RAIRO
ANALYSE NUMÉRIQUE

C. GILORMINI

Bornes de l'erreur dans l'approximation polynomiale avec contraintes d'interpolation

RAIRO – Analyse numérique, tome 11, nº 2 (1977), p. 145-158.
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1977__11_2_145_0>

R.A.I.R.O. Analyse Numérique/Numerical Analysis
(vol. 11, n° 2, 1977, p. 145 à 158)

BORNES DE L'ERREUR DANS L'APPROXIMATION POLYNOMIALE AVEC CONTRAINTES D'INTERPOLATION (1)

par C. GILORMINI (2)

Communiqué par P. J. LAURENT

Résumé. — *Dans cet article, on établit des encadrements de l'erreur dans l'approximation uniforme d'une fonction $(n + 1)$ fois continuement dérivable par des polynômes de degré n soumis à des conditions d'interpolation.*

I. INTRODUCTION

Pour l'approximation uniforme d'une fonction continue sur $[-1, +1]$ par des polynômes de degré n au plus, Bernstein a démontré le résultat suivant ([3], [4], [5], [8]) :

Si f et g sont $(n + 1)$ fois continuement dérivables sur $[-1, +1]$ et si $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant g^{(n+1)}(x)$ sur $[-1, +1]$, on a :

$$E_n(f) \leqslant E_n(g)$$

avec : $E_n(f) = \inf_{P \in \mathscr{P}_n} \|f - P\|$, $\mathscr{P}_n$ désignant l'espace des polynômes de degré n au plus.

Dans cet article, on étend ce résultat au cas de l'approximation uniforme avec conditions d'interpolation. On obtient également des encadrements de l'erreur pour l'approximation d'une fonction $(n + 1)$ fois dérivable par des polynômes de degré n avec conditions d'interpolation. Ces résultats généralisent ceux de Meinardus ([5]) et Phillips ([9]) obtenus dans le cas où il n'y a pas de contraintes d'interpolation ([3], [4], [8]).

II. APPROXIMATION AVEC CONDITIONS D'INTERPOLATION

Soit Q un sous-ensemble compact d'un intervalle $[a, b]$ contenant au moins $(n + 2)$ points et soit T un ensemble de points $t_1 < \ldots < t_m$ de $[a, b]$ appelés nœuds $(m < n)$.

(1) Manuscrit reçu le 16 mars 1976, et sous forme révisée le 8 décembre 1976.
(2) Institut des Sciences de l'Ingénieur (Université de Nancy I), Vandœuvre les Nancy.

Soit E l'espace des fonctions réelles définies sur $[a, b]$ et continues sur Q, muni de la norme :

$$\|f\| = \max_{t \in Q} |f(t)|$$

Pour $f \in E$, on désigne par $W_n(f; T)$ l'ensemble des polynômes P de degré au plus n tels que :

$$P(t_i) = f(t_i) \qquad i = 1, \ldots, m$$

On sait ([2], [6], [7]) qu'il existe $P^* \in W_n(f; T)$ unique rendant minimum $\|f - P\|$ et on pose :

$$\varepsilon_n(f; T) = \|f - P^*\| = \inf_{P \in W_n(f; T)} \|f - P\|.$$

On a aussi ([2], [6]) une caractérisation du polynôme P^* et une borne inférieure de $\varepsilon_n(f; T)$:

THÉORÈME 1 : *pour que P soit la meilleure approximation de f dans $W_n(f; T)$, il faut et il suffit qu'il existe $(n - m + 2)$ points $e_1 < \ldots < e_{n-m+2}$ de Q tels que :*

$$|f(e_i) - P(e_i)| = \|f - P\| \qquad i = 1, \ldots, n - m + 2$$

$$(-1)^{m_i}[f(e_i) - P(e_i)][f(e_{i+1}) - P(e_{i+1})] < 0 \qquad i = 1, \ldots, n - m + 1$$

où m_i est le nombre de nœuds contenus dans $[e_i, e_{i+1}]$.

