

RAIRO

ANALYSE NUMÉRIQUE

J. F. DURAND

**Optimisation connexe en dimension
finie par relaxation**

RAIRO – Analyse numérique, tome 11, n° 2 (1977), p. 117-134.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1977__11_2_117_0

© AFCET, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO – Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

OPTIMISATION CONVEXE EN DIMENSION FINIE PAR RELAXATION (1)

par J. F. DURAND (2)

Communiqué par J. CÉA

Résumé. — On donne une nouvelle définition de la relaxation qui permet de résoudre des problèmes d'optimisation convexe même lorsque la fonction objectif n'est pas strictement convexe. De plus la Méthode Séquentielle Réduite est établie pour résoudre des programmes convexes avec contraintes linéaires.

Les méthodes de relaxation sont utilisées de façon très efficace pour résoudre des problèmes de minimisation de fonctionnelles strictement convexes sur un espace produit en dimension finie ou non ; se reporter à J. CÉa [2] et [3], J. CÉa et R. Glowinski [4] et à la bibliographie de ces travaux. Cependant lorsque la fonctionnelle est convexe au sens large la méthode de relaxation semblait inutilisable et d'autre part, même dans le cas strictement convexe, lorsque les contraintes se présentent sous la forme d'un système linéaire cette méthode ne semblait plus conduire à la solution du problème, voir contre-exemple dans [4]. Une légère modification a été apportée dans la définition d'une relaxation qui reste d'une mise en œuvre numérique aussi simple. Elle permet, lorsque l'application univoque qui la définit est continue, de résoudre des problèmes de minimisation de fonctionnelles convexes au sens large. D'autre part dans le cas de contraintes linéaires la Méthode Séquentielle Réduite est établie en s'inspirant du principe de celle du Gradient Réduit de Ph. Wolfe, voir P. Faure et P. Huard [5], P. Huard [6], Ph. Wolfe [10] [11] [12] et W. I. Zangwill [13]. En particulier cette méthode permet de résoudre les problèmes de programmation quadratique convexe (pas forcément au sens strict) et de programmation linéaire. Déjà J. CÉa [2] (p. 153) avait conjecturé de façon heuristique que cette méthode serait susceptible d'applications intéressantes. En effet les quelques essais numériques effectués avec la Méthode Séquentielle Réduite ont permis de retrouver les avantages des méthodes directes d'optimisation. Aucun calcul de dérivée partielle,

(1) Manuscrit reçu le 3 juin 1976.

(2) Département Mathématiques, Université de Montpellier II.

simplicité de la mise en œuvre. Enfin comme le Gradient Réduit cette méthode est très proche de la méthode du Simplexe; aussi bénéficie-t-elle des techniques très au point de cette méthode en ce qui concerne la résolution de problèmes de grandes tailles.

1. PROBLÈME SANS CONTRAINTE

Soit J une application convexe G -dérivable de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans \mathbf{R}^n et $\| \cdot \|$ la norme associée. De plus le comportement de J à l'infini est supposé vérifier l'hypothèse

$$H_1 : \lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty.$$

Le problème consiste à déterminer un élément u de \mathbf{R}^n tel que

$$J(u) = \min_{v \in \mathbf{R}^n} J(v). \quad (1.1)$$

Si l'existence de u est assurée par H_1 son unicité ne l'est pas puisque J n'est pas forcément strictement convexe. L'hypothèse H_1 permet de montrer que toute suite minimisante $\{v^i \mid i \in \mathbf{N}\}$ est bornée, i.e.

$$\exists \alpha \quad \|v^i\| \leq \alpha < +\infty.$$

Le problème est donc équivalent à minimiser J sur une certaine boule compacte

$$V = \{v \mid v \in \mathbf{R}^n, \|v\| \leq \alpha\}.$$

2. PROBLÈME AVEC CONTRAINTES LINÉAIRES

Soit J une application convexe G -dérivable de \mathbf{R}^{n+p} dans \mathbf{R} . Le produit scalaire dans \mathbf{R}^{n+p} et sa norme associée sont notés comme au paragraphe 1. Soient A une matrice réelle ayant p lignes et $n+p$ colonnes et b un élément de \mathbf{R}^p . Posons

$$U = \{v \mid v \in \mathbf{R}^{n+p}, v \geq 0 \text{ et } Av = b\}.$$

Le problème consiste à déterminer un élément u de U tel que

$$J(u) = \min_{v \in U} J(v). \quad (2.1)$$

Nous supposons que l'une au moins des deux hypothèses de compacité est vérifiée

$$H_1 : \lim_{\substack{\|v\| \rightarrow +\infty \\ v \in U}} J(v) = +\infty$$

$$H_2 : U \text{ est borné.}$$

D'autre part si $A^i, i = 1, \dots, n + p$ sont les vecteurs colonnes de A nous ferons l'hypothèse de non dégénérescence

H_3 : Tout ensemble de p vecteurs pris parmi A^1, \dots, A^{n+p}, b est libre.

3. RELAXATION ÉLÉMENTAIRE. CYCLE DE RELAXATIONS

Soient $\{e^k\}_{k=1, \dots, n}$ une base fondamentale de \mathbf{R}^n , X un ensemble convexe compact de \mathbf{R}^n et x un élément de X . Soit F une application convexe de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} .

Une relaxation élémentaire consiste à minimiser F sur la restriction à X de la droite

$$D_k(x) = \{ z/z \in \mathbf{R}^n, z = x + \mu e^k, \mu \in \mathbf{R} \}.$$

Plus précisément nous désignerons par γ_k cette opération. C'est une application univoque de X dans lui-même définie par

$$x \rightarrow \gamma_k(x) = x + \mu_k e^k \tag{3.1}$$

$$\gamma_k(x) = \text{proj}(x, C_k(x)) \tag{3.2}$$

$$C_k(x) = \{ z/z \in D_k(x) \cap X, F(z) = m_k(x) \} \tag{3.3}$$

$$m_k(x) = \min_{z \in D_k(x) \cap X} F(z). \tag{3.4}$$

On note $\text{proj}(x, C)$ la projection de x sur l'ensemble C .

