R. ARCANGELI

J. L. GOUT

**Sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation de
Lagrange dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$**

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique, tome 10, n° 1 (1976), p. 5-27.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1976__10_1_5_0

© AFCET, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ÉVALUATION DE L'ERREUR D'INTERPOLATION DE LAGRANGE DANS UN OUVERT DE $\mathbb{R}^n$

par R. ARCANGELI ⁽¹⁾ et J. L. GOUT ⁽¹⁾

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — On obtient différentes évaluations de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et on en déduit des applications à la méthode des éléments finis sur des domaines polyédriques ou non polyédriques de $\mathbb{R}^n$ ainsi qu'à l'intégration numérique dans $\mathbb{R}^n$.

0. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Ce travail est consacré à une étude de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Les méthodes utilisées, basées sur la formule de Taylor avec reste intégral, permettent d'obtenir des majorations de l'erreur en semi-normes $|\cdot|_{m,p,\Omega}$ (dont la définition est rappelée ci-dessous).

On en déduit des applications à l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans la méthode des éléments finis droits et à l'estimation de l'erreur d'intégration numérique dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Enfin on étudie l'erreur d'interpolation de Lagrange polynomiale dans un « élément fini de type pseudo-simplicial » de $\mathbb{R}^n$ (cf. paragraphe 4), le résultat obtenu permettant, dans certains cas, d'éviter le recours à la théorie des éléments finis courbes.

Cette étude a pour point de départ l'article de P. G. Ciarlet et P. A. Raviart [4]. Les résultats du paragraphe 2 font suite à celui de J. Meinguet [10], où est donné un encadrement de l'erreur de meilleure approximation uniforme (cf. également G. Strang [13], P. G. Ciarlet et P. A. Raviart [5], P. G. Ciarlet et C. Wagschal [6], R. E. Barnhill et J. R. Whiteman [1], J. H. Bramble et S. R. Hilbert [2] et [3]).

Soient n un entier ≥ 1 et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On suppose $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne, notée $\|\cdot\|$, et on désigne par h le diamètre de Ω .

(1) Département de Mathématiques, Université de Pau.

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on pose

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}.$$

et on note $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ et $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$.

Soit p un réel avec $1 \leq p \leq +\infty$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev des (classes de) fonctions u qui appartiennent à $L^p(\Omega)$ ainsi que toutes leurs dérivées partielles $\partial^\alpha u$ d'ordre $|\alpha| \leq m$, muni de sa topologie naturelle. Pour tout $u \in W^{m,p}(\Omega)$, pour tout $l = 0, 1, \dots, m$ et pour presque tout $x \in \Omega$, on note $D^l u(x)$ la $l^{\text{ième}}$ dérivée de u au point x et on pose

$$\|D^l u(x)\| = \sup_{\substack{\|\xi_i\| \leq 1 \\ 1 \leq i \leq l}} |D^l u(x) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_l)|,$$

avec, par convention, $\|D^l u(x)\| = |u(x)|$ pour $l = 0$. On munit également $W^{m,p}(\Omega)$ des semi-normes

$$|u|_{l,p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \|D^l u(x)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 \leq l \leq m,$$

lorsque $p < +\infty$, avec la modification habituelle lorsque $p = +\infty$. Toutefois, pour K compact de $\mathbb{R}^n$, on écrira pour simplifier, comme c'est l'usage, $W^{m,p}(K)$ [ou $H^m(K)$, dans le cas $p = 2$] au lieu de $W^{m,p}(\overset{\circ}{K})$, $\overset{\circ}{K}$ désignant l'intérieur de K , et $|\cdot|_{l,p,K}$ au lieu de $|\cdot|_{l,p,\overset{\circ}{K}}$.

Soit enfin k un entier ≥ 0 . On désigne par P_k l'espace des polynômes de degré $\leq k$ en les n variables $x_1, \dots, x_n$.

1. ETUDE DIRECTE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION

On suppose que

$$(1-1) \quad \left| \quad k + 1 > \frac{n}{p}, \right.$$

$$(1-2) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \Omega \text{ est un ouvert borné non vide de } \mathbb{R}^n, \text{ à frontière lipschitzienne,} \\ \text{tel que } \overline{\Omega} \text{ soit étoilé par rapport à chacun des points de } \Sigma, \end{array} \right.$$

où

$$(1-3) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \Sigma = \{a_i\}_{i=1,\dots,N} \text{ est un ensemble } P\text{-unisolvant de points de } \overline{\Omega}, \\ P \text{ désignant un espace de dimension finie } N \text{ de fonctions définies sur } \overline{\Omega}. \\ \text{tel que } P_k \subset P \subset C^k(\overline{\Omega}). \end{array} \right.$$

(Pour la définition d'ensemble P -unisolvant, comme, de façon générale, pour la définition des différentes notions utilisées dans la méthode des éléments finis, nous renvoyons à Ciarlet-Raviart [4]). On a évidemment

$$N \geq \dim P_k = \binom{n+k}{k}.$$

Pour tout $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$, pour tout $a \in \bar{\Omega}$ tel que $\bar{\Omega}$ soit étoilé par rapport au point a et pour tout $x \in \Omega$, on pose

$$(1-4) \quad J(u, a)(x) = \int_0^1 (1-t)^k D^{k+1}u(x + t(a-x)) \cdot (a-x)^{k+1} dt.$$

Compte tenu de (1-2) et (1-3), l'application de la formule de Taylor à l'ordre k avec reste intégral, donne, pour tout $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et pour tout $x \in \Omega$, les relations

$$(1-5) \quad u(a_i) = \sum_{l=0}^k \frac{D^l u(x) \cdot (a_i - x)^l}{l!} + \frac{1}{k!} J(u, a_i)(x), \quad i = 1, \dots, N.$$

On a d'abord la

Proposition 1-1

On suppose vérifiées les hypothèses (1-1), (1-2) et (1-3). Alors, pour tout $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$,

$$(1-6) \quad \|J(u, a_i)\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{k+1 - \frac{n}{p}} |u|_{k+1, p, \Omega} h^{k+1}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Démonstration

Le résultat est immédiat lorsque $p = +\infty$. On se borne à étudier le cas $1 < p < +\infty$, la démonstration se simplifiant dans le cas $p = 1$. On a

$$\begin{aligned} |J(u, a_i)(x)| &\leq h^{k+1} \int_0^1 (1-t)^k \|D^{k+1}u(x + t(a_i - x))\| dt \\ &\leq h^{k+1} \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{q}+\varepsilon} (1-t)^{k+\frac{1}{q}-\varepsilon} \|D^{k+1}u(x + t(a_i - x))\| dt, \end{aligned}$$

où ε est un nombre positif tel que $(k+1)p - p\varepsilon - n > 0$ et q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En appliquant l'inégalité de Hölder, il vient

$$\begin{aligned} |J(u, a_i)(x)| &\leq h^{k+1} \left(\int_0^1 (1-t)^{-1+q\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad \left(\int_0^1 (1-t)^{pk+\frac{p}{q}-p\varepsilon} \|D^{k+1}u(x+t(a_i-x))\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq h^{k+1} \left(\frac{1}{q\varepsilon} \right)^{1/q} \left(\int_0^1 (1-t)^{pk+p-1-p\varepsilon} \|D^{k+1}u(x+t(a_i-x))\|^p dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |J(u, a_i)(x)|^p dx &\leq h^{p(k+1)} \left(\frac{1}{q\varepsilon} \right)^{p-1} \int_{\Omega \times]0,1[} (1-t)^{p(k+1)-1-p\varepsilon} \|D^{k+1}u(x+t(a_i-x))\|^p dx dt. \end{aligned}$$