En notant $\{s_1, \ldots, s_{n+2}\}$ l'ensemble $\{e_1, \ldots, e_{n-m+2}\} \cup T$ avec

$$s_1 < \ldots < s_{n+2},$$

les conditions précédentes s'écrivent :

$$f(s_i) - P(s_i) = (-1)^i \varepsilon \nu_i \|f - P\| \qquad i = 1, \ldots, n + 2$$

avec : $\varepsilon = \pm 1$, $\nu_i = 0$ si s_i est un nœud, $\nu_i = 1$ dans l'autre cas.

THÉORÈME 2 : *s'il existe $P \in W_n(f; T)$ et $(n - m + 2)$ points*

$$e_1 < \ldots < e_{n-m+2}$$

de Q tels que :

$$(-1)^{m_i}[f(e_i) - P(e_i)][f(e_{i+1}) - P(e_{i+1})] < 0 \quad i = 1, \ldots, n - m + 1$$

où m_i est le nombre de nœuds contenus dans $[e_i, e_{i+1}]$, on a :

$$\varepsilon_n(f; T) \geqslant \min_j |f(e_j) - P(e_j)|$$

III. BORNES DE L'ERREUR POUR UNE FONCTION DÉRIVABLE

THÉORÈME 3 : *si f est $(n+1)$ fois continuement dérivable sur $[a, b]$, on a :*

$$\frac{A_n(T)}{(n+1)!} \min_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \leqslant \varepsilon_n(f ; T) \leqslant \frac{A_n(T)}{(n+1)!} \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \qquad (1)$$

avec :

$$A_n(T) = \inf_{x_i} \left[\max_{x \in [a,b]} |(x - x_1) \dots (x - x_{n-m+1})(x - t_1) \dots (x - t_m)| \right]$$

Cet encadrement étend celui donné dans le cas où il n'y a pas de nœuds dans [3] (prop. 8.3.*c*), [4] (prop. 3.6.8) ou [8] (th. 6.2) car d'après les propriétés des polynômes de Tchebycheff ([1]), on a alors :

$$A_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

Soit P^* le polynôme de meilleure approximation de f dans $W_n(f; T)$. D'après le théorème 1, il existe $(n - m + 2)$ points $e_1 < \dots < e_{n-m+2}$ de Q tels que :

$$(-1)^{m_i+1} [f(e_i) - P^*(e_i)] [f(e_{i+1}) - P^*(e_{i+1})] > 0$$
$$i = 1, \dots, n - m + 1$$

où m_i est le nombre de nœuds contenus dans $[e_i, e_{i+1}]$.

Cette inégalité montre que $f - P^*$ s'annule au moins $(m_i + 1)$ fois dans l'intervalle $]e_i, e_{i+1}[$, en comptant deux fois un zéro où $f - P^*$ ne change pas de signe.

Au total, (en comptant les multiplicités), $f - P^*$ s'annule au moins

$$\sum_{i=1}^{n-m+1} (m_i + 1) = n + 1$$

fois dans $[a, b]$.

Soient $t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_{n-m+1}$ $(n + 1)$ zéros de $f - P^*$.

D'après la formule de l'erreur dans l'interpolation d'Hermite ([1], p. 67), on a :

$$f(x) - P^*(x) = (x - x_1) \dots (x - x_{n-m+1})(x - t_1) \dots (x - t_m) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \qquad (2)$$

D'où, pour $x \in Q$:

$$|f(x) - P^*(x)| \geqslant |(x - x_1) \dots (x - t_m)| \min_{[a,b]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right|$$

ce qui entraîne :

$$\|f - P^*\| \geqslant \max_{x\in[a,b]} |(x - x_1) \dots (x - t_m)| \min_{[a,b]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right|$$

D'où l'on déduit la première partie de l'inégalité (1) :

$$\varepsilon_n(f\,;\,T) \geqslant \frac{A_n(T)}{(n+1)!} \min_{[a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \tag{3}$$

Soient $x_1^*, \dots, x_{n-m+1}^*$ les valeurs rendant minimum la quantité

$$\max_{x\in[a,b]} |(x - x_1) \dots (x - x_{n-m+1})(x - t_1) \dots (x - t_m)|.$$

On a donc :

$$A_n(T) = \max_{x\in[a,b]} |(x - x_1^*) \dots (x - x_{n-m+1}^*)(x - t_1) \dots (x - t_m)|.$$