De plus si $\Lambda_k(x)$ est l'ensemble de niveau défini par

$$\Lambda_k(x) = \{ z/z \in \mathbf{R}^n, F(z) \leq m_k(x) \},$$

l'ensemble $C_k(x)$ se présente, sous la forme

$$C_k(x) = D_k(x) \cap X \cap \Lambda_k(x). \tag{3.5}$$

La définition de la projection donne

$$\gamma_k(x) \neq x \Rightarrow F[\gamma_k(x)] < F(x). \tag{3.6}$$

On appelle Γ un cycle de relaxations élémentaires γ_k . C'est l'application univoque de X dans lui-même définie par

$$x \rightarrow \Gamma(x) = \gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1(x). \tag{3.7}$$

La relation (3.6) donne

$$\Gamma(x) \neq x \Rightarrow F[\Gamma(x)] < F(x). \tag{3.8}$$

En effet

$$\exists k F[\Gamma(x)] \leq F[\gamma_k \circ \dots \circ \gamma_1(x)] < F[\gamma_{k-1} \circ \dots \circ \gamma_1(x)] \leq F(x).$$

Dans la suite nous verrons qu'une hypothèse de continuité de l'application γ_k est indispensable pour que l'algorithme de relaxation converge vers une solution du problème d'optimisation. Aussi nous supposons que la fonctionnelle F et la base choisie pour \mathbf{R}^n satisfont à l'hypothèse

H_0 : Quel que soit $k = 1, \dots, n$ l'application $x \rightarrow \gamma_k(x)$ définie par (3.2) est continue en tout point non solution du problème de minimisation de F sur X .

Remarquons que d'un point de vue théorique il est possible d'affaiblir cette hypothèse en prenant

H'_0 : Quel que soit $k = 1, \dots, n$ l'application $x \rightarrow \gamma_k(x)$ définie par (3.2) est continue en tout point d'adhérence de la suite générée par l'algorithme de relaxation.

Il faut alors prendre la condition (iii)' à la place de (iii) dans le théorème de convergence du paragraphe 4.

Nous allons maintenant étudier l'application γ_k afin de mettre en évidence des conditions suffisantes pour que l'hypothèse H_0 (ou H'_0) soit vérifiée.

PROPOSITION 1 : *L'application γ_k est continue en tout point x^0 de X en lequel l'application multivoque C_k définie par (3.3) et (3.4) est continue.*

Démonstration : Soit $\{x^i \mid i \in \mathbf{N}\} \rightarrow x^0$ et $\{z^i \mid i \in \mathbf{N}\}$ la suite définie par

$$z^i = \text{proj}(x^i, C_k(x^i)).$$

Notons $z^0 = \text{proj}(x^0, C_k(x^0))$. Les ensembles $C_k(x^i)$ sont compacts inclus dans X compact; on peut exhiber une sous-suite $\{z^i \mid i \in \mathbf{N}' \subset \mathbf{N}\}$ convergent vers z' . Ce point appartient à $C_k(x^0)$ puisque C_k est s.c.s. en x^0 . Puisque z^0 est la projection de x^0 sur l'ensemble convexe $C_k(x^0)$

$$\langle x^0 - z^0, z' - z^0 \rangle \leq 0. \quad (3.9)$$

D'autre part C_k est s.c.i. au point x^0 ,

$$\begin{aligned} &\exists \{y^i \mid i \in \mathbf{N}\} \rightarrow z^0 \\ &\exists \bar{i} \in \mathbf{N} \mid y^i \in C_k(x^i) \quad \forall i \geq \bar{i}. \end{aligned}$$

En particulier on peut écrire

$$\forall i \in \mathbf{N}', \quad i \geq \bar{i} \quad \langle x^i - z^i, y^i - z^i \rangle \leq 0.$$

En passant à la limite

$$\langle x^0 - z', z^0 - z' \rangle \leq 0. \quad (3.10)$$

La somme de (3.9) et (3.10) donne

$$\langle z' - z^0; z' - z^0 \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \|z' - z^0\| = 0.$$

Le point z^0 est indépendant du choix de la sous-suite convergente, ce qui montre que z^0 est la limite de la suite $\{z^i \mid i \in \mathbf{N}\}$. (Q.E.D.).

En fait la proposition précédente peut être considérée comme une application d'un résultat plus général sur les applications « prox » dû à C. Lescarret [8] (proposition 5).

PROPOSITION 2 : La multiplication $x \rightarrow D_k(x) \cap X$ est continue sur X .

Démonstration : Pour montrer qu'elle est s.c.s. il suffit de vérifier que

$$\begin{aligned} x \rightarrow D_k(x) &\text{ est fermée} \\ x \rightarrow X = C^{ste} &\text{ est s.c.s.} \end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord que $D_k(x) \cap X \neq \emptyset$ pour tout x de X . La multi-application D_k est fermée, en effet :

$$\left. \begin{aligned} \{ x^i / i \in \mathbf{N} \} \rightarrow x \\ \{ y^i / i \in \mathbf{N} \} \rightarrow y \\ y^i \in D_k(x^i) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x^i \rightarrow x \\ y^i \rightarrow y \\ y^i = x^i + \lambda_i e^k. \end{cases}$$