Effectuant dans l'intégrale du second membre le changement de variables

$$\begin{cases} y_j = x_j + t(a_{i,j} - x_j), & j = 1, \dots, n \\ s = t, \end{cases}$$

On obtient

$$\int_{\Omega} |J(u, a_i)(x)|^p dx \leq h^{p(k+1)} \left(\frac{1}{q\varepsilon} \right)^{p-1} \int_{\mathcal{C}} (1-s)^{p(k+1)-1-p\varepsilon-n} \|D^{k+1}u(y)\|^p dy ds,$$

où $\mathcal{C}$ est un cône ouvert de base Ω et de hauteur 1 inscrit dans $\Omega \times]0,1[$. D'où l'inégalité

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |J(u, a_i)(x)|^p dx &\leq h^{p(k+1)} \left(\frac{1}{q\varepsilon} \right)^{p-1} \left(\int_0^1 (1-s)^{p(k+1)-1-p\varepsilon-n} ds \right) \left(\int_{\Omega} \|D^{k+1}u(y)\|^p dy \right), \end{aligned}$$

soit

$$\int_{\Omega} |J(u, a_i)(x)|^p dx \leq \left(\frac{1}{q\varepsilon} \right)^{p-1} \frac{1}{(k+1)p - p\varepsilon - n} |u|_{k+1,p,\Omega}^p h^{p(k+1)},$$

et le résultat, avec $\varepsilon = \frac{1}{q} \left[(k+1) - \frac{n}{p} \right]$. $\square$

On peut maintenant montrer le

Théorème 1-1

On suppose vérifiées les hypothèses (1-1), (1-2) et (1-3). Soient Π l'opérateur de P -interpolation de Lagrange sur Σ et $\{p_i\}_{i=1,\dots,N}$ l'ensemble des fonctions de base de P relativement à Σ . Alors pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ et pour tout $m = 0, 1, \dots, k$, on a :

$$(1-7) \quad |u - \Pi u|_{m,p,\Omega} \leq \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1 - \frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^N |p_i|_{m,\infty,\Omega} \right) |u|_{k+1,p,\Omega} h^{k+1}.$$

Démonstration

1° On montre d'abord (1-7) pour $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et $p < +\infty$. Pour cela on reprend la démonstration du théorème 1 de Ciarlet-Raviart [4] en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, les p_i désignant ici les fonctions de base de P relativement à Σ . On obtient de même, pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $m = 0, 1, \dots, k$, la relation

$$D^m(\Pi u)(x) - D^m u(x) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^N J(u, a_i)(x) D^m p_i(x),$$

où $J(u, a_i)(x)$ est défini par (1-4). On en déduit que

$$|u - \Pi u|_{m,p,\Omega} \leq \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^N |p_i|_{m,\infty,\Omega} \|J(u, a_i)\|_{L^p(\Omega)}$$

et le résultat suit compte tenu de (1-6).

2° On en déduit le résultat général en distinguant les cas $p < +\infty$ et $p = +\infty$.

On vérifie en effet que, pour tout p tel que $1 \leq p \leq +\infty$ et pour tout $m = 0, 1, \dots, k$, on a : $\Pi \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega))$. D'autre part,

— lorsque $p < +\infty$, on sait que $C^{k+1}(\bar{\Omega})$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$ pour tout $m = 0, 1, \dots, k+1$, puisque Ω est borné à frontière continue (cf. J. Nečas [11]). Il suffit alors de raisonner par densité pour conclure.

— lorsque $p = +\infty$, on remarque que, pour tout $p \geq 1$:

$$W^{k+1,\infty}(\Omega) \subset W^{k+1,p}(\Omega),$$

car Ω est borné. Dans ce cas, la relation (1-7) s'obtient en faisant tendre p vers $+\infty$ dans le résultat précédent.

REMARQUE 1-1

Le théorème 1-1 s'applique évidemment à la méthode des éléments finis droits. Considérons seulement le cas des éléments finis de type n -simplexe : soit donc $(\mathcal{T}_h)$ une suite de triangulations d'un ouvert polyédrique de $\mathbb{R}^n$

(cf. P. A. Raviart [12]) et supposons alors que $\bar{\Omega}$ soit un élément quelconque K d'une triangulation $\mathcal{T}_h$.

Dans ce cas, il est important de remarquer que, lorsque la suite de triangulations $(\mathcal{T}_h)$ est *régulière* (au sens de Ciarlet-Raviart [4]), la formule (1-7) conduit à des majorations *uniformes* de l'erreur d'interpolation (nous entendons par là que ces majorations sont de la forme

$$|u - \Pi u|_{m,p,K} \leq C(n, k, m, p) |u|_{k+1,p,K} h^{k+1-m},$$

où $C(n, k, m, p)$ ne dépend pas de Σ et de K) : il suffit, pour le vérifier, d'utiliser un changement de variables qui ramène le calcul des $|p_i|_{m,\infty,K}$ à un calcul dans un n -simplexe de référence et de tenir compte de résultats de [4].

REMARQUE 1-2

Montrons maintenant que l'on peut *calculer* effectivement des majorations de l'erreur d'interpolation dans la méthode des éléments finis droits. Soient toujours $(\mathcal{T}_h)$ une suite de triangulations d'un ouvert polyédrique de $\mathbb{R}^n$ et $\bar{\Omega} = K$ un élément quelconque d'une triangulation $\mathcal{T}_h$. Supposons que les fonctions de base p_i soient explicitées sous la forme

$$p_i(x) = f_i(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)), \quad i = 1, \dots, N,$$

où les f_i sont des fonctions de classe C^k indépendantes de Σ et de K et où $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$ désignent les coordonnées barycentriques de x par rapport aux sommets du n -simplexe K .

On vérifie que, pour tout $m = 0, 1, \dots, k$ et pour tout $i = 1, \dots, N$

$$\|D^m p_i(x)\| \leq \left(\max_{j=1, \dots, n+1} \|D\lambda_j\| \right)^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha f_i(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x))|,$$

où ici $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$. Il résulte alors des relations (cf. Ciarlet-Wagschal [6])

$$\|D\lambda_j\| \leq \frac{1}{\rho}, \quad j = 1, \dots, n+1,$$

où ρ désigne le maximum des diamètres des sphères contenues dans K , que l'on a, pour tout $m = 0, 1, \dots, k$,

$$(1-8) \quad |u - \Pi u|_{m,p,K} \leq C(n, k, m, p, K) |u|_{k+1,p,K} \frac{h^{k+1}}{\rho^m},$$

avec

$$(1-9) \quad C(n, k, m, p, K) = \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1 - \frac{n}{p}} \sum_{i=1}^N \max_{x \in K} \left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha f_i(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x))| \right).$$

On constate que le second membre de (1-9) est en fait indépendant de K (il ne dépend que d'un n -simplexe fixe). On vérifie donc à nouveau que, si la suite de triangulations $(\mathcal{T}_h)$ est régulière, les majorations (1-8) sont uniformes.

