Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique

Paul Sabloniere

Une méthode de résolution numérique de certaines équations intégrales de type Hammerstein

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique, tome 9, n° 1 (1975), p. 105-118.

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1975__9_1_105_0>

R.A.I.R.O.
(9e année, R-1, 1975, p. 105 à 118)

UNE METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE DE CERTAINES EQUATIONS INTEGRALES DE TYPE HAMMERSTEIN

par Paul SABLONNIERE *

Communiqué par P.J. LAURENT

Résumé. – *On utilise la technique du plongement invariant pour résoudre numériquement certaines équations intégrales de type Hammerstein, le paramètre étant la borne supérieure de l'intégrale. On en déduit un système d'équations différentielles que l'on intègre par des méthodes numériques classiques.*

I – INTRODUCTION

1.1. – Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $C[a,b]$ l'espace de BANACH des fonctions réelles continues muni de la norme du maximum. On cherche à résoudre l'équation intégrale :

$$(1) \qquad \boxed{y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\, \phi(s,y(s))\, ds}$$

avec les hypothèses suivantes :

H1) f est une fonction réelle continue sur $[a,b]$ et K une fonction réelle continue sur $[a,b] \times [a,b]$.

H2) Pour tout $f \in C[a,b]$ et tout $r > 0$, on pose :

$$D(f,r) = \{(s,u) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant s \leqslant b \text{ et } f(s) - r \leqslant u \leqslant f(s) + r\}$$

$$B(f,r) = \{y \in C[a,b] \mid \|y - f\| \leqslant r\}$$

On suppose que $\phi(s,u)$ est une fonction réelle continue sur $D(f,r)$ et possède une dérivée partielle $\frac{\partial \phi}{\partial u}(s,u)$ (notée ϕ' dans la suite), lipschitzienne par

* I.U.T. Informatique – Lille

rapport à u ; plus précisément, il existe $L_{\phi'} > 0$ tel que, pour tous (s,u_1) et (s,u_2) de $D(f,r)$:

$$|\phi'(s,u_1) - \phi'(s,u_2)| \leqslant L_{\phi'} |u_1 - u_2|$$

H3) On choisit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$|\lambda| < \frac{1}{M_K(b-a)} \min\left(\frac{r}{M_\phi}, \frac{1}{M_{\phi'}}\right)$$

où M_K, M_ϕ et $M_{\phi'}$ désignent les maxima des fonctions $|K(t,s)|$, $|\phi(s,u)|$ et $|\phi'(s,u)|$ sur leurs ensembles de continuité respectifs.

Ces hypothèses permettent de prouver le résultat suivant :

Théorème 1. — Si $r > 0$ est donné, l'équation (1) admet une solution unique dans $B(f,r)$.

Démonstration. —

Désignons par P l'opérateur qui à $y \in C[a,b]$ fait correspondre $Py \in C[a,b]$ défini par :

$$Py(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\, \phi(s,y(s))\, ds$$

Si $y \in B(f,r)$, alors $(s,y(s)) \in D(f,r)$ pour tout $s \in [a,b]$, donc $\phi(s,y(s))$ a un sens et on a :

$$\|Py - f\| \leqslant |\lambda| (b-a) M_K M_\phi < r \text{ d'après (H3)}$$

On constate que P applique la boule $B(f,r)$ dans elle-même (et même dans son intérieur).

D'autre part, pour y_1 et $y_2 \in B(f,r)$:

$$\|Py_1 - Py_2\| \leqslant |\lambda| (b-a) M_K M_{\phi'} \|y_1 - y_2\|$$

et comme (H3) entraîne : $|\lambda| (b-a) M_K M_{\phi'} < 1$, l'opérateur P est contractant, donc il admet un point fixe dans la boule $B(f,r)$, c.q.f.d. (Cf. [1], [2], [6]).

1.2. —Associons maintenant à l'équation (1) la famille d'équations dépendant du paramètre x $\in [a,b]$:

(2) $$\boxed{y_x(t) = f(t) + \lambda \int_a^x K(t,s)\, \phi(s,y_x(s))\, ds}$$

Pour chaque valeur de x, cette équation a une solution unique y_x dans la boule $B(f,r)$, l'hypothèse (H3) entraînant la contraction de chaque opérateur intégral en x.

