infty(0,1). \end{cases}$$

$$(4.22 \text{ bis}) \quad x^{-\alpha} f \in L^2(0,1).$$

Alors on a

$$\begin{cases} x^{-\alpha} D(x^\alpha Du) \in L^2(0,1) & \text{et} & : \\ \|x^{-\alpha} D(x^\alpha Du)\|_{L^2(0,1)} \leq C \|x^{-\alpha} f\|_{L^2(0,1)} \end{cases}$$

D'après la proposition 2, on a :

$$\begin{cases} \|u_h - u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{2-\alpha} \|x^{-\alpha} f\|_{L^2(0,1)} \\ \|x^{\alpha/2} D(u_h - u)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|x^{-\alpha} f\|_{L^2(0,1)} \end{cases}$$

REMARQUE 3

On se place dans la situation de la proposition 1; en particulier on suppose $D^{1+\alpha}(x^\alpha Du) \in L^2(0,1)$. On suppose en outre $0 \leq \alpha < 1$. On a :

$$\|x^{\alpha/2} D(u_h - u)\|_{L^2(0,1)} = O(h^{1+\alpha/2})$$

$$\|x^{-\alpha/2}(u_h - u)\|_{L^2(0,1)} = O(h^{1+2-3\alpha/2})$$

d'où

$$(4.35) \quad \|u - r_h u\|_{L^\infty(0,1)} = O(h^{1+3/2-\alpha}).$$

Par application du théorème 3 bis, avec $\mathcal{N}(v) = \|v\|_{L^\infty(0,1)}$, on obtient :

$$(4.36) \quad \|u_h - u\|_{L^\infty(0,1)} = O(h^{1+3/2-\alpha}).$$

alors qu'aux nœuds x_i de la subdivision, on a d'après (4.27) :

$$\text{Max}_{i=1,\dots,N} |u_h(x_i) - u(x_i)| = O(h^{1+2-\alpha}).$$

Jérôme et Pierce [5] ont montré, dans le cas $l = 0$, que si $D(x^\alpha Du) \in L^\infty(0, 1)$ on avait :

$$\|u - r_h u\|_{L^\infty(0,1)} = O(h^{2-\alpha})$$

On en déduit dans ce cas :

$$\|u_h - u\|_{L^\infty(0,1)} = O(h^{2-\alpha}).$$

V. 2° APPLICATION : PROBLEME DU BIHARMONIQUE EN SYMETRIE SPHERIQUE

Soit B_n la boule unité ouverte de R^n , $n \geq 2$. On désigne par $H_0^2(B_n)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(B_n)$ dans $H^2(B_n)$.

Soit :

$$(5.1) \quad \begin{cases} a \in L^\infty(B_n) & , \quad \text{avec } a(x) \geq e > 0 & \text{p.p. dans } B_n \\ b \in L^\infty(B_n) & , \quad \text{avec } b(x) \geq 0 & \text{p.p. dans } B_n. \end{cases}$$

Étant donné $f \in L^2(B_n)$, on considère le problème (Q) :

$$(Q) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^2(B_n) \text{ vérifiant} \\ \forall v \in H_0^2(B_n) \quad \int_{B_n} \{ a(x)\Delta_x u \Delta_x v + b(x)uv \} dx = \int_{B_n} f v dx \end{cases}$$

où

$$(5.2) \quad \Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad ; \quad dx = dx_1 \dots dx_n$$