Donc λ_i tend vers la $k^{\text{ième}}$ composante de $y - x$

$$y^i \rightarrow y = x + \{ y - x \}_k e^k \in D_k(x).$$

Enfin la multiapplication $x \rightarrow X = C^{ste}$ est s.c.s. puisque X est compact. Montrons la semi-continuité inférieure. Puisque X est compact

$$y \in D_k(x) \cap X \Leftrightarrow d_k^-(x) \leq y \leq d_k^+(x)$$

avec

$$\begin{aligned} d_k^-(x) &= x + \mu^-(x) e^k \\ d_k^+(x) &= x + \mu^+(x) e^k; \end{aligned}$$

de telle sorte que le segment de droite compact $C_k(x)$ s'écrit

$$C_k(x) = \{ z / z \in D_k(x) \cap X, F(z) \leq F(x + \mu e^k), \quad \forall \mu \in [\mu^-(x), \mu^+(x)] \}.$$

Puisque X est convexe compact les applications univoques $d_k^-(x)$ et $d_k^+(x)$ sont continues sur X . Si $\lambda \in [0, 1]$ l'application univoque

$$x \rightarrow x + [\lambda \mu^-(x) + (1 - \lambda) \mu^+(x)] e^k$$

est continue sur X . Soient

$$\begin{aligned} \{ x^i \mid i \in \mathbf{N} \} &\rightarrow x \\ y &\in D_k(x) \cap X \end{aligned}$$

$$\lambda \in [0, 1] \text{ tel que } y = x + [\lambda \mu^-(x) + (1 - \lambda) \mu^+(x)] e^k.$$

Alors la suite $\{ y^i \mid i \in \mathbf{N} \}$ définie par

$$y^i = x^i + [\lambda \mu^-(x^i) + (1 - \lambda) \mu^+(x^i)] e^k$$

converge vers y . (Q.E.D.).

PROPOSITION 3 : *La multiplication C_k est s.c.s. sur X .*

Démonstration : La proposition précédente a montré que $D_k(x) \cap X$ est continue sur X compact. De plus la fonctionnelle F est continue (convexe sur \mathbf{R}^n). Un théorème classique d'extremum, cf. C. Berge [1] p. 123, implique que la fonction numérique $m_k(x) = \min_{z \in D_k(x) \cap X} F(z)$ est continue sur X . Il en résulte que $\Lambda_k(x)$ est fermée sur X . D'après (3.5) $C_k(x) = D_k(x) \cap X \cap \Lambda_k(x)$ est s.c.s. sur X . (Q.E.D.).

En général C_k n'est pas forcément s.c.i., donc continue, comme le montre le contre-exemple suivant dans lequel F est une application de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R}_+ .

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2} [x_1^2 + x_2^2 - 1 + ((x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 + 4x_2^2)^{\frac{1}{2}}].$$

Les lignes de niveau strictement positif de F sont des ellipses homofocales dont les foyers sont les points $A(-1, 0)$ et $B(1, 0)$, voir figure 1.

L'ensemble minimum est le segment AB sur lequel F prend la valeur nulle. En un point M^0 de l'axe Ox_1 , $C_1(M^0)$ est le segment AB . Si l'on considère une suite de points M^i ayant M^0 pour limite, la suite associée $C_1(M^i) = C^i$ tend vers l'origine 0.

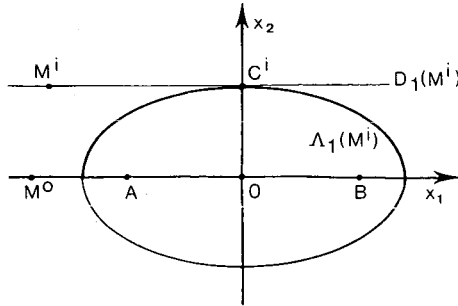


Figure 1.

L'application $C_1(M)$ n'est pas continue sur Ox_1 .

Les propositions 1, 2 et 3 permettent d'énoncer des conditions suffisantes pour que H_0 (où H'_0) soit vérifiée.

H_4 : Quel que soit $k = 1, \dots, n$ l'application C_k est univoque en tout point non solution du problème de minimisation de F sur X , ou (H'_4) en tout point d'adhérence de la suite générée par l'algorithme,

$$\forall k, \gamma_k(x) = \text{proj}(x, C_k(x)) = C_k(x). \tag{3.11}$$

Les propositions 3 et 1 impliquent que H_0 ou (H'_0) est vérifiée.

L'exemple le plus typique est celui d'une *fonctionnelle F strictement convexe*. Elle est « univariate » d'après J. M. Ortega et W. C. Rheinboldt [9] et la relation (3.11) est vérifiée en tout point de X quelle que soit la base de \mathbf{R}^n choisie.

H_5 : Quel que soit $k = 1, \dots, n$ la multiapplication C_k est continue en tout point non solution du problème de minimisation de F sur X , ou (H_5) en tout point d'adhérence de la suite générée par l'algorithme.

La proposition 1 implique alors la continuité de γ_k pour $k = 1, \dots, n$. En particulier lorsque pour $k = 1, \dots, n$ ou bien C_k est univoque sur X , ou bien $C_k(x) = D_k(x) \cap X, \forall x \in X$. C'est le cas de la programmation linéaire et de la programmation quadratique, voir paragraphe 6.2.

4. THÉORÈME DE CONVERGENCE

Nous allons introduire de nouvelles notations de façon à utiliser le formalisme d'un théorème de convergence dû à W. I. Zangwill [13] pour la résolution de problèmes d'optimisation du type (1.1). Tout algorithme peut être considéré comme une multiapplication M qui à partir d'un point v^0 génère une suite $\{v^i \mid i \in \mathbf{N}\}$ par la relation

$$v^{i+1} \in M(v^i). \quad (4.1)$$

On suppose que l'ensemble $M(v)$ est non vide ce qui est vrai pour l'algorithme de relaxation.

Sous les conditions suivantes ou bien l'algorithme s'arrête à une solution, ou bien tout point d'adhérence de la suite (4.1) est solution.

- i. Tous les v^i sont dans un ensemble compact.
- ii. L'application continue J est telle que
 - a) si v n'est pas solution, et si l'on note v^* son successeur

$$J(v^*) < J(v)$$

b) si v est solution l'algorithme s'arrête, i.e., $v^* = v$.