Soit R le polynôme d'interpolation (au sens de Hermite) de f aux points $x_1^*, \dots, x_{n-m+1}^*, t_1, \dots, t_m$. On a alors :

$$f(x) - R(x) = (x - x_1^*) \cdots (x - x_{n-m+1}^*)(x - t_1) \cdots (x - t_m) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

D'où :

$$\|f - R\| \leqslant A_n(T) \max_{[a,b]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| \tag{4}$$

Le polynôme R appartient à $W_n(f;\,T)$ et on a : $\varepsilon_n(f;\,T) \leqslant \|f - R\|$ ce qui démontre la 2^e^ partie de l'inégalité (1).

Remarque 1 : $f^{(n+1)}$ étant continue, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que :

$$\varepsilon_n(f;\,T) = \frac{A_n(T)}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)|$$

Dans le cas où il n'y a pas de nœuds, on retrouve le résultat démontré dans [4], [5] ou [9].

Corollaire : *si f est $(n + 1)$ fois dérivable sur $[a, b]$, on a :*

$$\varepsilon_n(f;\,T) \leqslant \frac{(b-a)^{n-m+1}}{2^{2n-2m+1}(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |(x - t_1) \cdots (x - t_m)| \,.\, \|f^{(n+1)}\|. \tag{5}$$

En effet :

$$A_n(T) \leqslant \max_x |(x - t_1) \dots (x - t_m)| \,.\, \inf_{x_i} [\max_x |(x - x_1) \dots (x - x_{n-m+1})|]$$
$$= \frac{(b-a)^{n-m+1}}{2^{2(n-m)+1}} \max_x |(x - t_1) \dots (x - t_m)|$$

d'après les propriétés des polynômes de Tchebycheff.

Cette majoration est moins bonne que celle du théorème 3 mais la quantité $\max_x |(x - t_1) \cdots (x - t_m)|$ est plus facile à calculer que $A_n(T)$.

IV COMPARAISON DE L'ERREUR POUR DEUX FONCTIONS f ET g

THÉORÈME 4 : *si f et g sont $(n + 1)$ fois continuement dérivables sur $[a, b]$ et si $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant g^{(n+1)}(x)$ sur $[a, b]$, on a :*

$$\varepsilon_n(f; T) \leqslant \varepsilon_n(g; T) \tag{6}$$

Ce résultat généralise celui donné dans le cas sans conditions d'interpolation ([3], [4], [5], [8]).

Supposons d'abord $|f^{(n+1)}(x)| < g^{(n+1)}(x)$ sur $[a, b]$ et soit P^* la meilleure approximation de f dans $W_n(f; T)$. D'après le théorème 1, il existe des points $e_1 < \ldots < e_{n-m+2}$ de Q tels que, si $\{ s_1 < \ldots < s_{n+2} \} = T \cup \{ e_1, \ldots, e_{n-m+2} \}$:

$$f(s_i) - P^*(s_i) = (-1)^i \varepsilon \nu_i \|f - P^*\| \qquad i = 1, \ldots, n + 2$$

avec $\varepsilon = \pm 1$, $\nu_i = 0$ si s_i est un nœud, $\nu_i = 1$ dans l'autre cas.

Soit R la meilleure approximation de g dans $W_n(g; T)$ sur l'ensemble fini $\{ e_1, \ldots, e_{n-m+2} \}$. D'après le théorème 1, on a :

$$g(s_i) - R(s_i) = (-1)^i \nu_i \rho \qquad i = 1, \ldots, n + 2$$

et le théorème 2 donne : $\varepsilon_n(g; T) \geqslant |\rho|$.

