

# RAIRO

## ANALYSE NUMÉRIQUE

MICHEL COSNARD

**Caractérisations de la convergence locale de la  
méthode des approximations successives**

*RAIRO – Analyse numérique*, tome 11, n° 3 (1977), p. 225-240.

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1977\\_\\_11\\_3\\_225\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1977__11_3_225_0)

© AFCET, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO – Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CARACTÉRISATIONS DE LA CONVERGENCE LOCALE DE LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES (1)

Michel COSNARD (2)

Communiqué par F. ROBERT.

Résumé. — Ce travail présente des caractérisations de la convergence locale de la méthode des approximations successives. Elles généralisent des résultats obtenus par Stepleman pour une classe particulière de fonctions réelles. Les théorèmes principaux proposent des conditions nécessaires et suffisantes qui utilisent pleinement la connaissance du point fixe et des itérés de la fonction. Plus précisément, étant donnée une fonction  $F$  d'une partie compacte d'un espace métrique  $(E, d)$  dans  $(E, d)$  possédant un point fixe, la méthode des approximations successives est localement convergente vers  $x^*$  si et seulement si

$$\exists \varepsilon \geq 0 \quad \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \quad x \neq x^* \quad \exists p \in \mathbf{N}, \quad \forall i \geq p \quad d(F^i x, x^*) < d(x, x^*)$$

La généralité des hypothèses ne nous a pas permis de simplifier la condition. Cependant la structure particulière de  $\mathbf{R}$  conduit à une caractérisation plus précise : la méthode est localement convergente si et seulement si il existe  $\varepsilon$  positif tel que, quel que soit le point de départ dans  $[x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$  la suite des approximations successives possède une sous-suite convergeant vers  $x^*$ . Des corollaires concernant des applications non expansives et strictement non expansives sont aussi présentés.

### INTRODUCTION

La méthode des approximations successives est un des outils de base dans l'étude des problèmes de points fixes. Pendant longtemps, les travaux, sur ce sujet, se sont préoccupés d'établir des conditions suffisantes d'existence de points fixes et, parfois, de convergence de la méthode. Récemment, ils se sont tournés vers des problèmes d'intérêt plus théorique : étude de la structure de la suite des approximations successives et de conditions nécessaires et suffisantes de convergence (le lecteur intéressé trouvera dans [5] un tour d'horizon).

(1) Manuscrit reçu le 20 janvier 1977.

(2) Université scientifique et médicale, Laboratoire de mathématiques appliquées, Grenoble, France.

zon des résultats de base concernant les problèmes de points fixes). De telles caractérisations ont été proposées par Ostrowski [9], Bashurov et Obigin [2], Sarkovski [10]. En 1975, Stepleman [11], s'inspirant des travaux d'Ostrowski, a présenté une caractérisation de convergence locale pour certaines fonctions de la variable réelle.

Dans cet exposé, nous proposons des conditions nécessaires et suffisantes de convergence locale généralisant les résultats de Stepleman. En effet, les théorèmes qui suivent se placent dans le même cadre que ceux de ce dernier : étude d'une fonction continue admettant un point fixe qui intervient de manière explicite dans les conditions obtenues.

Nous caractérisons tout d'abord la convergence locale de la méthode opérant sur des applications continues d'une partie compacte d'un espace métrique dans lui-même. Le résultat obtenu est complété par des corollaires faisant intervenir des fonctions particulières, des exemples et des contre-exemples.

Le cas des fonctions de la variable réelle est étudié séparément car il permet d'obtenir des résultats plus approfondis qui, en particulier, généralisent les théorèmes de Stepleman, de Bashurov et Obigin.

Le plan de l'exposé est donc le suivant :

II Préliminaires

III Une caractérisation générale

IV Exemples d'applications

V Le cas particulier des fonctions réelles

VI Conclusions.