- iii. La multiplication M est fermée en tout point non solution.

La condition iii a été modifiée par P. Huard [7] (proposition 8.6):

(iii)' La multiapplication M est fermée en tout point d'adhérence de la suite (4.1).

5. LA MÉTHODE DE RELAXATION APPLIQUÉE AU PROBLÈME SANS CONTRAINTE

Supposons que la fonctionnelle J du problème (1.1) et la base choisie pour \mathbf{R}^n sont telles que l'hypothèse H_0 (ou H'_0) soit vérifiée. La boule V joue le rôle du convexe compact X du paragraphe 3.

Il est bien évident ici que X n'est pas un domaine de contrainte actif. On construit la suite de points

$$\begin{cases} v^0 \\ v^{i+1} = M(v^i) = \Gamma(v^i) = \gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1(v^i) \end{cases} \quad (5.1)$$

PROPOSITION : Un point v optimal est caractérisé par

$$\gamma_k(v) = v \quad k = 1, \dots, n.$$

Démonstration : On utilise le fait que J est convexe G -dérivable.

Si v est solution, v est caractérisé par $J'(v) = 0$. D'autre part la convexité de J s'écrit pour $k = 1, \dots, n$

$$J(v + \mu e^k) - J(v) \geq \mu \frac{\partial J}{\partial v_k}(v), \quad \forall \mu \in \mathbf{R}.$$

Donc, $J(v + \mu e^k) - J(v) \geq 0, \forall \mu \in \mathbf{R}$. C'est-à-dire

$$v \in C_k(v) \quad k = 1, \dots, n.$$

D'après la définition de la projection

$$v = \text{proj}(v, C_k(v)) = \gamma_k(v) \quad k = 1, \dots, n.$$

Dans l'autre sens il suffit de vérifier que

$$\forall \mu \in \mathbf{R}, \quad J(v + \mu e^k) - J(v) \geq 0 \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial v_k}(v) = 0.$$

On peut écrire

$$\frac{J(v + \lambda \mu e^k) - J(v)}{\lambda} \geq 0 \quad \forall \lambda \in]0, 1],$$

et par passage à la limite qui existe,

$$\mu \frac{\partial J}{\partial v_k}(v) \geq 0, \quad \forall \mu \in \mathbf{R}.$$

Ce qui donne

$$\frac{\partial J}{\partial v_k}(v) = 0. \quad (\text{Q.E.D.}).$$

Grâce à la proposition précédente les conditions ii du théorème de convergence sont remplies : Si v n'est pas solution, il existe un indice k tel que $\gamma_k(v) \neq v$ et d'après (3.6) $J[\gamma_k(v)] < J(v)$. Alors $J[\Gamma(v)] < J(v)$, ce qui démontre ii a). La condition ii b) est évidente. La condition iii. (ou iii.)' est remplie puisque M est une composition d'applications (univoques) γ_k continues grâce à H_0 (ou H'_0). Enfin l'hypothèse de compacité H_1 assure la condition i..

Remarquons enfin qu'une relaxation élémentaire a un sens même lorsque la fonction objectif n'est pas G -dérivable. Cependant l'algorithme peut ne pas converger vers une solution du problème et la suite de points générée par l'algorithme se bloquer en un point anguleux d'une équipotentielle de la fonction objectif.

6. RÉOLUTION DU PROBLÈME AVEC CONTRAINTES LINÉAIRES PAR LA MÉTHODE SÉQUENTIELLE RÉDUITE

6.1. Réduction du problème à \mathbf{R}^n

De façon classique on appelle base un ensemble I d'indices tel que

$$I \subset \{1, \dots, n + p\}, \quad \text{card}(I) = p.$$

L'hypothèse H_3 faite sur les colonnes de A implique que toute matrice A^I formée de p vecteurs colonnes de A est régulière. Étant donnée une base I le système linéaire $Av = b$ se décompose de la façon suivante

$$A^I v_I + A^{\bar{I}} v_{\bar{I}} = b.$$

L'ensemble \bar{I} est le complémentaire de I dans $\{1, \dots, n + p\}$. Le vecteur v_I formé des composantes de base de v est appelé vecteur de base, $v_{\bar{I}}$ vecteur hors-base. Il est classique d'éliminer les composantes (ou variables) de base

$$v_I = t(I) - T^{\bar{I}}(I)v_{\bar{I}}$$

avec

$$T(I) = (A^I)^{-1} A$$

$$t(I) = (A^I)^{-1} b.$$

Nous écrirons T et t lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, et on notera pour simplifier

$$x = v_{\bar{I}}$$

$$y = v_I.$$

Le problème initial se formule alors comme un problème dans \mathbf{R}^n .

Déterminer \hat{x} appartenant au domaine « réduit » U_r tel que

$$F(\hat{x}) = \min_{x \in U_r} F(x) \tag{6.1}$$

avec

$$F(x) = J(x, t - T^{\bar{I}}x), \tag{6.2}$$

$$U_r = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, x \geq 0 \text{ et } T^{\bar{I}}x - t \leq 0\}. \tag{6.3}$$

Le domaine réduit U_r sera utilisé sous une écriture légèrement différente

$$U_r = \{x \mid x \in \mathbf{R}^n, Gx - g \leq 0\}$$

où $G_I = T^{\bar{I}}$, $G_{\bar{I}} = -E_n$, $g_I = t$, $g_{\bar{I}} = 0$. La matrice E_n est la matrice unité d'ordre n .