On retrouve ainsi le théorème 5 de Ciarlet-Raviart [4] dans le cas où Π est l'opérateur de P -interpolation de Lagrange sur Σ .

Il est à souligner que le calcul des constantes (1-9) s'effectue directement et ne nécessite donc pas le passage par un élément fini de référence.

Du point de vue numérique, ce calcul présente des difficultés, même dans le cas où P est un espace de polynômes (on est ramené à la détermination de maximums de fonctions de $n + 1$ variables). Notons cependant que le calcul est aisé lorsque $m = k$ et $P = P_k$.

La méthode du paragraphe suivant, lorsqu'elle est applicable (cf. remarque 2-3), ne présente pas les mêmes inconvénients.

2. ETUDE BASEE SUR L'APPROXIMATION

Commençons par un résultat d'approximation.

Soient n un entier ≥ 1 , p un réel avec $1 \leq p \leq +\infty$, k un entier tel que $k + 1 > \frac{n}{p}$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de diamètre h .

Pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ $1 \leq p \leq +\infty$, et pour presque tout $a \in \Omega$, on note $\psi_T(u, a)$ le « polynôme de Taylor à l'ordre k de u au point a », défini par

$$(2-1) \quad \forall x \in \Omega, \quad \psi_T(u, a)(x) = \sum_{l=0}^k \frac{D^l u(a) \cdot (x - a)^l}{l!},$$

et $D^m \psi_T(u, a)$ la dérivée $m^{\text{ième}}$ de l'application $x \rightarrow \psi_T(u, a)(x)$. On vérifie que l'application $(x, a) \rightarrow \|D^m \psi_T(u, a)(x)\|$ appartient à $L^p(\Omega \times \Omega)$.

Proposition 2-1

On suppose que n, p, k vérifient (1-1) et que Ω est un ouvert convexe borné non vide de $\mathbb{R}^n$, à frontière continue. Alors pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ et pour tout entier $m \geq 0$ tel que $k + 1 > m + \frac{n}{p}$, on a :

(i) Si $p < +\infty$,

$$\min_{\psi \in P_k} |u - \psi|_{m,p,\Omega} \leq \left(\frac{1}{\text{mes } \Omega} \int_{\Omega} |u - \psi_T(u, a)|_{m,p,\Omega}^p da \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{k+1-m-\frac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega} h^{k+1-m}$$

(ii) Si $p = +\infty$,

$$\min_{\psi \in p_k} |u - \psi|_{m, \infty, \Omega} \leq \sup_{a \in \Omega} \operatorname{ess} |u - \psi_T(u, a)|_{m, \infty, \Omega} \leq \frac{1}{(k+1-m)!} |u|_{k+1, \infty, \Omega} h^{k+1-m},$$

où $\psi_T(u, a)$ est défini par (2-1).

Démonstration

Dans (i) [resp. (ii)], la première inégalité est évidente. Tout revient donc, dans chaque cas, à vérifier la seconde.

1° Montrons d'abord la seconde inégalité dans (i) pour $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$. On se borne à étudier le cas $1 < p < +\infty$, la démonstration se simplifiant dans le cas $p = 1$.

Soient $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et a un point quelconque de Ω . On a

$$|u - \psi_T(u, a)|_{m, p, \Omega} = \left(\int_{\Omega} \|D^m u(x) - D^m \psi_T(u, a)(x)\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'après la formule de Taylor à l'ordre $k - m$ pour $D^m u$ au voisinage de a , on a :

$$\begin{aligned} D^m u(x) - D^m \psi_T(u, a)(x) \\ = \frac{1}{(k-m)!} \int_0^1 (1-t)^{k-m} D^{k+1} u(a + t(x-a)) \cdot (x-a)^{k+1-m} dt, \end{aligned}$$

d'où

$$\|D^m u(x) - D^m \psi_T(u, a)(x)\| \leq \frac{h^{k+1-m}}{(k-m)!} \int_0^1 (1-t)^{k-m} \|D^{k+1} u(a + t(x-a))\| dt.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} \|D^m u(x) - D^m \psi_T(u, a)(x)\|^p \\ \leq \left(\frac{h^{k+1-m}}{(k-m)!} \right)^p \left(\frac{1}{q\varepsilon} \right)^{p-1} \int_0^1 (1-t)^{(k+1-m)p-1-p\varepsilon} \|D^{k+1} u(a + t(x-a))\|^p dt, \end{aligned}$$

où ε est un nombre positif tel que $(k+1-m)p - p\varepsilon - n > 0$ et q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

En intégrant successivement les deux membres de l'inégalité précédente par rapport à x sur Ω , puis par rapport à a sur Ω , on a

$$\int_{\Omega} |u - \psi_T(u, a)|_{m,p,\Omega}^p da \leq \left(\frac{h^{k+1-m}}{(k-m)!} \right)^p \left(\frac{1}{q\varepsilon} \right)^{p-1} \\ \int_{\Omega} da \int_{\Omega} dx \int_0^1 (1-t)^{(k+1-m)p-1-p\varepsilon} \|D^{k+1}u(a + t(x-a))\|^p dt.$$

Après permutation des intégrations en x et a , l'intégrale du second membre s'écrit

$$\int_{\Omega} dx \int_{\Omega \times]0,1[} (1-t)^{(k+1-m)p-1-p\varepsilon} \|D^{k+1}u(a + t(x-a))\|^p da dt,$$

et en raisonnant comme dans la démonstration de la proposition 1-1, avec ici $\varepsilon = \frac{1}{q} \left(k+1-m-\frac{n}{p} \right)$, on obtient

$$\int_{\Omega} |u - \psi_T(u, a)|_{m,p,\Omega}^p da \\ \leq (\text{mes } \Omega) \left(\frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{k+1-m-\frac{n}{p}} \right)^p |u|_{k+1,p,\Omega}^p h^{(k+1-m)p},$$

d'où la seconde inégalité dans (i) pour $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$.

2° Montrons maintenant que le résultat précédent est encore valable pour $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$, $p < +\infty$.