## II. PRÉLIMINAIRES

Une application  $F$  d'un espace métrique  $(E, d)$  dans lui-même admet un point fixe s'il existe  $x^*$  dans  $E$  tel que :

$$x^* = Fx^*$$

$F$  est dite non expansive si elle vérifie la condition suivante :

$$\forall x, y \in D \quad d(Fx, Fy) \leq d(x, y)$$

$F$  est dite strictement non expansive si dans la relation précédente l'inégalité est stricte.

La méthode des approximations successives consiste à construire une suite, dite suite des approximations successives, issue d'un point de départ  $x_0$  et conduite sur  $F$  par le procédé itératif suivant

$$x_n = Fx_{n-1}$$

Par la suite, nous appellerons  $F^k$  la fonction qui à  $x$  de  $E$  fait correspondre le  $k$ ième itéré de la suite issue de  $x$ .

$F$  admet un point périodique de période  $k$  s'il existe un élément  $x$  de  $E$  et un entier positif  $k$  tel que :

$$x = F^k x \quad (\text{avec } F^k x = F^{k-1} [F x] \cup F^0 x = x).$$

La méthode est dite localement convergente vers  $x^*$  (on dit aussi que  $x^*$  est un point d'attraction), s'il existe  $\varepsilon$ , réel positif, tel que, quel que soit le point de départ  $x_0$  dans la boule de centre  $x^*$  et de rayon  $\varepsilon$ , la suite des approximations successives converge vers  $x^*$ . La boule de centre  $x^*$  et de rayon  $\varepsilon$  est alors appelée une région de convergence locale.

La méthode est dite convergente (ou globalement convergente) si, quel que soit le point de départ  $x_0$  dans  $E$ , la suite des approximations successives converge vers une limite (qui peut dépendre de  $x_0$  et qui est point fixe si  $F$  est continue).

La méthode est dite convergente vers  $x^*$  si elle est convergente et que, de plus, la limite obtenue est toujours  $x^*$ .

Un ensemble  $\mathcal{F}$  d'applications d'un espace métrique  $(E, d)$  dans un autre espace métrique  $(E', d')$  est équicontinu si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall G \in \mathcal{F} \forall x, y \in E \quad d(x, y) \leq \eta \Rightarrow d'(Gx, Gy) \leq \varepsilon$$

Nous rappelons pour terminer le théorème de base concernant les ensembles équicontinus.

**THÉORÈME 1 (Ascoli, cf. [3]).** Soient  $(E, d)$  et  $(E', d')$  deux espaces métriques compacts et  $\mathcal{F}$  une partie de l'espace des applications continues de  $E$  dans  $E'$ , noté  $\mathcal{C}(E, E')$  muni de la topologie de la convergence uniforme.

Alors  $\mathcal{F}$  est équicontinu si et seulement si  $\mathcal{F}$  est relativement compact dans  $\mathcal{C}(E, E')$ .

### III. UNE CARACTÉRISATION GÉNÉRALE

Soit  $D$  une partie compacte d'un espace métrique  $(E, d)$ . Soit  $F$  une application continue de  $D$  dans  $E$  admettant dans  $D$  un point fixe  $x^*$ . Pour que la méthode des approximations successives, conduite sur  $F$ , converge localement vers  $x^*$  il est nécessaire qu'il existe un voisinage de  $x^*$  ne contenant aucun autre point fixe et aucun point périodique. Il semble, de plus, nécessaire que les itérés, issus de tout point du voisinage, soient plus proches de  $x^*$  que le point lui-même, du moins à partir d'un certain rang.