6.2. Relaxation élémentaire

Compte tenu de la forme particulière des contraintes, l'ensemble $C_k(x)$ qui permet de définir une relaxation élémentaire s'exprime simplement : Étant donné x de U_r , un point z de la droite $D_k(x)$ définie dans le paragraphe 3 est admissible si et seulement si

$$Gz - g \leq 0$$

ce qui se ramène à

$$\max_i \left\{ \frac{\{g - Gx\}_i / G_i^k < 0}{G_i^k} \right\} \leq \mu \leq \min_i \left\{ \frac{\{g - Gx\}_i / G_i^k > 0}{G_i^k} \right\},$$

où encore

$$\mu^-(x) \leq \mu \leq \mu^+(x)$$

$$\text{avec } \mu^-(x) = \max \left\{ -x_k, \max_i \left\{ \frac{\{t - T^i x\}_i / \{T^i\}_i^k < 0}{\{T^i\}_i^k} \right\} \right\}$$

$$\mu^+(x) = \min_i \left\{ \frac{\{t - T^i x\}_i / \{T^i\}_i^k > 0}{\{T^i\}_i^k} \right\}.$$

Remarquons que $\mu^-(x)$ est fini alors que $\mu^+(x)$ peut être $+\infty$ s'il n'existe aucun i tel que $\{T^i\}_i^k > 0$. Cependant même dans ce cas l'hypothèse H_1 appliquée au problème réduit assure la compacité de

$$C_k(x) = \{z/z = x + \lambda e^k, F(z) \leq F(x + \mu e^k), \forall \mu \in [\mu^-(x), \mu^+(x)]\}.$$

On remplacera $[\mu^-(x), \mu^+(x)]$ par $[\mu^-(x), +\infty[$ si $\mu^+(x) = +\infty$.

Cas particulier de la programmation quadratique

La détermination de $\gamma_k(x) = x + \mu_k e^k$ se simplifie lorsque la fonctionnelle F définie par (6.2) peut se représenter par

$$F(x) = \frac{1}{2} \langle Px, x \rangle - \langle q, x \rangle + q_0.$$

P est une matrice carrée d'ordre n symétrique et semi définie positive, q un élément de \mathbf{R}^n et q_0 un élément de \mathbf{R} . En tout point z de $D_k(x)$ la fonctionnelle F prend la valeur

$$F(z) = F(x) + r_k \mu + \frac{1}{2} P_k^k \mu^2,$$

avec $r_k = \{Px - q\}_k$. La construction de $\gamma_k(x)$ est simplifiée par le fait que la valeur $\bar{\mu}_k$ de μ qui rend minimum F sur $D_k(x)$ est connue explicitement

$$\bar{\mu}_k = -\frac{r_k}{P_k^k},$$

dans le cas où l'élément diagonal P_k^k est non nul. Lorsqu'il est nul cela implique que P est semi-définie positive et que la ligne k et la colonne k de P sont formées d'éléments nuls. La $k^{\text{ième}}$ composante du vecteur r ne dépend donc pas du point x considéré

$$r_k = -q_k.$$

Alors en tout point z de $D_k(x)$

$$F(z) = F(x) - q_k \mu.$$

Si de plus $q_k = 0$ alors $C_k(x) = D_k(x) \cap U_r$ en tout point x de U_r . Dans tous les autres cas l'ensemble $C_k(x)$ est réduit à un seul élément quel que soit x de U_r . Pour une fonctionnelle quadratique l'hypothèse H_5 est donc vérifiée.

Si l'élément P_k^k est nul on prendra par convention $\bar{\mu}_k$ égal à $0, +\infty, -\infty$ lorsque respectivement r_k est nul, négatif, positif. Enfin l'une ou l'autre des hypothèses de compacité assure que $\gamma_k(x)$, i. e., μ_k est fini. Cela interdit en particulier d'avoir à la fois $\mu^+(x) = +\infty$ et $\bar{\mu}_k = +\infty$.

En résumé

$$\begin{aligned} \mu_k &= \min(\mu^+(x), \bar{\mu}_k) && \text{si } \bar{\mu}_k > 0 \\ \mu_k &= \max(\mu^-(x), \bar{\mu}_k) && \text{si } \bar{\mu}_k < 0 \\ \mu_k &= 0 && \text{si } \bar{\mu}_k = 0. \end{aligned}$$

Cas de la programmation linéaire

$$F(x) = \langle q, x \rangle + q_0.$$

En tout point z de la droite $D_k(x)$

$$F(z) = F(x) + \mu q_k.$$

Si $q_k = 0$, $C_k(x) = D_k(x) \cap U_r$ pour tout point x de U_r ce qui implique la continuité γ_k . Lorsque q_k est non nul $C_k(x)$ est réduit à un seul point situé sur la frontière de U_r . Enfin la compacité du problème réduit implique qu'on ne peut avoir à la fois $\mu^+(x) = +\infty$ et $q_k < 0$.

En résumé

$$\begin{aligned} \mu_k &= \mu^-(x) && \text{si } q_k > 0 \\ \mu_k &= \mu^+(x) && \text{si } q_k < 0 \\ \mu_k &= 0 && \text{si } q_k = 0. \end{aligned}$$

6.3. Méthode de relaxation appliquée au problème réduit

Soit $U_{r,b}$ l'ensemble défini par

$$U_{r,b} = \{ x \mid x \in \mathbf{R}^n, t - T^T x \geq 0 \} \tag{6.4}$$

et $\overset{\circ}{U}_{r,b}$ son intérieur, i. e.

$$x \in \overset{\circ}{U}_{r,b} \Leftrightarrow t - T^T x > 0.$$

On construit la suite de points

$$x^{i+1} = \Gamma(x^i) = \gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1(x^i). \quad (6.5)$$

Soit $\{F(x^i)/i \in N\}$ la suite associée à (6.5). D'après (3.8) cette suite est décroissante

$$x^{i+1} \neq x^i \Rightarrow F(x^{i+1}) < F(x^i) \quad (6.6)$$

Grâce aux hypothèses de compacité le problème réduit admet une solution \hat{x}

$$\exists \hat{x} \in U_r, \quad F(\hat{x}) \leq F(x) \quad \forall x \in U_r.$$

La suite $\{F(x^i) | i \in N\}$ minorée par $F(\hat{x})$ converge vers une valeur que nous noterons $F(x^N)$, x^N étant soit un point stationnaire soit un point d'accumulation de la suite (6.5) caractérisé par

$$\Gamma(x^N) = x^N, \quad (6.7)$$

c'est-à-dire
$$\gamma_k(x^N) = x^N \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.7')$$

Un cas particulier simple à représenter dans \mathbf{R}^2 est celui de la programmation quadratique lorsque la fonctionnelle réduite F est strictement convexe, la matrice P étant symétrique définie positive.