Soient $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$, $p < +\infty$ et $(u_j) \subset C^{k+1}(\Omega)$ une suite convergeant vers u dans $W^{k+1,p}(\Omega)$: il suffit de vérifier que, quand $j \rightarrow +\infty$,

$$\left(\int_{\Omega} |u_j - \psi_T(u_j, a)|_{m,p,\Omega}^p da \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow \left(\int_{\Omega} |u - \psi_T(u, a)|_{m,p,\Omega}^p da \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Or, on a

$$\left| \left(\int_{\Omega} |u - \psi_T(u, a)|_{m,p,\Omega}^p da \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_{\Omega} |u_j - \psi_T(u_j, a)|_{m,p,\Omega}^p da \right)^{\frac{1}{p}} \right| \\ \leq \left(\int_{\Omega} |u - u_j|_{m,p,\Omega}^p da \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |\psi_T(u, a) - \psi_T(u_j, a)|_{m,p,\Omega}^p da \right)^{\frac{1}{p}},$$

où les deux termes du second membre tendent vers 0, le premier par hypothèse et le second parce que majoré par

$$(\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}} \sum_{l=m}^k \frac{h^{l-m}}{(l-m)!} |u - u_j|_{l,p,\Omega}.$$

3° La seconde inégalité dans (ii) résulte de l'inégalité correspondante dans (i). En effet, si $u \in W^{k+1, \infty}(\Omega)$ alors $u \in W^{k+1, p}(\Omega)$ pour tout $p \geq 1$, puisque Ω est borné, et il suffit de faire tendre p vers $+\infty$ dans (i) pour obtenir le résultat. $\square$

Notons que la proposition 2-1 peut n'avoir lieu que pour $m = 0$. $\square$

Signalons également que lorsque $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$, on a (cf. J. Meinguet [10]) l'inégalité

$$\min_{\psi \in P_k} |u - \psi|_{m, \infty, \Omega} \leq \frac{1}{(k+1-m)!} |u|_{k+1, \infty, \Omega} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1-m} \square.$$

On déduit de la proposition suivante 2-1 le résultat suivant, qui a pour point de départ une idée de J. Meinguet [10] :

Théorème 2-1

On suppose que Ω est un ouvert convexe borné non vide de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne, que les hypothèses (1-1) et (1-3) sont vérifiées et que Π est l'opérateur de P -interpolation de Lagrange sur Σ .

Alors, pour tout $u \in W^{k+1, p}(\Omega)$ et pour tout entier $m \geq 0$ tel que

$$k+1 > m + \frac{n}{p},$$

on a :

$$(2-2) \quad |u - \Pi u|_{m, p, \Omega} \leq \frac{1}{(k-m)!} \frac{1}{k+1-m-\frac{n}{p}} |u|_{k+1, p, \Omega} h^{k+1-m} \\ + \frac{1}{(\text{mes } \Omega)^{1/p}} \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1-\frac{n}{p}} \left(\sum_{i=1}^N |p_i|_{m, p, \Omega} \right) |u|_{k+1, p, \Omega} h^{k+1},$$

où $\{p_i\}_{i=1, \dots, N}$ désigne l'ensemble des fonctions de base de P relativement à Σ .

Démonstration

Soient n, p, k vérifiant (1-1) avec $p < +\infty$, $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et m un entier ≥ 0 avec $k+1 > m + \frac{n}{p}$.

Puisque

$$\forall \psi \in P, \quad \psi = \Pi \psi,$$

on a, pour tout $\psi \in P$:

$$\begin{aligned} |u - \Pi u|_{m,p,\Omega} &\leq |u - \psi|_{m,p,\Omega} + |\Pi(u - \psi)|_{m,p,\Omega} \\ &\leq |u - \psi|_{m,p,\Omega} + \left| \sum_{i=1}^N (u - \psi)(a_i) p_i \right|_{m,p,\Omega} \end{aligned}$$

Prenant $\psi = \psi_T(u, a)$, avec $a \in \Omega$, quelconque, on obtient

$$|u - \Pi u|_{m,p,\Omega} \leq |u - \psi_T(u, a)|_{m,p,\Omega} + \sum_{i=1}^N |u(a_i) - \psi_T(u, a)(a_i)| |p_i|_{m,p,\Omega},$$

d'où, en prenant les normes $L^p(\Omega)$ des deux membres considérés comme fonctions de la variable a , l'inégalité

$$\begin{aligned} (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{p}} |u - \Pi u|_{m,p,\Omega} &\leq \left(\int_{\Omega} |u - \psi_T(u, a)|_{m,p,\Omega}^p da \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \left(\int_{\Omega} |u(a_i) - \psi_T(u, a)(a_i)|^p da \right)^{\frac{1}{p}} |p_i|_{m,p,\Omega}. \end{aligned}$$

Utilisant la proposition (2-1), point (i), avec $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, et compte tenu de ce que, d'après la proposition (1-1)

$$\left(\int_{\Omega} |u(a_i) - \psi_T(u, a)(a_i)|^p da \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1 - \frac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega} h^{k+1},$$

on obtient (2-2) pour $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ et $p < +\infty$.

Il suffit alors de reprendre la démonstration du théorème 1-1, 2° pour en déduire le cas général.

REMARQUE 2-1

Comme le théorème 1-1, le théorème 2-1 s'applique à la méthode des éléments finis droits. Ici aussi et pour les mêmes raisons que celles qui ont été développées dans la remarque 1-1, la formule (2-2) fournit, lorsque la suite de triangulation est régulière, des majorations uniformes de l'erreur d'interpolation dans un n -simplexe.

REMARQUE 2-2

Sous les mêmes hypothèses et avec les mêmes notations que dans la remarque 1-1, on obtient, pour tout $i = 1, \dots, N$ et pour tout entier $m \geq 0$ tel que $k+1 > m + \frac{n}{p}$ avec $p < +\infty$, la relation

$$(2-3) \quad |p_i|_{m,p,K} \leq \frac{1}{\rho^m} \left\{ \int_K \left[\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha f_i(\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x))| \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Lorsque P est un espace de *polynômes*, le calcul des majorations (2-3) ne présente pas de difficultés particulières : on peut utiliser la formule

$$\int_K (\lambda_1(x))^{v_1} \dots (\lambda_{n+1}(x))^{v_{n+1}} dx = \frac{v_1! \dots v_{n+1}!}{(v_1 + \dots + v_{n+1} + n)!} n! \text{ mes } K,$$

$v_1, \dots, v_{n+1} \in \mathbb{N},$

(cf. O. C. Zienkiewicz [15]) pour calculer le second membre de (2-3) ce qui conduit à des majorations du type

$$|p_i|_{m,p,K} \leq C_i \frac{(\text{mes } K)^{\frac{1}{p}}}{\rho^m},$$

où les C_i sont des constantes indépendantes de Σ et de K .

REMARQUE 2-3

Rappelons que le théorème 2-1 nécessite l'hypothèse $k + 1 > m + \frac{n}{p}$: il peut donc n'avoir lieu que pour $m = 0$, alors que le théorème 1-1 est toujours valable pour $m = 0, 1, \dots, k$.

Du point de vue du calcul numérique, l'utilisation du théorème 1-1 implique (cf. remarque 1-2) la détermination de maximums de fonctions de plusieurs variables, tandis que l'application du théorème 2-1 pour $p < +\infty$ entraîne seulement le calcul d'intégrales (cf. remarque 2-2). D'autre part, l'expérience montre que, pour $p < +\infty$, le théorème 2-1 donne de meilleurs résultats numériques que le théorème 1-1 (cf. les exemples numériques du paragraphe 3).