Le problème (Q) admet une solution et une seule. L'interprétation du problème (Q) est la suivante :

$$(5.3) \quad \begin{cases} \Delta_x(a(x)\Delta_x u) + b(x)u = f & , \quad \text{dans } B_n \\ u \Big|_{\partial B_n} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial B_n} = 0 & ; \end{cases}$$

où ∂B_n est la frontière de B_n et $\frac{\partial}{\partial n} \Big|_{\partial B_n}$ la dérivée normale (extérieure par exemple). Nous nous intéressons ici au cas où le problème (Q) est à symétrie sphérique : on suppose que les fonctions a, b et f ne dépendent que de la seule variable $r = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$. Soit $v \in H_0^2(B_n) \cap C^2(\bar{B}_n)$ une fonction de la

seule variable r ; d'après les conditions aux limites on a : $v(1) = \frac{dv}{dr}(1) = 0$ et en vertu de la régularité de v , on a $\frac{dv}{dr}(0) = 0$. D'après (Q) la solution u vérifie avec une telle fonction v :

$$\int_0^1 \{ a(r)\Delta_r u \Delta_r v + b(r)uv \} r^{n-1} dr = \int_0^1 f v r^{n-1} dr$$

où

$$\Delta_r v = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{dv}{dr} \right)$$

Nous sommes ainsi conduits à utiliser les résultats généraux de II et III avec le cas particulier suivant :

$$\Omega =]0, 1[\quad ; \quad m = 2.$$

$$A_0 v = r^{\frac{n-1}{2}} v$$

$$A_1 v = 0$$

$$A_2 v = r^{\frac{n-1}{2}} \Delta_r v = \frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}} D(r^{n-1} Dv)$$

$$(5.4) \quad W(0, 1) = \{ v \mid v \in L^2_{\text{loc}}(0, 1) \quad ; \quad r^{\frac{n-1}{2}} v \in L^2(0, 1) \quad ; \quad r^{\frac{n-1}{2}} \Delta_r v \in L^2(0, 1) \}$$

$$[v] = \left\| r^{\frac{n-1}{2}} v \right\|_{L^2(0,1)}$$

$$[[v]] = \left\| r^{\frac{n-1}{2}} \Delta_r v \right\|_{L^2(0,1)}$$

$$\|v\| = ([v]^2 + [[v]]^2)^{1/2}.$$

$$\text{Soit } \mathcal{V} = \{v \mid v \in W(0,1) \cap C^2([0,1]) \quad ; \quad v(1) = Dv(1) = 0 \quad ; \quad Dv(0) = 0\}$$

$$(5.5) \quad V = \text{adhérence de } \mathcal{V} \text{ dans } W(0,1)$$

$$(5.6) \quad a(u, v) = \int_0^1 \{ a(r)\Delta_r u \Delta_r v + b(r)uv \} r^{n-1} dr$$

En symétrie sphérique la solution du problème (Q) est la solution du problème (P) :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in V & \text{vérifiant} \\ \forall v \in V & a(u, v) = \int_0^1 f v r^{n-1} dr. \end{cases}$$

Soit $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_i < \dots < r_{N+1} = 1$; $\Omega_i =]r_i, r_{i+1}[$; $h_i = r_{i+1} - r_i$ et $h = \max_{i=0, \dots, N} h_i$. Nous n'étudions ici que l'approximation la plus simple du problème (P) : On choisit pour V_h le sous-espace des fonctions $v_h \in V$ dont la restriction à tout Ω_i vérifie : $A_2^* A_2 v_h = 0$. Comme on a :

$$A_2^* A_2 v = r^{n-1} \Delta_r^2 v$$

l'espace V_h est :

$$(5.7) \quad V_h = \{ v_h \mid v_h \in V \quad ; \quad \Delta_r^2 v_h^{(i)} = 0 \quad , \quad 0 \leq i \leq N \}.$$

Le problème approché est :

$$(P_h) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ vérifiant} \\ \forall v_h \in V_h \quad a(u_h, v_h) = \int_0^1 f v_h r^{n-1} dr \end{cases}$$

Ce problème (P_h) admet une solution u_h et une seule.

Théorème 6

On suppose que la solution u de (P) vérifie :

$$(5.8) \quad r^{\frac{n-1}{2}} \Delta_r^2 u \in L^2(0, 1)$$

Soit u_h la solution de (P_h).