Nous allons montrer que la fonction $y_* : x \to y_x$ définie sur $[a,b]$ et à valeurs dans $B(f,r)$ est dérivable et vérifie une équation différentielle de type initial que l'on pourra résoudre numériquement par des méthodes par pas.

Auparavant, nous étudions une famille d'équations intégrales linéaires liées à l'équation (1).

II – ÉTUDE D'UNE FAMILLE D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Posons, pour toute fonction $\psi \in B(f,r)$ $(t,s,z \in [a,b])$:

(3) $$H(t,s\,;\psi) = K(t,s)\, \phi'(s,\psi(s))$$

(4) $$F(t,z\,;\psi) = K(t,z)\, \phi(z,\psi(z))$$

L'équation intégrale linéaire suivante, où z est fixé dans $[a,b]$

(5) $$\Theta_z(t\,;\psi) = \lambda F(t,z\,;\psi) + \lambda \int_a^z H(t,s\,;\psi)\, \Theta_z(s\,;\psi)\, ds\,,$$

a un noyau vérifiant, en vertu de (H3) :

$$|\lambda|(z-a) \max_{(t,s)\in[a,b]^2} |H(t,s\,;\psi)| < 1$$

Par conséquent, elle admet un noyau résolvant Γ_z (t,s ; ψ) et une solution unique $\tau_z(t\,;\psi)$ vérifiant le système différentiel de type initial (Cf [3]).

(6) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\tau_z(t\,;\psi) = \lambda\, \Gamma_z(t,z;\,\psi)\, \tau_z(z\,;\psi) \\ \tau_a(t\,;\psi) = \lambda\, F(t,a\,;\psi) \end{cases}$$

(6^{bis}) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\Gamma_z(t,s\,;\psi) = \lambda\, \Gamma_z(t,z;\,\psi)\, \Gamma_z(z,s\,;\psi) \\ \Gamma_a(t,s\,;\psi) = H(t,s\,;\psi) \end{cases}$$

La solution de (5) est donnée également par :

$$\tau_z(t\,;\psi) = \lambda F(t,z\,;\psi) + \lambda \int_a^z \Gamma_z(t,u\,;\psi)\, F(u,z\,;\psi)\, du$$

ou encore

$$\tau_z(t\,;\psi) = \lambda\, \phi(z,\psi(z))\, [K(t,z) + \lambda \int_a^z \Gamma_z(t,u\,;\psi)\, K(u,z)\, du] \tag{7}$$

Nous sommes amenés à introduire la fonction :

$$\gamma_z(t,s\,;\psi) = K(t,s) + \lambda \int_a^z \Gamma_z(t,u\,;\psi)\, K(u,s)\, du \tag{8}$$

Il est facile de voir que :

$$\boxed{\Gamma_z(t,s\,;\psi) = \phi'(s,\psi(s)) \cdot \gamma_z(t,s\,;\psi)} \tag{9}$$

et que la fonction $\gamma_z(t,s\,;\psi)$ est solution de :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z}\gamma_z(t,s\,;\psi) = \phi'(z,\psi(z))\, \gamma_z(t,z\,;\psi)\, \gamma_z(z,s\,;\psi) \\ &\gamma_a(t,s\,;\psi) = K(t,s) \end{aligned}\right. \tag{10}$$

En vertu de l'égalité (7), la solution de (5) ou de (6) est donnée sans calculs par :

$$\boxed{\tau_z(t;\psi) = \lambda\, \phi(z,\psi(z))\, \gamma_z(t,z\,;\psi)} \tag{11}$$

Dès que l'on connaît γ_z solution de (10).

Nous allons étudier quelques propriétés de γ_z et de τ_z.

2.1. – Existence et unicité de la solution de (10)

Il existe au moins une solution puisque la relation (8) exprime γ_z en fonction de Γ_z, résolvant de l'équation intégrale (5).