Posons alors :

$$h(x) = [g(x) - R(x)]\varepsilon_n(f; T) - \varepsilon\rho[f(x) - P^*(x)]$$

On a : $$h(s_i) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n + 2$$

h est une fonction $(n + 1)$ fois continuement dérivable et admet $(n + 2)$ zéros distincts. D'après le théorème de Rolle, h' admet au moins $(n + 1)$ zéros distincts, $\ldots$, $h^{(n+1)}$ admet au moins un zéro ξ :

$$g^{(n+1)}(\xi)\varepsilon_n(f; T) - \varepsilon\rho f^{(n+1)}(\xi) = 0$$

et comme $g^{(n+1)}$ ne s'annule pas :

$$\varepsilon_n(f; T) = |\rho| \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{g^{(n+1)}(\xi)} < |\rho| \leqslant \varepsilon_n(g; T)$$

Supposons maintenant $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant g^{(n+1)}(x)$ sur $[a, b]$. Quel que soit $\alpha > 0$, on a :

$$|f^{(n+1)}(x)| < g^{(n+1)}(x) + \alpha = [g(x) + \alpha\varphi(x)]^{(n+1)}$$

avec : $$\varphi(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

D'après ce qui précède, on a donc :

$$\varepsilon_n(f; T) < \varepsilon_n(g + \alpha\varphi; T)$$

Mais tout polynôme $R \in W_n(g + \alpha\varphi; T)$ peut s'écrire $R = R_1 + \alpha R_2$ avec $R_1 \in W_n(g; T)$ et $R_2 \in W_n(\varphi; T)$:

$$\|g + \alpha\varphi - R\| \leqslant \|g - R_1\| + \alpha\,\|\varphi - R_2\|$$

Et finalement :

$$\varepsilon_n(f; T) < \varepsilon_n(g + \alpha\varphi; T) \leqslant \varepsilon_n(g; T) + \alpha\varepsilon_n(\varphi; T)$$

Cette inégalité étant vérifiée quel que soit $\alpha > 0$, il en résulte :

$$\varepsilon_n(f; T) \leqslant \varepsilon_n(g; T)$$

V. BORNES DE L'ERREUR DÉDUITES D'UN ENCADREMENT DE LA DÉRIVÉE D'ORDRE $n + 1$

Pour la fonction $x \mapsto g(x) = \eta x^{n+3} + \tau x^{n+2} + x^{n+1}$, on peut obtenir un encadrement de $\varepsilon_n(g; T)$ donné par les lemmes 1 et 2.

LEMME 1 : *en se plaçant sur l'intervalle* $[-1, +1]$, *on a :*

$$\varepsilon_n(g; T) \geqslant \frac{B_n(T)}{2^{n-m}}\left|1 + \tau\Sigma t_i + \eta\left(\sum_{i \geqslant j} t_i t_j + \frac{n-m+3}{4}\right)\right| \tag{7}$$

avec :

$$g(x) = \eta x^{n+3} + \tau x^{n+2} + x^{n+1}$$

$$B_n(T) = \min_{0 \leqslant k \leqslant n-m+1}\left|\prod_{j=1}^{m}\left(\cos\frac{k\pi}{n-m+1} - t_j\right)\right|.$$

Si $R \in W_n(g; T)$, la fonction $g - R$ s'annule aux nœuds et :

$$g(x) - R(x) = (x - t_1)\ldots(x - t_m)[\eta x^{n+3-m} + \lambda x^{n+2-m} + \mu x^{n+1-m} + P(x)] \tag{8}$$

où P est un polynôme de degré $n - m$ au plus.

En identifiant dans les deux membres de (8) les termes en x^{n+2} et x^{n+1}, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda = \tau + \eta\Sigma t_i \\ \mu = 1 + \lambda\Sigma t_i - \eta \sum_{i<j} t_i t_j = 1 + \tau\Sigma t_i + \eta \sum_{i \geqslant j} t_i t_j \end{cases} \tag{9}$$

Introduisons les polynômes de Tchebycheff de première et de deuxième espèce T_k et U_k :

$$T_k(x) = 2^{k-1}x^k + \ldots$$
$$U_k(x) = 2^k x^k - (k-1)2^{k-2}x^{k-2} + \ldots$$

ce qui permet d'écrire :

$$\eta x^{n+3-m} + \lambda x^{n+2-m} + \mu x^{n+1-m} + P(x)$$
$$= \frac{1}{2^{n-m}}\left[\left(\mu + \eta\frac{n-m+3}{4}\right)T_{n-m+1}(x)\right.$$
$$\left. + (\lambda + \eta x)(x^2 - 1)U_{n-m}(x) + Q(x)\right] \quad (10)$$

où Q est un polynôme de degré $n - m$ au plus.