Il existe une constante C , indépendante de u et de h , telle que

$$(5.9) \quad \|u_h - u\| \leq Ch^2 \|r^{\frac{n-1}{2}} \Delta_r^2 u\|_{L^2(0,1)}$$

REMARQUE 4

Considérant u et u_h comme fonctions de $x = (x_1, \dots, x_n)$, (5.9) s'écrit :

$$(5.9 \text{ bis}) \quad \|u_h - u\|_{H^2(B_n)} \leq Ch^2 \|\Delta_x^2 u\|_{L^2(B_n)}$$

Démonstration

Nous appliquons le théorème 1, avec

$$\mathcal{F}_i = \{0\} \quad , \quad 0 \leq i \leq N$$

$$X_i = \{v \mid r^{-\frac{n-1}{2}} v \in L^2(\Omega_i)\}$$

$$\|v\|_{X_i} = \|r^{-\frac{n-1}{2}} v\|_{L^2(\Omega_i)}$$

On a

$$R(u, X, \mathcal{F}) = \left(\sum_{i=0}^N \|A_2^* A_2 u\|_{X_i}^2 \right)^{1/2}$$

$$R(u, X, \mathcal{F}) = \|r^{\frac{n-1}{2}} \Delta_r^2 u\|_{L^2(0,1)}$$

D'autre part, on a ici $L_{x_i} \leq C(\Omega_i)$ (cf. (3.20)) et il est immédiat de vérifier :

$$C(\Omega_i) \leq Ch_i^2$$

Nous supposons maintenant la régularité suivante du coefficient $a(x)$

$$(5.10) \quad a \in W^{2,\infty}(0, 1) \quad ; \quad Da(0) = 0$$

Alors l'hypothèse $r^{\frac{n-1}{2}} f(r) \in L^2(0, 1)$ implique que la solution u de (P) vérifie $r^{\frac{n-1}{2}} \Delta_r^2 u \in L^2(0, 1)$ et il existe une constante C , indépendante de u telle que

$$(5.11) \quad \|r^{\frac{n-1}{2}} \Delta_r^2 u\|_{L^2(0,1)} \leq C \|r^{\frac{n-1}{2}} f\|_{L^2(0,1)}$$

Théorème 7

On suppose la régularité (5.10) du coefficient a . Alors il existe une constante C , indépendante de u et de h , telle que

$$(5.12) \quad \|r^{\frac{n-1}{2}} \Delta_r(u_h - u)\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^2 \|r^{\frac{n-1}{2}} f\|_{L^2(0,1)}$$

$$(5.13) \quad \|r^{\frac{n-1}{2}} (u_h - u)\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^4 \|r^{\frac{n-1}{2}} f\|_{L^2(0,1)}$$

REMARQUE 5

En la variable x , (5.12) et (5.13) s'écrivent respectivement.

$$(5.12 \text{ bis}) \quad \|\Delta_x(u_h - u)\|_{L^2(B_n)} \leq Ch^2 \|f\|_{L^2(B_n)}$$

$$(5.13 \text{ bis}) \quad \|u_h - u\|_{L^2(B_n)} \leq Ch^4 \|f\|_{L^2(B_n)}$$

Démonstration

La majoration (5.12) résulte évidemment de (5.9) et de (5.11). Pour la démonstration de (5.13), nous utilisons la technique classique de dualisation

$$(5.14) \quad \|r^{\frac{n-1}{2}} (u_h - u)\|_{L^2(0,1)} = \sup_{g \neq 0, r^{\frac{n-1}{2}} g \in L^2(0,1)} \frac{\int_0^1 (u_h - u) g r^{n-1} dr}{\|r^{\frac{n-1}{2}} g\|_{L^2(0,1)}}$$