Si \bar{x} est la solution du problème de minimisation de F sans contrainte la figure 2 permet de se rendre compte comment suivant le choix de x^0 , x^N est soit un point stationnaire soit un point d'accumulation de la suite (6.5).

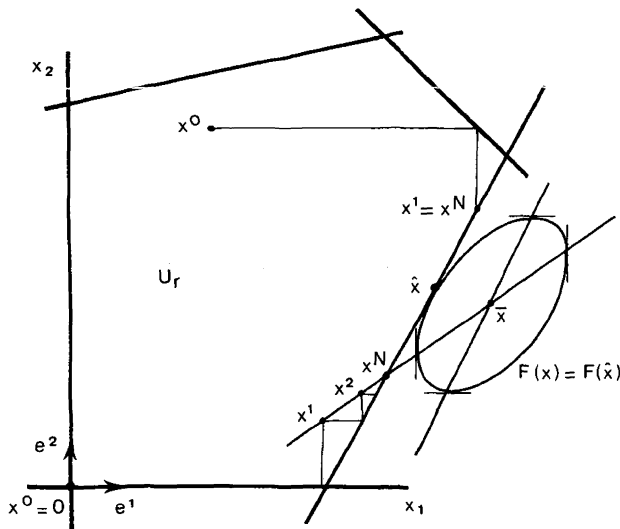


Figure 2.

La fonctionnelle réduite est quadratique strictement convexe, $n = 2, p = 3$.

D'un point de vue numérique la détermination (même approchée), d'un point x^N risque d'être coûteuse. Aussi de façon heuristique il semble naturel d'adjoindre à la mise en œuvre de la méthode une étape d'accélération. Elle consiste à interrompre les cycles Γ de relaxations par une procédure anti zig-zag. Le point x^{i+1} est déterminé à partir de x^i par

$$x^{i+1} = x^i + \rho w^i.$$

Le vecteur w^i représente la direction moyenne des zig-zags.

$$w^i = x^i - x^{i-1}.$$

Le choix du scalaire ρ se fait de façon analogue à celui du meilleur μ dans le paragraphe 3. Ce procédé destiné à améliorer la rapidité de l'algorithme présente cependant le désavantage de construire une méthode itérative à deux vecteurs. Il est nécessaire de stocker en plus de x^i le vecteur w^i .

6.4. Critère de changement de base

La question est maintenant de savoir si x^N est solution ; en général ce n'est pas le cas.

PROPOSITION : Une condition suffisante pour que x^N soit solution est que x^N appartienne à l'intérieur de U_{rb} , i. e.

$$y^N = t - T^{\bar{I}} x^N > 0. \quad (6.8)$$

Démonstration : Soit L l'ensemble d'indices de $\{1, \dots, n+p\}$ défini par $L = \{l \mid \{g - Gx^N\}_l = 0\}$.

L'hypothèse (6.8) implique qu'aucune variable de base ne s'annule, c'est-à-dire que L est inclu dans \bar{I} . Cela entraîne que x^N appartient soit à l'intérieur de U_r , si L est vide, soit à la frontière de l'orthant positif hors la frontière de U_{rb} . Il existe donc une boule ouverte non vide $B(x^N, \varepsilon)$ de centre x^N de rayon ε non nul telle que

$$\forall z \in B(x^N, \varepsilon) \cap U_r \quad t - T^{\bar{I}} z > 0.$$

En particulier e^j étant un vecteur de base de \mathbf{R}^n les points $x^N + \varepsilon_j e^j$ appartiennent à $B(x^N, \varepsilon) \cap U_r$ si les scalaires ε_j vérifient

$$\sup(-x_j^N, -\varepsilon) \leq \varepsilon_j < \varepsilon \quad , \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.9)$$

On note φ la correspondance bijective qui pour le problème réduit considéré est telle que

$$\varphi(\bar{I}) = \{1, \dots, n\}.$$

Les conditions (6.9) se décomposent

$$\forall j \notin \varphi(L) \quad \eta_j = \sup(-x_j^N, -\varepsilon) \leq \varepsilon_j < \varepsilon \quad , \quad \eta_j < 0 \quad (6.10)$$

$$\forall j \in \varphi(L) \quad 0 \leq \varepsilon_j < \varepsilon. \quad (6.11)$$

Remarquons que $\varphi(L)$ est vide si et seulement si L est vide, i. e., x^N appartient à l'intérieur de U_r ; $\varphi(L) = \{1, \dots, n\}$ si et seulement si $L = \bar{I}$, i. e., $x^N = 0$.

D'après (6.7) x^N rend minimum dans les directions axiales la fonctionnelle F convexe et G -dérivable, pour tout ε_j de (6.9)

$$\varepsilon_j \frac{\partial F}{\partial x_j}(x^N) \geq 0$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x^N) &= 0 & \forall j \notin \varphi(L) \\ \frac{\partial F}{\partial x_j}(x^N) &\geq 0 & \forall j \in \varphi(L). \end{aligned}$$

En conséquence les conditions de Kuhn et Tucker sont vérifiées en x^N :

$$\text{Si } \varphi(L) = \emptyset \Leftrightarrow x^N \in U_r \Rightarrow F'(x^N) = 0$$

$$\text{Si } \varphi(L) \neq \emptyset \quad \left\{ \begin{array}{l} -F'(x^N) = \sum_{j \in \varphi(L)} \lambda_j (e^j) \\ \lambda_j = \frac{\partial F}{\partial x_j}(x^N) \geq 0. \end{array} \right.$$

Ces conditions nécessaires d'optimalité sont suffisantes puisque F est convexe (Q.E.D.).