Notons enfin que dans le cas usuel $n = p = 2$, on a la possibilité d'utiliser le théorème 2-1 pour $m = 0, 1, \dots, k - 1$ et le théorème 1-1 pour $m = k$.

3. APPLICATIONS

3-1. Exemples d'application à la méthode des éléments finis droits

Soit K un triangle quelconque de $\mathbb{R}^2$. On note h le diamètre de K et ρ le diamètre du cercle inscrit dans K .

Donnons d'abord des exemples d'application du théorème 1-1 dans le cas $p = 2$.

EXEMPLE 3-1

On prend pour Σ l'ensemble des sommets de K et pour P l'espace P_1 .

$m = 0$: On obtient $\sum_{i=1}^3 |p_i|_{0,\infty,K} = 3$, d'où

$$\forall u \in H^2(K), \quad |u - \Pi u|_{0,2,K} \leq 3 |u|_{2,2,K} h^2$$

$m = 1$: On obtient $\sum_{i=1}^3 |p_i|_{1,\infty,K} \leq \frac{3}{\rho}$, d'où

$$\forall u \in H^2(K), \quad |u - \Pi u|_{1,2,K} \leq 3 |u|_{2,2,K} \frac{h^2}{\rho}$$

EXEMPLE 3-2

On prend pour Σ l'ensemble des sommets et des milieux des côtés de K et pour P l'espace P_2 .

$m = 0$: On obtient $\sum_{i=1}^6 |p_i|_{0,\infty,K} = 6$, d'où

$$\forall u \in H^3(K), \quad |u - \Pi u|_{0,2,K} \leq 2 |u|_{3,2,K} h^3$$

$m = 1$: On obtient $\sum_{i=1}^6 |p_i|_{1,\infty,K} \leq \frac{21}{\rho}$, d'où

$$\forall u \in H^3(K), \quad |u - \Pi u|_{1,2,K} \leq 6 |u|_{3,2,K} \frac{h^3}{\rho}$$

$m = 2$: On obtient $\sum_{i=1}^6 |p_i|_{2,\infty,K} \leq \frac{36}{\rho^3}$, d'où

$$\forall u \in H^3(K), \quad |u - \Pi u|_{2,2,K} \leq 9 |u|_{3,2,K} \frac{h^3}{\rho^3}. \quad \square$$

Reprenons les exemples précédents en appliquant maintenant le théorème 2-1.

Cas de l'exemple 3-1 : On a $k = 1$, $n = p = 2$, donc le théorème (2-1) n'a lieu que pour $m = 0$.

On obtient $\sum_{i=1}^3 |p_i|_{0,2,K} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\text{mes } K)^{\frac{1}{2}}$, d'où

$$\forall u \in H^2(K), \quad |u - \Pi u|_{0,2,K} \leq 3 |u|_{2,2,K} h^2$$

Cas de l'exemple 3-2 : Ici $k = 2$, $n = p = 2$: les seules valeurs possibles de m sont $m = 0$ et $m = 1$.

$m = 0$: On obtient $\sum_{i=1}^6 |p_i|_{0,2,K} = \frac{4 + \sqrt{3}}{\sqrt{10}} (\text{mes } K)^{1/2}$, d'où

$$\forall u \in H^3(K), \quad |u - \Pi u|_{0,2,K} \leq |u|_{3,2,K} h^3$$

$m = 1$: On obtient $\sum_{i=1}^6 |p_i|_{1,2,K} \leq \frac{3 + 6\sqrt{2}}{\rho} (\text{mes } K)^{1/2}$, d'où

$$\forall u \in H^3(K), \quad |u - \Pi u|_{1,2,K} \leq \left(1 + 3 \frac{h}{\rho}\right) |u|_{3,2,K} h^2. \quad \square$$

On peut remarquer que, lorsqu'il est applicable, le théorème 2-1 donne de meilleurs résultats que le théorème 1-1.

3-2. Application à l'intégration numérique

Pour tout $u \in C^0(\overline{\Omega})$, soit

$$(3-1) \quad R(u) = \int_{\Omega} u(x) \, dx - \sum_{i=1}^N \omega_i u(a_i)$$

l'erreur d'intégration de u sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ correspondant à une formule d'intégration approchée caractérisée par des poids ω_i , $i = 1, \dots, N$ et des points $a_i \in \overline{\Omega}$, $i = 1, \dots, N$. On suppose que

$$(3-2) \quad \forall \psi \in P_k, \quad R\psi = 0,$$

i.e. que l'intégration est exacte sur P_k . Notons que l'on a

$$(3-3) \quad \sum_{i=1}^N \omega_i = \text{mes } \Omega.$$

Théorème 3-1

On suppose que n, p, k vérifient (1-1), que Ω est un ouvert convexe borné non vide de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne, que R est la forme linéaire définie par (3-1) et (3-2).

Alors, pour tout $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$, on a :

$$(3-4) \quad |R(u)| \leq \left((\text{mes } \Omega)^{1/q} + \frac{\sum_{i=1}^N |\omega_i|}{(\text{mes } \Omega)^{1/p}} \right) \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1 - \frac{n}{p}} |u|_{k+1,p,K} h^{k+1},$$

où q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Démonstration

Il suffit de montrer (3-4) pour $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ et $p < +\infty$, le cas général résultant alors d'un raisonnement précédemment utilisé.

Soit donc $u \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$. On déduit de (3-1) et (3-2) que

$$|R(u)| \leq |u - \psi_T(u, a)|_{0,1,\Omega} + \sum_{i=1}^N |\omega_i| |u(a_i) - \psi_T(u, a)(a_i)|$$

où $\psi_T(u, a)$, avec $a \in \Omega$, quelconque, est défini par (2-1). On a encore

$$|R(u)| \leq (\text{mes } \Omega)^{1/q} |u - \psi_T(u, a)|_{0,p,\Omega} + \sum_{i=1}^N |\omega_i| |u(a_i) - \psi_T(u, a)(a_i)|.$$

Prenant alors les normes $L^p(\Omega)$ des deux membres considérés comme fonction de la variable a , on obtient

$$\begin{aligned} |R(u)| &\leq (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\text{mes } \Omega} \int_{\Omega} |u - \psi_T(u, a)|_{0,p,\Omega}^p da \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \frac{\sum_{i=1}^N |\omega_i|}{(\text{mes } \Omega)^{1/p}} \left(\int_{\Omega} |u(a_i) - \psi_T(u, a)(a_i)|^p da \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

On procède ensuite comme dans la démonstration du théorème (2-1) et le résultat suit. $\square$

Notons que lorsque les poids ω_i sont positifs, il résulte de (3-3) que (3-4) s'écrit

$$|R(u)| \leq 2 (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1 - \frac{n}{p}} |u|_{k+1,p,\Omega} h^{k+1}. \quad \square$$

A notre connaissance, ce théorème (dans $W^{k+1,p}(\Omega)$ et en semi-normes $|\cdot|_{k+1,p,\Omega}$) est nouveau. Il prolonge (mais avec h au lieu de $\frac{h}{2}$) le résultat suivant dû à J. Meinguet [10] :

$$\forall u \in C^{k+1}(\bar{\Omega}), \quad |R(u)| \leq 2 \text{mes } \Omega \frac{1}{(k+1)!} |u|_{k+1,\infty,\Omega} \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1},$$

où les poids ω_i sont supposés positifs.