Pour l'unicité, nous écrivons (10) sous la forme :

$$\gamma_z(t,s\,;\psi) = K(t,s) + \lambda \int_a^z \phi'(u,\psi(u)) \cdot \gamma_u(t,u\,;\psi)\, \gamma_u(u,s\,;\psi)\, du \tag{12}$$

Si cette équation admet deux solutions bornées $\overset{1}{\gamma}$ et $\overset{2}{\gamma}$ avec $|\overset{1}{\gamma}|$ et $|\overset{2}{\gamma}| \leqslant M_\gamma(\psi)$

pour $(z,s,t) \in [a,b]^3$ et $\psi \in B(f,r)$ fixée, on peut écrire :

$$\max_{t,s} |\overset{1}{\gamma}_z(t,s\,;\psi) - \overset{2}{\gamma}_z(t,s\,;\psi)| \leqslant 2\,|\lambda|\, M_{\phi'} M_\gamma\,(\psi) \int_a^z \max_{t,s} |\overset{1}{\gamma}_u(t,s\,;\psi) - \overset{2}{\gamma}_u(t,s\,;\psi)|\, du$$

Un lemme classique de majoration nous donne immédiatement :

$$\overset{1}{\gamma}_z(t,s\,;\psi) = \overset{2}{\gamma}_z(t,s\,;\psi)$$

Nous pouvons énoncer le :

Théorème 2. — L'équation différentielle :

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\gamma_z(t,s\,;\psi) = \lambda\, \phi'(z,\psi(z)) \cdot \gamma_z(t,s\,;\psi)\, \gamma_z(z,s\,;\psi) \\[2ex] \gamma_a(t,s\,;\psi) = K(t,s) \end{cases}$$

admet, pour chaque fonction $\psi \in B(f,r)$, une solution unique bornée sur $[a,b]^3$.

2.2. — Évaluation d'une borne uniforme M_γ

Compte tenu de (8) et des équations intégrales vérifiées par le résolvant Γ_z, on établit que :

$$(13) \qquad \gamma_z(t,s\,;\psi) = K(t,s) + \lambda \int_a^z \gamma_z(t,u\,;\psi)\, \phi'(u,\psi(u)) \cdot K(u,s)\, du$$

qui donne la majoration suivante :

$$M_\gamma(\psi) \leqslant M_K + |\lambda|\,(b-a)\, M_{\phi'}\, M_K\, M_\gamma(\psi).$$

Compte tenu de l'hypothèse (H3), on obtient :

$$(14) \qquad \forall\, \psi \in B(f,r) : M_\gamma(\psi) \leqslant M_\gamma = \frac{M_K}{1 - |\lambda|\,(b-a)\, M_K\, M_{\phi'}}$$

2.3. — Étude de l'application : $\psi \to \gamma_z(t,s\,;\psi)$

Soient ψ_1 et $\psi_2 \in B(f,r)$. La relation (13) ci-dessus nous permet d'écrire :

$$|\gamma_z(t,s\,;\psi_1) - \gamma_z(t,s\,;\psi_2)| \leqslant |\lambda| \int_a^z |\gamma_z(t,u\,;\psi_1)\, \phi'(u,\psi_1(u))\, K(u,s)$$
$$- \gamma_z(t,u\,;\psi_2)\, \phi'(u,\psi_2(u))\, K(u,s)|\, du$$

Le second membre est inférieur ou égal à :

$$|\lambda| M_\gamma L_{\phi'} \max_{a \leqslant u \leqslant z} |\psi_1(u) - \psi_2(u)| (z-a) \cdot M_K$$

$$+ |\lambda| M_{\phi'} M_K \int_a^z |\gamma_z(t,u\,;\psi_1) - \gamma_z(t,u\,;\psi_2)| du$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\max |\gamma_z(t,s\,;\psi_1) - \gamma_z(t,s\,;\psi_2)| \leqslant L_\gamma \max_{a \leqslant u \leqslant z} |\psi_1(u) - \psi_2(u)|} \tag{15}$$

avec $$L_\gamma = \frac{|\lambda|(b-a) M_K M_\gamma L_{\phi'}}{1 - |\lambda|(b-a) M_K M_{\phi'}} = |\lambda|(b-a) L_{\phi'} M_\gamma^2$$

2.4. — Étude de la solution de l'équation intégrale (5)

Rappelons (11) que :

$$\tau_z(t\,;\psi) = \lambda\, \phi(z,\psi(z))\, \gamma_z(t,z\,;\psi).$$

Les calculs précédents nous conduisent à poser, pour toute fonction $B(f,r)$ et tout $z \in [a,b]$:

$$F(z,\psi) = \lambda\, \phi(z,\psi(z)) \cdot \gamma_z(.\,,z\,;\psi) = \tau_z(.\,;\psi) \tag{16}$$

F est une application de $[a,b] \times B(f,r)$ dans $C[a,b]$.