Lorsque les relations (6.8) de la proposition précédente ne sont pas réalisées on construit un nouveau problème réduit défini par une nouvelle base \tilde{I} . La méthode de relaxation est à nouveau mise en œuvre à partir d'un point initial \tilde{x}^0 de \tilde{U}_r qui appartient à l'intérieur du domaine \tilde{U}_{rb} et tel que $\tilde{F}(\tilde{x}^0) = F(x^N)$.

6.5. Choix de la nouvelle base \tilde{I} et du point de départ \tilde{x}^0

Nous sommes dans le cas où l'intersection de L et de I est non vide, soit

$$I' = L \cap I \neq \emptyset, \quad \text{card}(I') = s.$$

Classons par ordre de grandeurs croissantes les composantes du vecteur $y^N = t - T^{\tilde{I}} x^N$.

$$0 = y_{i_1}^N = y_{i_2}^N = \dots = y_{i_s}^N < y_{i_{s+1}}^N \leq y_{i_{s+2}}^N \leq \dots \leq y_{i_p}^N.$$

L'hypothèse de non dégénérescence H_3 entraîne que tout point admissible v du problème initial (2.1) admet au plus n composantes nulles ou encore admet au moins p composantes positives, d'où

$$s \leq \min(p, n).$$

Si on classe les composantes de x^N

$$x_{j_1}^N \geq x_{j_2}^N \geq \dots \geq x_{j_s}^N \geq \dots \geq x_{j_n}^N \geq 0,$$

les s plus grandes sont certainement positives,

$$x_{j_1}^N \geq x_{j_2}^N \geq \dots \geq x_{j_s}^N > 0.$$

Soit I'' le sous ensemble de \bar{I} correspondant

$$\text{Card}(I'') = \text{card}(I') = s.$$

On choisit alors pour \tilde{I}

$$\tilde{I} = I - I' + I''. \quad (6.12)$$

Cela revient à éliminer de l'ancien domaine réduit les contraintes de base saturées en x^N . Le nouveau vecteur \tilde{y}^0 aura toutes ses composantes positives en prenant

$$\tilde{y}^0 = (x_{j_1}^N, x_{j_2}^N, \dots, x_{j_s}^N, y_{i_{s+1}}^N, \dots, y_{i_p}^N).$$

Il lui correspond un élément \tilde{x}^0 de \tilde{U} , qui appartient à l'intérieur de \tilde{U}_{r_b} .

$$\tilde{x}^0 = (y_{i_1}^N, \dots, y_{i_s}^N, x_{j_{s+1}}^N, \dots, x_{j_n}^N)$$

avec $y_{i_1}^N = y_{i_2}^N = \dots = y_{i_s}^N = 0$. Si l'on note v l'élément de U décomposé en

$$v_{\bar{I}} = x^N, \quad v_I = y^N$$

ou encore dans la nouvelle base

$$v_{\tilde{I}} = \tilde{x}^0, \quad v_{\tilde{I}} = \tilde{y}^0$$

on peut écrire

$$\tilde{F}(\tilde{x}^0) = F(x^N) = J(v).$$

Il faut remarquer que dans la plupart des cas s est égal à l'unité, c'est-à-dire qu'une seule contrainte de base est saturée en x^N . Les calculs nécessaires à la construction du nouveau « tableau » ($T(\tilde{I}), t(\tilde{I})$) s'effectuent très exactement comme dans la méthode du simplexe en programmation linéaire. Lorsque s dépasse l'unité, le passage de I à \tilde{I} par (6.12) peut être considéré comme la transformation de I par s changements de base successifs consistant chacun à modifier un seul indice. Le calcul des colonnes du nouveau tableau peut donc s'effectuer par la technique de factorisation de l'inverse (P.F.I.).

6.6. La méthode séquentielle réduite. Convergence

L'algorithme peut être représenté par

$$\begin{cases} (v^0, I_0) \\ (v^{i+1}, I_{i+1}) \in M(v^i, I_i) \end{cases} \quad (6.13)$$

A partir d'un point initial v^0 appartenant à U on choisit une base I_0 telle que $v_{I_0}^0 > 0$ ce qui est toujours possible grâce à l'hypothèse H_3 de non dégénérescence. Avant d'expliciter M il est nécessaire de représenter le déroulement de l'algorithme dans un organigramme de principe dont la version plus détaillée sera modifiée par le fait que l'opération de base est la relaxation élémentaire γ_k et non l'opération globale Γ .

Donnée : $v \in U$ et I tel que $v_I > 0$

étape 1 : Calcul du tableau $(T(I), t(I))$

étape 2 : Calcul de $\Gamma(v_{\bar{I}})$

étape 3 : Si $\Gamma(v_{\bar{I}}) \neq v_{\bar{I}}$ aller à l'étape 4 sinon à 5

étape 4 : Faire $v_{\bar{I}} = \Gamma(v_{\bar{I}})$ aller à l'étape 2

étape 5 : Si $v_I > 0$, stop v solution ; sinon aller à l'étape 6

étape 6 : Déterminer \tilde{I} tel que $v_{\tilde{I}} > 0$, faire $I = \tilde{I}$ aller à l'étape 1.