4. INTERPOLATION POLYNOMIALE DANS UN ELEMENT FINI DE TYPE PSEUDO-SIMPLICIAL. APPLICATION A L'ETUDE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION DANS UN DOMAINE COURBE

Dans les paragraphes 1 et 2, nous avons obtenu des résultats généraux d'interpolation dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, mais nous avons vu que les applications à la méthode des éléments finis se limitaient au cas des n -simplexes de $\mathbb{R}^n$.

Dans ce paragraphe, nous allons, par une autre méthode, étudier l'interpolation *polynomiale* dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de type *non* (nécessairement) *simplicial*. On verra que le résultat obtenu permet d'estimer l'erreur d'interpolation dans des méthodes d'éléments finis *droits* sur des domaines *courbes* de $\mathbb{R}^n$.

Soit K un fermé de $\mathbb{R}^n$ (on supposera ultérieurement que K est un « élément fini de type pseudo-simplicial », en fait un élément d'un recouvrement convenable d'un domaine *courbe* de $\mathbb{R}^n$). On suppose que les hypothèses (1-2) et (1-3) sont vérifiées avec $\Omega = \overset{\circ}{K}$ et que, de plus :

$$(4-1) \quad P = P_k.$$

Notons que (4-1) implique qu'ici :

$$N = \binom{n+k}{k}.$$

Soient maintenant $v \in C^{k+1}(K)$ s'annulant sur Σ et $x \in \overset{\circ}{K}$. L'application de la formule de Taylor à l'ordre k avec reste intégral donne les relations

$$(4-2) \quad \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha v(x)}{\alpha!} (a_i - x)^\alpha = -\frac{1}{k!} J(v, a_i)(x), \quad i = 1, \dots, N,$$

où, pour tout $i = 1, \dots, N$, $J(v, a_i)(x)$ est défini par (1-4).

On notera $\Delta(x)$ le déterminant de (4-2) considéré comme système linéaire de N équations aux N inconnues $\frac{\partial^\alpha v(x)}{\alpha!}$, $|\alpha| \leq k$, supposées rangées dans un ordre quelconque (par exemple en ordonnant suivant la longueur des multi-indices α , et pour des multi-indices de même longueur suivant l'ordre lexicographique) :

$$(4-3) \quad \Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & (a_{1,1} - x_1) & \dots & (a_1 - x)^\alpha & \dots & (a_{1,n} - x_n)^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & (a_{i,1} - x_1) & \dots & (a_i - x)^\alpha & \dots & (a_{i,n} - x_n)^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & (a_{N,1} - x_1) & \dots & (a_N - x)^\alpha & \dots & (a_{N,n} - x_n)^k \end{vmatrix}$$

où le terme général de la $i^{\text{ème}}$ -ligne n'est autre que

$$(a_i - x)^\alpha = (a_{i,1} - x_1)^{\alpha_1} \dots (a_{i,n} - x_n)^{\alpha_n}.$$

On a d'abord :

Proposition 4-1

On suppose vérifiées les hypothèses (1-2), (1-3) et (4-1). Alors $\Delta(x)$ est indépendant de x et non nul.

Démonstration

— Le premier point se vérifie immédiatement par dérivation.

On a donc $\Delta(x) = \Delta(0)$ et on notera dans la suite Δ au lieu de $\Delta(x)$.

— Pour le second point, on considère (4-2) avec $v \in P_k$: la condition d'unisolvance (1-3) implique alors avec (4-1) que le système (4-2), où les restes intégraux sont alors nuls, n'a que la solution zéro. Donc $\Delta \neq 0$. $\square$

On en déduit trivialement, sous les hypothèses (1-2), (1-3) et (4-1) que, pour tout $v \in C^{k+1}(K)$ s'annulant sur Σ , pour tout $x \in \overset{\circ}{K}$, pour tout α tel que $|\alpha| \leq k$, on a :

$$(4-4) \quad \frac{\partial^\alpha v(x)}{\alpha!} = \frac{\Delta_\alpha(x)}{\Delta},$$

où les $\Delta_\alpha(x)$ sont les déterminants qui interviennent dans la résolution du système de Cramer (4-2). On vérifie que les $\Delta_\alpha(x)$ dépendent en général de x .

Il vient ensuite la

Proposition 4-2

On suppose vérifiées les hypothèses (1-1), (4-1), ainsi que (1-2) et (1-3) avec $\Omega = \overset{\circ}{K}$. Alors pour tout $m = 0, 1, \dots, k$, il existe une constante $C(n, k, m, p)$ telle que, pour tout $u \in W^{k+1,p}(K)$, on ait :

$$(4-5) \quad |u - \Pi u|_{m,p,K} \leq C(n, k, m, p) \frac{1}{|\Delta|} |u|_{k+1,p,K} h_K^{nv(n,k)+k+1-m},$$

où Π est l'opérateur de P_k -interpolation de Lagrange sur Σ , Δ le déterminant (4-3), h_K le diamètre de K et $v(n, k) = \sum_{j=1}^k \binom{n+j-1}{j-1}$.

Démonstration

Ici encore, il suffit de montrer (4-5) pour $u \in C^{k+1}(K)$.

Soit $v \in C^{k+1}(K)$ s'annulant sur Σ . Rappelons que, pour tout déterminant

$$D = \begin{vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1G} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{G1} & \dots & d_{GG} \end{vmatrix}, \text{ on a la majoration : } |D| \leq \prod_{j=1}^G \sum_{i=1}^G |d_{ij}|.$$

On en déduit que, pour tout α tel que $|\alpha| \leq k$ et pour tout $x \in K$, il existe une constante $C_0(n, k)$ telle que

$$(4-6) \quad |\Delta_\alpha(x)| \leq C_0(n, k) \left(\sum_{i=1}^N |J(v, a_i)(x)| \right) h_K^{nv(n, k) - m},$$

où $m = |\alpha|$ et

$$v(n, k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k j \binom{n+j-1}{j} = \sum_{j=1}^k \binom{n+j-1}{j-1}.$$

Il résulte alors de (4-4) et (4-6) que, pour tout $m = 0, 1, \dots, k$ et pour tout $x \in \overset{\circ}{K}$,

$$\text{Max}_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)| \leq m! C_0(n, k) \frac{1}{|\Delta|} \left(\sum_{i=1}^N |J(v, a_i)(x)| \right) h_K^{nv(n, k) - m}.$$

Étant donné que

$$|v|_{m, p, K} \leq n^{\frac{m}{2}} \left(\int_{\overset{\circ}{K}} [\text{Max}_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)|]^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

on obtient en utilisant (1-6), pour tout $m = 0, 1, \dots, k$, la relation

$$(4-7) \quad |v|_{m, p, K} \leq (n, k, m, p) \frac{1}{|\Delta|} |v|_{k+1, p, K} h_K^{nv(n, k) + k + 1 - m},$$

où $C(n, k, m, p)$ désigne une constante convenable.