Choisissons R de manière à ce que le polynôme Q soit identiquement nul. Aux points $x_k = \cos\dfrac{k\pi}{n-m+1}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-m+1)$, on a

$$(x^2 - 1)U_{n-m}(x) = 0$$

et par suite d'après (8) et (10) :

$$g(x_k) - R(x_k) = \frac{(x_k - t_1)\cdots(x_k - t_m)}{2^{n-m}}\left(\mu + \eta\frac{n-m+3}{4}\right)(-1)^k. \quad (11)$$

L'inégalité à démontrer s'écrit simplement :

$$\varepsilon_n(g; T) \geqslant \frac{B_n(T)}{2^{n-m}}\left|\mu + \eta\frac{n-m+3}{4}\right| \quad (12)$$

avec :

$$B_n(T) = \min_k \left|\prod_{j=1}^{m}(x_k - t_j)\right|.$$

Nous supposerons que $x_k \notin \{t_1, \ldots, t_m\}$ et que de plus $\mu + \eta\dfrac{n-m+3}{4} \neq 0$ (sinon l'inégalité se réduit à $\varepsilon_n \geqslant 0$).

Si l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ contient p nœuds, on a :

$$(-1)^p[(x_k - t_1)\ldots(x_k - t_m)][(x_{k+1} - t_1)\ldots(x_{k+1} - t_m)] > 0$$

soit, d'aprés (11) :

$$(-1)^p[g(x_k) - R(x_k)][g(x_{k+1}) - R(x_{k+1})] < 0$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-m+1$$

Le théorème 2 donne alors :

$$\varepsilon_n(g; T) \geqslant \min_k |g(x_k) - R(x_k)|$$

c'est-à-dire l'inégalité (12).

LEMME 2 : *en se plaçant sur l'intervalle* $[-1, +1]$:

$$\varepsilon_n(g; T) \leqslant \frac{C}{2^{n-m}} \max_x |(x - t_1) \cdots (x - t_m)| \tag{13}$$

avec :

$$g(x) = \eta x^{n+3} + \tau x^{n+2} + x^{n+1}$$

$$C = \left[1 + \frac{n - m + 2}{n - m + 1}\left(\frac{\tau + \eta \Sigma t_i}{\mu}\right)^2\right] . |\mu| + \frac{n - m + 5}{4}|\eta|$$

$$\mu = 1 + \tau \Sigma t_i + \eta \sum_{i \geqslant j} t_i t_j$$

En utilisant (8) et (10) avec $Q \equiv 0$, on a :

$$\varepsilon_n(g; T) \leqslant \|g - R\| \leqslant \frac{A}{2^{n-m}} \max_x |(x - t_1) \cdots (x - t_m)|$$

avec :

$$A = \left\|\left(\mu + \eta \frac{n - m + 3}{4}\right) T_{n-m+1} + (\lambda + \eta x)(x^2 - 1) U_{n-m}\right\| . \tag{14}$$

Or d'après [5] (p. 79) :

$$\|T_{k+1} + \alpha(x^2 - 1) U_k\| \leqslant 1 + \frac{k + 2}{k + 1}\alpha^2$$

$$\|x(x^2 - 1) U_k\| \leqslant \frac{1}{2}$$

On en déduit :

$$A \leqslant \|\mu T_{n-m+1} + \lambda(x^2 - 1) U_{n-m}\| + \left\|\eta \frac{n - m + 3}{4} T_{n-m+1}\right\| + \|\eta x(x^2 - 1) U_{n-m}\|,$$

$$A \leqslant |\mu|\left[1 + \frac{n - m + 2}{n - m + 1} . \frac{\lambda^2}{\mu^2}\right] + |\eta|\left(\frac{n - m + 3}{4} + \frac{1}{2}\right).$$

En reportant la valeur de λ donnée par (9), on obtient (13).