L'application M représentant l'algorithme est donc la composée de deux applications M_1 et M_2

$$M_1 : (v, I) \rightarrow (v, I, w)$$

$$M_2 : (v, I, w) \rightarrow M_2(v, I, w) \ni (v^*, I_*).$$

Le vecteur w est défini par

$$w_{\bar{I}} = \Gamma(v_{\bar{I}}) \quad (6.14)$$

$$w_I = t(I) - T^{\bar{I}}(I) w_{\bar{I}} \quad (6.15)$$

L'application M_2 est multivoque ; en effet, lorsque se présente l'éventualité d'un changement de base, il est possible que les s indices candidats à l'entrée dans la nouvelle base (les indices des s plus grandes composantes positives de $v_{\bar{I}}$) ne soient pas définis de façon unique. La règle de construction est la suivante, si l'on note (v^*, I_*) le successeur de (v, I)

$$v^* = w \quad (6.16)$$

$$I_* = I \quad \text{si } w \neq v \quad (6.17)$$

$$I_* = I - I' + I'' \quad \text{si } w = v. \quad (6.18)$$

Les conditions de convergence vérifiées ici sont dues à W. I. Zangwill [13], p. 241. En particulier les conditions ii. et iii. sont plus faibles que leurs homologues du paragraphe 4.

Condition i : C'est l'hypothèse de compacité pour la suite (6.13). Le nombre de bases étant fini les hypothèses H_1 et H_2 assurent d'autre part que tous les v^i générés par (6.13) sont dans un ensemble compact.

Condition ii : Supposons que v ne soit pas solution. L'algorithme ne peut s'arrêter à l'étape 5. On peut donc écrire soit dans l'ancienne base, soit dans la nouvelle (grâce à l'hypothèse H_3 de non dégénérescence) que

$$w_{\bar{I}} = \Gamma(v_{\bar{I}}) \neq v_{\bar{I}}$$

Les relations (6.6) et (6.16) donnent

$$J(v) = F(v_{\bar{I}}) > F(v_{\bar{I}}^*) = J(v^*).$$

Cette propriété est plus faible que ii a) du paragraphe 4. La suite $\{ J(v^i)/i \in N \}$ n'est pas décroissante au sens strict, mais l'hypothèse de non dégénérescence implique que si $v^{i+1} = v^i$ alors $v^{i+2} \neq v^{i+1}$ et $J(v^{i+2}) < J(v^{i+1})$, à condition que v^i ne soit pas solution.

Si v est solution, on a évidemment $v_{\bar{I}} = \Gamma(v_{\bar{I}})$. Alors ou bien l'algorithme s'arrête à l'étape 5, ou bien il y a un changement de base et l'algorithme s'arrête au passage suivant. En effet dans la nouvelle base

$$v_{\bar{I}} = \Gamma(v_{\bar{I}}) \quad \text{et} \quad v_I > 0.$$

Condition iii : Il faut vérifier qu'étant donnée une sous suite convergente

$$\{ (v^i, I_i) \mid i \in K \} \rightarrow (v, I)$$

avec v non solution, alors il existe une sous suite convergente $\{ J(v^i)/i \in K' \}$, telle que

$$\limite_{i \in K'} J(v^i) < J(v).$$

Puisqu'il y a un nombre fini de bases il existe une sous suite K'' de K telle que

$$i \in K'' \quad , \quad I_i = I$$

L'hypothèse H_0 de continuité de l'application Γ en tout point non solution implique que $\Gamma(v_{\bar{I}}) = v_{\bar{I}}$. Puisque v n'est pas solution, $v_I \not> 0$ et il est possible de construire une nouvelle base $I_* = I - I' + I''$ telle que $v_{I_*}^* = \Gamma(v_{\bar{I}}) \neq v_{\bar{I}}$, ceci grâce à l'hypothèse de non dégénérescence.

Il existe donc une sous suite K' , ($K' = K'' + 2$) telle que

$$\begin{aligned} \{ (v^i, I_i)/i \in K' \} &\rightarrow (v^*, I_*) \\ J(v^*) &< J(v). \end{aligned}$$

Les trois conditions précédentes étant remplies, l'algorithme s'arrête à un point solution ou tout point d'adhérence de la suite (6.13) est solution.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. BERGE, *Espaces topologiques, fonctions multivoques*, Dunod, 1966.
2. J. CÉA, *Recherche numérique d'un optimum dans un espace produit*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 1970.
3. J. CÉA, *Optimisation théorie et algorithmes*, Dunod, 1971.
4. J. CÉA et R. GLOWINSKI, *Sur des méthodes d'optimisation par relaxation*, R.A.I.R.O., déc. 1973, R3, pp. 5 à 32.

5. P. FAURE et P. HUARD, *Résolution de programmes mathématiques à fonction non linéaire par la méthode du Gradient Réduit*, Rev. Fr. R.O. (36) 1975, pp. 167-206.
6. P. HUARD, *Une variante du Gradient Réduit*, Non linear Programming Symposium, Madison, Wisconsin, avril 1974.
7. P. HUARD, *Optimisation dans \mathbf{R}^n* , Cours de troisième cycle, 1972.
8. C. LESCARRET, *Semi-continuité supérieure de la multiapplication « prox »*, Fac. Sci. de Montpellier, Séminaire d'Analyse unilatérale, 1969, exposé n° 5.
9. J. M. ORTEGA et W. C. RHEINBOLDT. *Iterative solution of non linear equations in several variables*, Academic Press, 1970.
10. Ph. WOLFE, *The Reduced Gradient Method*, Rand document, June 22, 1962.
11. Ph. WOLFE, *Methods of non linear programming*, Recent advances in mathematical programming (Graves-Wolfe eds.) Mac Graw Hill, 1963, pp. 67-86.
12. Ph. WOLFE, *On the convergence of gradient methods under constraints*, IBM Res. Report RZ-204 March 1, 1966, IBM Journal of Res. and Dev., 16 (4) 1972, pp. 407-411.
13. W. I. ZANGWILL, *Non linear programming, a unified approach*, Prentice Hall 1969.