On a alors le :

Théorème 3. — L'application $F(z,\psi)$ est uniformément lipschitzienne par rapport à $\psi \in B(f,r)$.
Pour tout $z \in [a,b]$ et tout couple (ψ_1, ψ_2) de $B(f,r)$, on a :

$$\boxed{\| F(z,\psi_1) - F(z,\psi_2) \| \leqslant L_F \max_{a \leqslant u \leqslant z} |\psi_1(u) - \psi_2(u)|} \tag{17}$$

avec $L_F = |\lambda| (M_\gamma M_{\phi'} + M_\phi L_\gamma)$

Démonstration. —

A partir de (11), (H2) et (15), on peut écrire :

$$|\lambda\, \phi(z,\psi_1(z))\, \gamma_z(t,z\,;\psi_1) - \lambda\, \phi(z,\psi_2(z))\, \gamma_z(t,z\,;\psi_2)|$$

$$\leqslant |\lambda| M_\gamma M_{\phi'} \max_{a \leqslant u \leqslant z} |\psi_1(u) - \psi_2(u)|$$

$$+ |\lambda| M_\phi L_\gamma \max_{a \leqslant u \leqslant z} |\psi_1(u) - \psi_2(u)| \qquad \text{c.q.f.d.}$$

On peut remarquer également que, pour toute fonction $\psi \in B(f,r)$ et tout $z \in [a,b]$, la solution de l'équation intégrale (5) vérifie :

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |\tau_z(t\,;\psi)| \leqslant |\lambda| M_\phi M_\gamma = L_* \tag{18}$$

III – CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ DE L'APPLICATION y_*

Rappelons que, pour tout $x \in [a,b]$, $y_*(x) = y_x$ est l'unique solution de l'équation (2) dans la boule $B(f,r)$.

3.1. – Continuité de y_*

Théorème 4. – Les hypothèses (H1), (H2) et (H3) entraînent que y_* est continue sur $[a,b]$.

Démonstration. –

$$\|y_*(x+h) - y_*(x)\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |y_{x+h}(t) - y_x(t)|$$

Or, cette dernière quantité est majorée par :

$$|\lambda| M_K M_\phi |h| + |\lambda| M_K M_{\phi'} \int_a^x |y_{x+h}(s) - y_x(s)|\, ds$$

Puisque $\qquad |\lambda| M_K M_{\phi'}(x-a) \leqslant |\lambda| M_K M_{\phi'}(b-a) < 1$

On en déduit :

$$\|y_*(x+h) - y_*(x)\| \leqslant \frac{|\lambda| M_K M_\phi}{1 - |\lambda| M_K M_{\phi'}(b-a)} |h|$$

ou encore, compte tenu de (18) :

$$\|y_*(x+h) - y_*(x)\| \leqslant L_* |h| \qquad \text{c.q.f.d.}$$

3.2. — Dérivabilité de y_*

Nous allons construire une application y' de $[a,b]$ dans $C[a,b]$ qui vérifie :

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\ \alpha(\epsilon) > 0 \text{ tel que } |h| < \alpha(\epsilon)$$

entraîne :

(19) $$\| y_*(x+h) - y_*(x) - h\, y'_*(x) \| \leqslant \epsilon\, |h|$$

Puisque $y_*(x) = y_x \in B(f,r)$, l'équation intégrale linéaire (5) du paragraphe précédent a une solution unique $\tau_x\ (t;y_x)$ quand on prend $\psi = y_x$ et $z = x$. Enonçons le :

Théorème 5. — L'application y_* a pour dérivée sur $[a,b]$ la fonction y'_* telle que $y'_*(x)$ soit solution de l'équation intégrale linéaire (5) où $z = x$ et $\psi = y_x$.