REMARQUE 2 : on peut aussi majorer A en écrivant :

$$A \leqslant \left| \mu + \eta \frac{n-m+3}{4} \right| . \| T_{n-m+1} \| + |\lambda| . \| (x^2 - 1) U_{n-m} \| + |\eta| . \| x(x^2 - 1) U_{n-m} \|$$
$$\leqslant \left| \mu + \eta \frac{n-m+3}{4} \right| + |\lambda| . \| (x^2 - 1) U_{n-m} \| + \frac{|\eta|}{2}.$$

Or, en posant : $x = \cos \theta$:

$$|(x^2 - 1) U_{n-m}(x)| = |\sin \theta \sin (n - m + 1)\theta| \leqslant 1.$$

Dans le lemme 2, C est alors remplacé par :

$$C' = \left| \mu + \eta \frac{n-m+3}{4} \right| + \frac{|\eta|}{2} + |\tau + \eta \Sigma t_i|$$

ou en majorant encore par :

$$C'' = |\mu| + |\eta| \frac{n-m+5}{4} + |\tau + \eta \Sigma t_i|.$$

REMARQUE 3 : On pourrait majorer $\varepsilon_n(g; T)$ en utilisant le corollaire du théorème 3 :

$$g(x) = \eta x^{n+3} + \tau x^{n+2} + x^{n+1}$$

$$g^{(n+1)}(x) = (n+1)! \left[\frac{(n+2)(n+3)}{2} \eta x^2 + (n+2) \tau x + 1 \right].$$

D'où :

$$\varepsilon_n(g; T) \leqslant \frac{\max_x |(x - t_1) \dots (x - t_m)|}{2^{n-m}} \left\| \frac{(n+2)(n+3)}{2} \eta x^2 + (n+2) \tau x + 1 \right\|.$$

Mais en général cette majoration est moins bonne que les précédentes à cause des facteurs $(n + 2)$ et $(n + 3)$.

En utilisant les lemmes 1 et 2 et un encadrement de $f^{(n-1)}(x)$, on obtient alors un encadrement de $\varepsilon_n(f; T)$:

THÉORÈME 5 : *soit f une fonction $(n + 1)$ fois continuement dérivable sur $[-1, +1]$ et telle que :*

$$0 \leqslant \alpha + \beta x + \gamma x^2 \leqslant f^{(n+1)}(x) \leqslant \alpha + \beta x + \delta x^2$$

avec $\alpha > 0$. *On a alors* :

$$\varepsilon_n(f;T) \geqslant \frac{A}{2^{n-m}(n+1)!} \min_{0 \leqslant k \leqslant n-m+1} \left| \prod_{j=1}^{m} \left(\cos \frac{k\pi}{n-m+1} - t_j \right) \right| \quad (15)$$

$$\varepsilon_n(f;T) \leqslant \frac{B}{2^{n-m}(n+1)!} \max_x |(x-t_1)\dots(x-t_m)| \quad (16)$$

avec :

$$A = \left| \alpha + \frac{\beta}{n+2} \Sigma t_i + \frac{2\gamma}{(n+2)(n+3)} \left[\sum_{i \geqslant j} t_i t_j + \frac{n-m+3}{4} \right] \right|$$

$$B = \alpha |\mu| + \frac{(n-m+5)|\delta|}{2(n+2)(n+3)} + \frac{n-m+2}{(n-m+1)\alpha|\mu|} \left[\frac{\beta}{n+2} + \frac{2\delta \Sigma t_i}{(n+2)(n+3)} \right]^2$$

$$\mu = 1 + \frac{\beta}{(n+2)\alpha} \Sigma t_i + \frac{2\delta}{(n+2)(n+3)\alpha} \sum_{i \geqslant j} t_i t_j .$$

Quand il n'y a pas de nœuds, on retrouve l'encadrement donné par Meinardus ([5], théorème 61).

Soit d'abord :

$$g_1(x) = \frac{\alpha x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{\beta x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{2\gamma x^{n+3}}{(n+3)!}.$$

On a :

$$0 \leqslant g_1^{(n+1)}(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \leqslant f^{(n+1)}(x)$$

D'après le théorème 4 : $\varepsilon_n(f;T) \geqslant \varepsilon_n(g_1;T)$ et en appliquant le lemme 1, on obtient (15).

De même :

$$g_2(x) = \frac{\alpha x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{\beta x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{2\delta x^{n+3}}{(n+3)!}$$
$$\varepsilon_n(f;T) \leqslant \varepsilon_n(g_2;T).$$

et en appliquant le lemme 2, on obtient (16).