Soit maintenant $u \in C^{k+1}(K)$, quelconque. Alors $u - \Pi u \in C^{k+1}(K)$: On peut écrire (4-7) avec $v = u - \Pi u$, ce qui donne (4-5) avec $u \in C^{k+1}(K)$. $\square$

Pour toute application affine inversible F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, on a :

Proposition 4-3

Soient Δ le déterminant (4-3) et $\hat{\Delta}$ le déterminant (4-3) où l'on a remplacé a_i par $\hat{a}_i = F^{-1}(a_i)$, $i = 1, \dots, N$.

Alors

$$(4-8) \quad \Delta = (\det B)^{v(n, k)} \hat{\Delta},$$

où B est l'application linéaire associée à F et où $v(n, k) = \sum_{j=1}^k \binom{n+j-1}{j-1}$.

Démonstration. — Posons

$$\Delta = \Phi(a_1, \dots, a_N)$$

et notons

$$\forall \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \quad F(\hat{x}) = B\hat{x} + b,$$

avec $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, inversible et $b \in \mathbb{R}^n$.

On a encore

$$(4-9) \quad \Delta = \Phi(F(\hat{a}_1), \dots, F(\hat{a}_N)).$$

a) On vérifie d'abord que le second membre de (4-9) est indépendant de b : ce résultat s'obtient en dérivant par rapport aux composantes b_i de b .

On a donc

$$\Delta = \Phi(B\hat{a}_1, \dots, B\hat{a}_N).$$

b) Dans un premier temps, montrons (4-8) lorsque la matrice (notée encore B) de l'application linéaire B relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, est *triangulaire*.

Supposons, pour fixer les idées, que B soit triangulaire supérieure :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ 0 & & \dots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Calculons la dérivée de $\Phi(B\hat{a}_1, \dots, B\hat{a}_N)$ par rapport à $b_{l,n}$, $1 \leq l \leq n-1$. Étant donné que

$$\forall i = 1, \dots, N : \frac{\partial [(B\hat{a}_i)^\alpha]}{\partial b_{l,n}} = \frac{\alpha_l}{b_{nn}} (B\hat{a}_i)^\alpha,$$

avec $|\alpha'| = |\alpha|$, $\alpha' \neq \alpha$, on en déduit que

$$\forall l = 1, \dots, n-1 : \frac{\partial \Phi(B\hat{a}_1, \dots, B\hat{a}_N)}{\partial b_{l,n}} = 0.$$

En raisonnant de même successivement pour $b_{l,n-1}, b_{l,n-2}, \dots, b_{l,2}$, on montre ainsi que $\Phi(B\hat{a}_1, \dots, B\hat{a}_N)$ ne dépend que des termes diagonaux de B : On a donc

$$(B\hat{a}_i)^\alpha = \prod_{l=1}^n (b_{l,l} \hat{a}_{i,l})^{\alpha_l}.$$

Par raison de symétrie, on voit que, dans l'expression $\Phi(B\hat{a}_1, \dots, B\hat{a}_N)$, les coefficients $b_{l,l}$ interviennent tous à une même puissance, notée $v(n, k)$. On a alors

$$\Delta = \left(\prod_{l=1}^n b_{l,l} \right)^{v(n,k)} \hat{\Delta}.$$

d'où (4-8) lorsque B est triangulaire supérieure ou (par une démonstration analogue) triangulaire inférieure.

c) On utilise maintenant le résultat suivant :

Toute matrice régulière s'exprime comme produit d'un nombre fini de matrices triangulaires supérieures et inférieures.

Posons

$$\begin{aligned} B &= B_q \dots B_1 \\ \text{et} \quad \hat{a}_i^{(1)} &= B_1 \hat{a}_i \\ \hat{a}_i^{(2)} &= B_2 \hat{a}_i^{(1)} \\ &\dots \dots \dots \\ a_i &= \hat{a}_i^{(q)} = B_q \hat{a}_i^{(q-1)} \end{aligned}$$

Il résulte alors du b), avec des notations évidentes, que

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}^{(1)} &= (\det B_1)^{v(n,k)} \hat{\Delta} \\ \hat{\Delta}^{(2)} &= (\det B_2)^{v(n,k)} \hat{\Delta}^{(1)} \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta &= \hat{\Delta}^{(q)} = (\det B_q)^{v(n,k)} \hat{\Delta}^{(q-1)}, \end{aligned}$$

d'où la relation (4-8) dans le cas général. $\square$

Soient maintenant K un n -simplexe non dégénéré de $\mathbb{R}^n$, $\tilde{K}$ un n -simplexe non dégénéré contenu dans K , F une application affine inversible de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\tilde{K} = F(\hat{K})$ et $\hat{\Delta}$ le déterminant (4-3) où l'on a remplacé a_i par $F^{-1}(a_i)$, $i = 1, \dots, N$.

On déduit des propositions (4-2) et (4-3) le

Théorème 4-1

On suppose vérifiées les hypothèses (1-1), (4-1), ainsi que (1-2) et (1-3) avec $\Omega = \tilde{K}$. Alors pour tout $m = 0, 1, \dots, k$, il existe une constante $\hat{C}(n, k, m, p, \hat{K}, \hat{\Delta})$ telle que pour tout $u \in W^{k+1,p}(K)$, on ait :

$$(4-10) \quad |u - \Pi u|_{m,p,K} \leq \hat{C}(n, k, m, p, \hat{K}, \hat{\Delta}) \left(\frac{h_K}{\rho_{\tilde{K}}} \right)^{nv(n,k)} |u|_{k+1,p,K} h_K^{k+1-m},$$

où Π est l'opérateur de P_k -interpolation de Lagrange sur Σ , h_K le diamètre de K , $\rho_{\tilde{K}}$ le maximum des diamètres des sphères contenues dans $\tilde{K}$ et où $v(n, k)$ est l'entier défini dans la proposition 4-2.

Démonstration

D'après la proposition 4-3

$$\frac{1}{|\Delta|} = \left(\frac{1}{|\det B|} \right)^{v(n,k)} \frac{1}{|\hat{\Delta}|}.$$

Comme d'autre part (cf. Ciarlet-Raviart [4])

$$\frac{1}{|\det B|} \leq \|B^{-1}\|^n \leq \left(\frac{h_{\hat{K}}}{\rho_{\hat{K}}}\right)^n,$$

où $h_{\hat{K}}$ est le diamètre de $\hat{K}$, on déduit (4-10) de (4-5) avec

$$\hat{C}(n, k, m, p, \hat{K}, \hat{\Delta}) = C(n, k, m, p) \frac{h_{\hat{K}}^{nv(n,k)}}{|\hat{\Delta}|} \quad \square$$

L'intérêt du théorème (4-1) réside surtout dans son application à la méthode des éléments finis.