Démonstration. —

Si on pose $y'_*(x) = \tau_x\ (t;y_x)$' (19) s'écrit :

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} | y_{x+h}(t) - y_x(t) - h\, \tau_x\ (t;y_x) | \leqslant \epsilon\, |h|$$

Or, le premier membre est majoré par :

$$|\lambda|\, | \int_x^{x+h} K(t,s)\, \phi(s, y_{x+h}(s))\, ds - h\, K(t,x)\, \phi(x; y_x(x)) |$$

$$+ |\lambda| M_K \int^x | \phi(s, y_{x+h}(s)) - \phi(x, y_x(s)) - \text{h}\, \phi'(s, y_x(s))\, \tau_x(s;y_x) |\, ds$$

La première valeur absolue est majorée par une quantité de la forme $|h|\, \omega_1(h)$ où $\omega_1(h) \to 0$ avec h uniformément par rapport à x : ceci résulte de la continuité uniforme de K, ϕ et y_* sur leurs domaines respectifs.

La deuxième valeur absolue est majorée par :

$$|\lambda| M_K \int_a^x | (\Delta_h\, y_x(s)\, \phi'(s, y_x(s) + \Delta_h\, y_x(s) \cdot \Theta(s)) - hy'(s, y_x(s))\, \tau_x(s;y_x) |\, ds$$

$$\text{où } \Delta_h\, y_x(s) = y_{x+h}(s) - y_x(s) \text{ et } 0 < \Theta(s) < 1.$$

Cette quantité peut être majorée à son tour par :

$$|\lambda| M_K M_{\phi'} \int_a^x |y_{x+h}(s) - y_x(s) - h\,\tau_x(s;y_x)|\,ds$$

$$+ |\lambda| M_K (x-a)\,|h|\,L \max_{a \leqslant s \leqslant x} |\phi'(s, y_x(s) + \Theta(s)\,\Delta_h\, y_x(s)) - \phi'(s, y_x(s))|$$

Comme $|\Delta_h\, y_x(s)| \leqslant L_*\, |h|$, on a aussi :

$$|\phi'(s, y_x(s) + \Theta(s)\,\Delta_h\, y_x(s)) - \phi'(s, y_x(s))| \leqslant L_{\phi'}\, |\Delta_h\, y_x(s)| \leqslant L_{\phi'}\, L_*\, |h|$$

En résumé, on obtient :

$$|y_{x+h}(t) - y_x(t) - h\,\tau_x(t;y_x)| \leqslant |h|\,[\omega_1(h) + \omega_2(h)]$$

$$+ |\lambda| M_K M_{\phi'} \int_a^x |y_{x+h}(s) - y_x(s) - h\,\tau_x(s;y_x)|\,ds.$$

où l'on a posé $\omega_2(h) = |\lambda| M_K (b-a)\, L_{\phi'}\, L_*^2\, |h|$

Cette majoration conduit à :

$$\| y_*(x+h) - y_*(x) - h\, y_*'(x) \| \leqslant \frac{\omega_1(h) + \omega_2(h)}{1 - |\lambda| M_K M_{\phi'}(b-a)}\, |h|$$

Comme ω_1 et ω_2 sont indépendants de x, on voit que :

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \alpha(\epsilon) \text{ t.q. } |h| < \alpha(\epsilon) \Rightarrow \frac{(\omega_1 + \omega_2)(h)}{1 - |\lambda| M_K M_{\phi'}(b-a)} < \epsilon$$

Ceci prouve bien que $y_*'(x) = \tau_x(\,.\,; y_x)$, c.q.f.d.

3.3. – Équation différentielle vérifiée par y_*.

Compte tenu des théorèmes 2, 3 et 5, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Théorème 6. – Soit l'équation fonctionnelle :

$$(20) \quad \begin{cases} y_*'(x) = F(x; y_*(x)) \\ y_*(a) = f \end{cases}$$

avec $F(x, \psi) = \lambda \, \phi \, (x, \psi(x)) \, \gamma_x(\, . \, , x; \psi)$ où γ_x est la solution unique de :

$$
(10) \qquad \left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial}{\partial z} \gamma_z(t,s;\psi) = \lambda \, \phi'(z, \psi(z)) \, \gamma_z(t,z;\psi) \, \gamma_z(z,s;\psi) & \\
 & \\
\gamma_a(t,s;\psi) = K(t,s) & \text{pour } a \leqslant z \leqslant x
\end{array}
\right.
$$

Alors (20) admet une solution unique sur $[a,b]$ et, pour tout $x \in [a,b]$, $y_*(x) = y_x$ est la solution unique de l'équation (2). En particulier $y_*(b)$ est la solution de (1).