REMARQUE 4 : on a le même résultat lorsque :

$$0 \leqslant \alpha + \beta x + \gamma x^2 \leqslant -f^{(n+1)}(x) \leqslant \alpha + \beta x + \delta x^2$$

avec $\alpha > 0$ car on peut appliquer le théorème 5 à $-f$ et on a :

$$\varepsilon_n(f;T) = \varepsilon_n(-f;T).$$

REMARQUE 5 : à la place de la constante C du lemme 2, on peut utiliser les constantes C' et C'' de la remarque 2. Dans la formule (16), B est alors remplacé par B' ou B'' :

$$B' = \left|\alpha\mu + \frac{(n-m+3)\delta}{2(n+2)(n+3)}\right| + \frac{|\delta|}{(n+2)(n+3)} + \left|\frac{\beta}{n+2} + \frac{2\delta\Sigma t_i}{(n+2)(n+3)}\right|$$

$$B'' = \alpha\,|\mu| + \frac{(n-m+5)\,|\delta|}{2(n+2)(n+3)} + \left|\frac{\beta}{n+2} + \frac{2\delta\Sigma t_i}{(n+2)(n+3)}\right|.$$

VI. EXEMPLES

Exemple 1 : approximation de e^x sur $[0, 1]$ par des polynômes de degré 1 avec un nœud $t_1 = 0$. On a alors (en conservant 7 décimales) :

$$\varepsilon_1 = 0.1413368$$
$$P^*(x) = 1 + 1.576945x$$

On obtient :

$$A_1(T) = \inf_{x_1}\left[\max_{[0,1]} |(x - x_1)x|\right]$$

soit, d'après [6] : $A_1(T) = 3 - 2\sqrt{2}$

Le théorème 3 donne alors l'encadrement :

$$0.0857 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant 0.233$$

Pour appliquer le théorème 5, on pose $x = \dfrac{u+1}{2}$ et on se ramène à l'approximation de $\sqrt{e}\,e^{\frac{u}{2}}$ sur $[-1, +1]$ avec un nœud $u_1 = -1$. On a ([5]) l'encadrement :

$$1 + u + \frac{u^2}{e} \leqslant e^u \leqslant 1 + u + (e-2)u^2$$

$$\frac{\sqrt{e}}{4}\left(1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4e}\right) \leqslant f''(u) \leqslant \frac{\sqrt{e}}{4}\left(1 + \frac{u}{2} + \frac{(e-2)u^2}{4}\right)$$

et le théorème 5 donne alors :

$$0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant 0.377$$

Exemple 2 : approximation de e^x sur $[0, 1]$ par des polynômes de degré 2 avec un nœud $t_1 = 0.5$

On a alors (avec 8 décimales) :

$$P^*(x) = 1.0092741 + 0.85805506x + 0.84167857x^2$$
$$\varepsilon_2 = 0.0092741$$

On obtient :

$$A_2(T) = \inf_{x_i} [\max_{[0,1]} |(x - x_1)(x - x_2)(x - 0.5)|]$$

ou, en posant : $x = \dfrac{u+1}{2}$:

$$A_2(T) = \frac{1}{8} \inf_{u_i} [\max_{[-1,+1]} |u(u - u_1)(u - u_2)|]$$

Le minimum est obtenu pour le polynôme $\frac{1}{4} T_3$ et on a :

$$A_2(T) = \frac{1}{32}.$$

Le théorème 3 donne alors l'encadrement :

$$0.0052 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant 0.0142$$

En appliquant le théorème 5 comme dans l'exemple précédent, on se ramène à l'approximation de $\sqrt{e}\, e^{\frac{u}{2}}$ sur $[-1, +1]$ avec un nœud $u_1 = 0$ et on obtient :

$$0 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant 0.0180$$

REMARQUE 6 : On a obtenu une borne inférieure nulle car l'un des nœuds est égal à l'un des nombres $\cos \dfrac{k\pi}{n - m + 1}$. Si le nœud n'est pas ± 1, on peut améliorer le résultat en remplaçant n par $(n + 1)$ car $\varepsilon_n(f\,;T) \geqslant \varepsilon_{n+1}(f\,;T)$. Ainsi dans l'exemple 2 :

$$\varepsilon_2 \geqslant \varepsilon_3 \quad \text{avec} \quad \varepsilon_3 \geqslant 0.00055$$