A une fonction g telle que $r^{\frac{n-1}{2}} g \in L^2(0, 1)$, nous associons la solution $\varphi \in V$ du problème :

$$\forall v \in V \quad a(v, \varphi) = \int_0^1 v g r^{n-1} dr$$

et la solution $\varphi_h \in V_h$ du problème (approché) :

$$\forall v_h \in V_h \quad a(v_h, \varphi_h) = \int_0^1 v_h g r^{n-1} dr.$$

Par construction de φ , on a

$$\int_0^1 (u_h - u) g r^{n-1} dr = a(u_h - u, \varphi)$$

Comme $\varphi_h \in V_h$, on a

$$a(u, \varphi_h) = a(u_h, \varphi_h)$$

d'où

$$\int_0^1 (u_h - u) g r^{n-1} dr = a(u_h - u, \varphi - \varphi_h).$$

$$\left| \int_0^1 (u_h - u) g r^{n-1} dr \right| \leq C \|u_h - u\| \|\varphi_h - \varphi\|.$$

En utilisant la majoration (5.12) pour u et pour φ , on obtient :

$$\left| \int_0^1 (u_h - u) g r^{n-1} dr \right| \leq Ch^4 \|r^{\frac{n-1}{2}} f\|_{L^2(0,1)} \|r^{\frac{n-1}{2}} g\|_{L^2(0,1)}$$

En reportant ce résultat dans la caractérisation (5.14) on démontre (5.13).

EXEMPLE $n = 2$

On a les caractérisations suivantes :

$$V = \{ v \mid v \in W(0, 1) \cap C^1[0,1] \quad ; \quad Dv(0) = 0 \quad ; \quad v(1) = Dv(1) = 0 \}$$

$$V_h = \{ v_h \mid v_h \in V \quad ; \quad v_h^{(i)}(r) = \mu_{1,i} \text{Log } r + \mu_{2,i} + \mu_{3,i} r^2 \text{Log } r + \mu_{4,i} r^2, \quad 0 \leq i \leq N \}.$$

L'appartenance de v_h à V implique $\mu_{1,0} = 0$. Les fonctions de base relatives à cet exemple ont été étudiées par Pardoën [6].

EXEMPLE $n = 3$

On vérifiera $V \subset C^0[0,1] \cap C^1]0,1]$; si $v \in V$, Dv n'est pas nécessairement borné au voisinage de $r = 0$. On a seulement :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} Dv(r) = 0.$$

On a

$$V_h = \left\{ v_h \mid v_h \in V ; v_h^{(i)}(r) = \frac{\mu_{1,i}}{r} + \mu_{2,i} + \mu_{3,i}r + \mu_{4,i}r^2, \quad 0 \leq i \leq N \right\}.$$

L'appartenance de v_h à V implique $\mu_{1,0} = 0$. Les fonctions de V_h sont $C^1[0,1]$ et elles vérifient $Dv_h(0) = 0$.

REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à remercier le Professeur P. A. RAVIART pour les avoir guidés et encouragés tout au long de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CIARLET P. G., NATTERER F. et VARGA R. S., *Numerical methods of high-order accuracy for singular nonlinear boundary value problems*. Numer. Math., **15**, 87-99 (1971).
- [2] CIARLET P. G. et RAVIART P. A., *General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite elements methods*. Arch. Rat. Mech. Anal., **46**, 177-199 (1972).
- [3] DAYLEY J. W. et PIERCE J. G., *Error bounds for the Galerkin method applied to singular and nonsingular boundary value problems*. Num. Math., **19**, 266-282 (1972).
- [4] JAMET P., *On the convergence of finite-difference approximation to one dimensional singular boundary value problems*. Numer. Math., **14**, 355-378 (1970).
- [5] JEROME J. W. et PIERCE J. G., *One spline functions determined by singular self-adjoint differential operators*. Journal Approx. Theory, **5**, 15-40 (1972).
- [6] PARDOEN G. C., *Deflection function for the symmetrical bending of circular plates*. AIAA Journal, vol. 10, n° 2, 239-240 (1972).
- [7] PARTER S. V., *Numerical methods for generalized axially symmetric potentials*. J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. B. Numer. Anal., **2**, 500-516 (1965).