Il y a donc équivalence entre le problème intégral (2) et le problème (20) ci-dessus, moyennant le calcul de $\gamma_x(t,x,y_x)$ pour chaque valeur de $x \in [a,b]$.

IV – RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

4.1. – Équation (10)

Cette équation généralise l'équation résolue dans [3], [7] et [9] au moyen de méthodes à pas séparés de type RUNGE-KUTTA. Lorsque $\phi \, (s,u) = u$, $\phi'(s,u) = 1$, et on retrouve l'équation de la résolvante des équations linéaires de 2ème espèce.

Pour le formalisme, nous renvoyons aux références ci-dessus.

4.2. – Équation (20)

Contrairement à ce qui se passe pour un problème initial classique du type :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
y' = f(x,y) \\
 \\
y(a) = y_0
\end{array}
\right.
$$

on ne connaît qu'une expression approchée de $F(x,y_*)$ qui est calculée au moyen de l'équation (10). En généralisant un résultat de HENRICI [8], sur les équations du type ci-dessus, on montre le résultat suivant :

Supposons que, pour toute fonction $\psi \in B(f,r)$, tout $h > 0$ assez petit, on ait obtenu :

$$
\boxed{F(x, \psi) = F(x, \psi) + h^q \, \epsilon(h)}
$$

au moyen d'une méthode à pas séparés de rang q (où $\epsilon(h)$ reste bornée quand $h \to 0$).

Dans ce cas si on calcule y_* au moyen d'une méthode à pas séparés de rang p, l'erreur sera de l'ordre de h^r où $r = \min(p,q)$.

Pratiquement, on a donc intérêt à utiliser des méthodes de même rang pour résoudre (10) et (20).

V – EXEMPLE

5.1. – Résultats théoriques

Proposons-nous de chercher des conditions suffisantes sur α et $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que l'équation :

$$y(t) = \alpha t + \lambda \int_0^1 ts[y(s)]^2\, ds \tag{21}$$

ait une solution réelle unique dans la boule $B(f,r)$ où $f(t) = \alpha t$ et $r > 0$ est donné.

Les solutions de (21) sont de la forme $y(t) = kt$, ce qui conduit à l'équation :

$$\lambda k^2 - 4k + 4\alpha = 0 \tag{22}$$

Comme $\Delta' = 4 - 4\alpha\lambda$, on voit que k sera réel si l'on choisit α et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha\lambda \leqslant 1 \tag{23}$$

Calculons maintenant la valeur maximale de

$$\lambda_0(r) = \frac{1}{M_K(b-a)} \min\left(\frac{r}{M_\phi}, \frac{1}{M_{\phi'}}\right)$$

intervenant dans l'hypothèse (H3), sachant que nous avons ici $M_K = 1$ et $b - a = 1$ et qu'un calcul simple donne :

$$\frac{r}{M_\phi} = \frac{r}{(|\alpha| + r)^2} \text{ et } \frac{1}{M_{\phi'}} = \frac{1}{2(|\alpha| + r)}$$

La valeur maximale de ces deux quantités étant atteinte pour $r = |\alpha|$, on en déduit que :

$$\max_{r>0} \lambda_0(r) = \frac{1}{4|\alpha|}$$

La condition suffisante (H3) est donc vérifiée si :

(24) $$|\alpha\lambda| < \frac{1}{4}$$

qui est nettement plus restrictif que (23).