REMARQUE 7 : Le corollaire du théorème 3 et la remarque 5 fournissent également des estimations (moins bonnes que les précédentes) :

$$\varepsilon_1 \leqslant 0.680 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant 0.415 \quad \text{(exemple 1)}$$
$$\varepsilon_2 \leqslant 0.0283 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant 0.0198 \quad \text{(exemple 2)}$$

Exemple 3 : approximation de e^x sur $[-1, +1]$ par des polynômes de degré n quelconque avec un nœud $t_1 = 0$.

On a :

$$A_n(T) = \inf_{x_i} [\max_{x \in [-1,+1]} |x(x - x_1) \ldots (x - x_n)|].$$

Si n est pair, le minimum est obtenu pour le polynôme de Tchebycheff T_{n+1} (qui s'annule pour $x = 0$) et on a alors :

$$A_n(T) = \frac{1}{2^n}.$$

Le théorème 3 donne alors :

$$\frac{1}{2^{2k}(2k+1)!} \leqslant \varepsilon_{2k} \leqslant \frac{e}{2^{2k}(2k+1)!}. \tag{17}$$

Si n est impair, $A_n(T)$ ne s'exprime pas simplement et on peut seulement écrire :

$$\varepsilon_{2k+2} \leqslant \varepsilon_{2k+1} \leqslant \varepsilon_{2k}$$

soit, en utilisant (17) :

$$\frac{1}{2^{2k+2}(2k+3)!} \leqslant \varepsilon_{2k+1} \leqslant \frac{e}{2^{2k}(2k+1)!}. \tag{18}$$

Pour l'utilisation du théorème 5, on a :

$$1 + x + \frac{x^2}{e} \leqslant f^{(n+1)}(x) \leqslant 1 + x + (e-2)x^2.$$

On en déduit :

$$\varepsilon_{2k+1} \geqslant \frac{\cos\dfrac{k\pi}{2k+1}}{2^{2k}(2k+2)!}\left[1 + \frac{1}{4(k+2)e}\right]. \tag{19}$$

Pour n pair, on obtient seulement $\varepsilon_{2k} \geqslant 0$ qu'on remplace par $\varepsilon_{2k} \geqslant \varepsilon_{2k+1}$ c'est-à-dire :

$$\varepsilon_{2k} \geqslant \frac{\cos\dfrac{k\pi}{2k+1}}{2^{2k}(2k+2)!}\left[1 + \frac{1}{4(k+2)e}\right]. \tag{20}$$

Enfin, on a, quelle que soit la parité de n :

$$\varepsilon_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}(n+1)!}\left[1 + \frac{(n+4)(e-2)}{2(n+2)(n+3)} + \frac{n+1}{n(n+2)^2}\right]. \tag{21}$$

Sur cet exemple, on constate que les meilleures majorations sont fournies par le théorème 5 alors que les meilleures minorations sont fournies par le théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. J. DAVIS, *Interpolation and approximation*, Blaisdell, 1963.
2. F. R. DEUTSCH, *On uniform approximation with interpolatory constraints*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 24, 1968, p. 62-79.
3. M. GOLOMB, *Lectures on theory of approximation*, Argonne National Laboratory, 1962.
4. P. J. LAURENT, *Approximation et optimisation*, Hermann, Paris, 1972.
5. G. MEINARDUS, *Approximation of functions : theory and numerical methods*, Springer, New-York, 1967.
6. S. PASZKOWSKI, *Sur l'approximation uniforme avec des nœuds*, Ann. Polon. Math., Vol. 2, 1955, p. 118-135.
7. S. PASZKOWSKI, *On approximation with nodes*, Rozprawy Matematyczne, Vol. 14, 1957.
8. S. PASZKOWSKI, *The theory of uniform approximation*, Rozprawy Matematyczne, Vol. 26, 1962.
9. G. M. PHILIPPS, *Estimate of the maximum error in best polynomial approximations*, The Computer J., Vol. 11, 1968, p. 110-111.