Pour simplifier, plaçons-nous en dimension $n = 2$. Considérons un ouvert convexe borné non polyédrique Ω de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière Γ est continue et supposons réalisée une suite $(\mathcal{T}_h)$ de « triangulations » de $\bar{\Omega}$, suivant les idées de [12] : dans chaque triangulation $\mathcal{T}_h$, $\bar{\Omega}$ s'exprime comme réunion de sous-ensembles fermés K qui sont, ou bien des triangles (droits) K_d , ou bien des éléments courbes K_c dont le bord contient une partie de Γ . Un élément K_c est donc un « triangle à un ou deux côtés courbes » et on peut toujours par subdivision se ramener au cas où K_c possède un seul côté courbe. A tout élément K_c , on fait correspondre un triangle (droit) $\tilde{K}_c \subset K_c$ de telle sorte que, si on désigne par $\mathcal{K}$ l'ensemble de tous les triangles (droits) K_d et $\tilde{K}_c$ contenus dans $\bar{\Omega}$ et par $\mathcal{T}$ leur réunion, $\mathcal{T}$ soit un polyèdre et $\mathcal{K}$ réalise une triangulation de $\mathcal{T}$. Dans la pratique, le choix de $\tilde{K}_c$ sera le plus souvent canonique : on prendra pour K_c le triangle construit sur les « sommets » de K_c .

Soit maintenant $\mathcal{T}_h$ une triangulation du type précédent. Donnons-nous un ensemble P_k -unisolvant quelconque $\hat{\Sigma}$ de N points de $\mathbb{R}^2$. Notons $\hat{K}$ l'enveloppe convexe fermée de $\hat{\Sigma}$ et, pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, désignons par F_K une application affine inversible de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, telle que $K_d = F_{K_d}(\hat{K})$, si K est un élément droit K_d , ou telle que $\tilde{K}_c = F_{K_c}(\hat{K})$, si K est un élément courbe K_c . Enfin, pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, définissons l'ensemble $\Sigma \subset K$ de points d'interpolation par la relation

$$\Sigma = F_K(\hat{\Sigma}).$$

[Notons que les éléments finis courbes introduits ici ne sont pas des éléments finis du type isoparamétrique (cf. Ciarlet-Raviart [5]), pour lesquels on n'a d'ailleurs pas $P = P_k$ en général].

Alors on peut, quel que soit $K \in \mathcal{T}_h$, approcher toute fonction $u \in W^{k+1,p}(K)$, avec $k+1 > \frac{2}{p}$, par le P_k -interpolé de Lagrange sur Σ : on est ainsi ramené globalement à une méthode d'éléments finis droits. On obtient de la sorte, par exemple, une approximation interne de l'espace $H^1(\Omega)$. Remar-

quons cependant que l'approximation correspondante de $H_0^1(\Omega)$ n'est pas interne, la condition de nullité au bord ne se trouvant évidemment pas vérifiée.

Le théorème (4-1) est applicable dans le cas des éléments courbes K_c et fournit donc des majorations de l'erreur d'interpolation (dans le cas des éléments droits K_d , on prend évidemment $\tilde{K}_d = K_d$ et on retrouve ainsi le résultat standard des éléments finis droits). Notons que les majorations d'erreur (4-10) seront *uniformes* si

$$(4-11) \quad \left| \frac{h_K}{\rho_{\tilde{K}}} \right| \text{ est borné indépendamment de } K \text{ et de la triangulation } \mathcal{T}_h$$

: on reconnaît là une adaptation de la notion de suite régulière de triangulations de Ciarlet-Raviart. Le théorème (4-1) montre donc que

$$(4-12) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Si (4-11) est vérifiée, on a les mêmes ordres asymptotiques} \\ \text{d'erreur, que } K \text{ soit un élément droit ou un élément courbe.} \end{array} \right.$$

En dimension $n > 2$, la situation est plus compliquée, les éléments courbes K_c que l'on obtient ne correspondant pas à une généralisation directe du « triangle à un ou deux côtés courbes » (nous ne préciserons pas ici la définition de ces éléments, que nous avons appelés « éléments finis de type pseudo-simplicial »). Le résultat (4-12) reste évidemment valable dans le cas général.

Grâce au théorème 4-1, on voit que l'on peut utiliser des éléments finis *droits* pour les problèmes de Newman d'ordre 2 sur des domaines *courbes* (convenables) et que l'on obtient de la sorte des majorations d'erreur du même ordre que dans le cas des domaines *polygonaux*.

REFERENCES

- [1] BARNHILL R. E. et WHITEMAN J. R., Error Analysis of Finite Element Methods with Triangles for Elliptic Boundary Value Problems, *The mathematics of Finite Elements and Applications* (J. R. Whiteman, ed.), 83-112, Acad. Press (1973).
- [2] BRAMBLE J. H. et HILBERT S. R., Estimation of Linear Functionals on Sobolev Spaces with Application to Fourier Transforms and Spline Interpolation, *SIAM J. Numer. Anal.*, 7, 112-124 (1970).
- [3] BRAMBLE J. H. et HILBERT S. R., Bounds for a Class of Linear Functionals with Applications to Hermite Interpolation, *Numer. Math.*, 16, 362-369 (1971).
- [4] CIARLET P. G. et RAVIART P. A., General Lagrange and Hermite Interpolation in $\mathbb{R}^n$ with Applications to Finite Element Methods, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 46, 177-199 (1972).
- [5] CIARLET P. G. et RAVIART P. A., Interpolation Theory over Curved Elements with Applications to Finite Element Methods, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engin.*, 1, 217-249 (1972).

- [6] CIARLET P G et WAGSCHAL C , *Multipoint Taylor Formulas and Applications to Finite Element Method*, Numer Math , 17, 84-100 (1971)
- [7] CHENIN P , *These 3^e cycle*, Grenoble (1974)
- [8] COATMELEC C , *Approximation et interpolation des fonctions differentiables de plusieurs variables*, Ann Sc École Norm Sup (3) 83, 271-341 (1966)
- [9] DESCLoux J , *Methode des elements finis*, Ecole polytechnique federale de Lausanne (1973)
- [10] MEINGUET J , Realistic Estimates for Generic Constants in Multivariate Point-wise Approximation, *Topics in Numerical Analysis II*, J J H Miller ed , Acad Press (1975)
- [11] NEČAS J , *Les methodes directes en theorie des equations elliptiques*, Masson (1967)
- [12] RAVIART P A , *Methodes des elements finis*, redige par J M Thomas, D E A Analyse Numerique, Paris VI (1971-1972)
- [13] STRANG G , *Approximation in the Finite Element Method*, Numer Math , 19, 81-98 (1972)
- [14] STROUD A H , *Approximate Calculation of Multiple Integrals*, Prentice Hall (1971)
- [15] ZIENKIEWICZ O C , *La methode des elements finis*, Ediscience, Paris (1973)