5.2. — Cas particulier

Si nous prenons α et $\lambda > 0$, nous aurons une seule solution dans la boule $B(f,\alpha)$ de $C[0,1]$ si $\lambda\alpha < \frac{1}{4}$; cette solution est :

(25) $$y(t) = \frac{2}{\lambda}(1 - \sqrt{1 - \lambda\,\alpha})\,t$$

Prenons, par exemple $\alpha = 1$ et $\lambda = \frac{1}{8}$:

$$y(t) = t + \frac{1}{8}\int_0^1 t.s.\ [y(s)]^2\, ds$$

La solution unique dans la boule $B(t,1)$ est :

$$y(t) = (16 - 4\sqrt{14})\,t \simeq 1{,}03337\,t$$

5.3. — Variations de la solution en fonction de $x \in [0,1]$

Considérons l'équation

$$y_x(t) = t + \frac{1}{8}\int_0^x t.s.\ [y_x(s)]^2\, ds$$

La solution dans la boule $B(t,1)$ est de la forme :

$$y_x(t) = k(x)\,t$$

où $k(x)$ est solution de :

$$x^4\,k^2(x) - 32\,k(x) + 32 = 0$$

Comme $\Delta' = 256 - 32\,x^4$, il y aura au moins une solution réelle si $x^4 \leqslant 8$, soit $x \leqslant 1{,}68$ environ.

Cette solution est nécessairement :

$$k(x) = \frac{16}{x^4}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^4}{8}}\right)$$

On constate que $k^*(x) = \frac{16}{x^4}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{x^4}{8}}\right)$ ne convient pas car $k^*(x) \to +\infty$ quand $x \to 0$ tandis que $k(x) \to 1$.

5.4. – **Solution numérique.**

L'essai a été fait avec un pas $k = \frac{1}{8}$ en utilisant la méthode d'Euler modifiée (méthode de Runge-Kutta d'ordre 2).

x \ t	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,750	0,875	1
0,25	0,4	0,07	0,11	0,15	0,19	0,23	0,27	0,30
0,5	0,15	0,37	0,46	0,61	0,76	0,92	1,07	1,22
0,75	0,34	0,69	1,03	1,38	1,72	2,07	2,41	2,76
1	0,56	1,13	1,69	2,26	2,83	3,39	3,96	4,53

(On donne dans ce tableau, pour différentes valeurs de x, les erreurs absolues multipliées par 10^4)

Dans [5] et [11], on a donné des résultats numériques pour l'équation :

$$y(t) = \frac{3}{4} t + \int_0^1 ts\,[y(s)]^2\, ds$$

qui ne vérifie pas l'hypothèse (H3) sur λ. Les résultats numériques obtenus sont les suivants (on donne l'erreur en valeur absolue multipliée par 10^4 pour $x = 1$).

t	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
$10^4 \times$ err.	0	10,5	21	31,5	42	52,6	63,1	73,6	84,2

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. V. KANTOROVITCH – G P. AKILOV. *Functional analysis in normed spaces.* Pergamon press, (1964)

[2] M A KRASNOSELSKII, *Topological methods in the theory of monlinear integral equations.* Pergamon press (1964)

[3] P. POUZET – C. BROUDISCOU, *Traitement numerique des equations integrales linéaires de Fredholm à résolvante partielle continue* C R Acad. Sc Paris, Série A-B 268 (1968) A 1279-A 1281.

[4] P MOREL. *Résolution de $f(x) = 0$ par intégration d'une équation différentielle sur un intervalle fini.* Séminaire d'Analyse Numérique, Lyon (1969-1970).

[5] P SABLONNIERE. *Système differentiel associe à certaines équations intégrales de type Hammerstein.* C.R. Acad. Sc. Paris, Série A-B 277 (1973) A 605 - 1 607.

[6] P.M. ANSELONE. *Non linear integral equations.* The University of Wisconsin Press, Madison (1964).

[7] P POUZET *Methodes numériques par pas pour le traitement de certaines équations intégrales linéaires de Fredholm,* Colloque d'Analyse Numérique, Aussois (1969)

[8] P HENRICI. *Discrete variable methods in ordinary differential equations,* Wiley (1962).

[9] C.N.R S. *Procedures Algol en analyse numerique.* T 2, Chapitre 3, p 101, Éditions du C.N.R S. (1970).

[10] P. SABLONNIERE *Une méthode de resolution numérique de certaines equations intégrales de type Hammerstein.* Colloque d'Analyse Numérique, Épinal (1972), Séminaire d'Analyse Numérique, Lille (1973).