Ces deux conditions forment en réalité une condition nécessaire et suffisante de convergence d'où le

**THÉORÈME 2 :** *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la méthode des approximations successives est localement convergente vers  $x^*$  et la région de convergence est la boule fermée de centre  $x^*$  et de rayon  $\varepsilon$  notée  $B(x^*, \varepsilon)$ , où  $\varepsilon$  est un réel positif.*

(ii)

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \ x \neq x^* \exists p \in \mathbf{N} \forall i \geq p \ d(F^i x, x^*) < d(x, x^*). \quad (2.1)$$

Nous consacrons le reste de cette partie à la démonstration du résultat précédent. Pour en faciliter la compréhension, nous allons présenter deux lemmes. Dans le premier, nous montrons que la condition (i) implique (ii) ce qui constitue, comme nous l'avons vu intuitivement plus haut, la partie facile de la démonstration.

**LEMME 1 :** *La condition (2.1) est une condition nécessaire pour que la méthode des approximations successives soit localement convergente.*

*Démonstration :* Nous raisonnons par l'absurde. Supposons que la condition (2.1) ne soit pas vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in B(x^*, \varepsilon) \ x \neq x^* \forall p \in \mathbf{N} \exists i \geq p \ d(F^i x, x^*) \geq d(x, x^*)$$

Fixons-nous  $\varepsilon$  et  $x$  dans  $B(x^*, \varepsilon)$ . Prenons  $p = 1, 2, \dots$  et appelons  $i_p$  l'indice  $i$  associé à  $p$  par la relation précédente. Nous obtenons :

$$\forall p \in \mathbf{N} \quad F^{i_p} x \notin B(x^*, d(x, x^*)) \quad (\text{boule ouverte}). \quad (2.2)$$

Or comme, lorsque  $p$  tend vers l'infini,  $i_p$  tend vers l'infini puisqu'il lui est supérieur ou égal,  $\{ F^{i_p} x \}$  est une sous-suite de la suite des approximations successives (dès que l'on a enlevé les éléments qui se répètent). La relation (2.2) nous montre que cette sous-suite ne peut pas converger vers  $x^*$  et donc que la méthode n'est pas localement convergente.

Le lemme 2 a un double intérêt : il sert à la démonstration de l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i) et il sera utilisé dans la partie de l'exposé réservée aux fonctions réelles.

**LEMME 2 :** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une boule autour de  $x^*$  telle que, quel que soit le point de départ dans cette boule, la suite des approximations successives, issue de ce point, admette une sous-suite convergente vers  $x^*$  est que*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \ x \neq x^* \quad \exists p \in \mathbf{N} \quad d(F^p x, x^*) < d(x, x^*) \quad (2.3)$$

*Démonstration :* Pour montrer que la condition est nécessaire, nous raisonnons par l'absurde. Supposons que la condition ne soit pas vérifiée.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in B(x^*, \varepsilon) \ x_0 \neq x^* \quad \forall p \in \mathbf{N} \quad d(F^p x_0, x^*) \geq d(x_0, x^*)$$

Si nous posons  $x_p = F^p x_0$  la relation précédente s'écrit :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad x_p \notin B(x^*, d(x_0, x^*))$$

et donc il ne peut pas y avoir convergence d'une sous-suite de  $\{x_p\}$  vers  $x^*$ .

Pour démontrer la condition suffisante, supposons la condition (2.3) vérifiée et choisissons  $x_0 (\neq x^*)$  quelconque dans  $B(x^*, \varepsilon)$ .

$$x_0 \in B(x^*, \varepsilon) \quad \exists p_1 \in \mathbb{N} \quad d(F^{p_1} x_0, x^*) < d(x_0, x^*)$$

et  $\forall k < p_1 \quad d(F^k x_0, x^*) \geq d(x_0, x^*)$

Posons  $x_{p_1} = F^{p_1} x_0$  et répétons le procédé :

$$x_{p_1} \in B(x^*, \varepsilon) \quad \exists p_2 \in \mathbb{N} \quad d(F^{p_2} x_{p_1}, x^*) < d(x_{p_1}, x^*)$$

et  $\forall k p_1 \leq k < p_2 \quad d(F^k x_{p_1}, x^*) \geq d(x_{p_1}, x^*)$ .

Nous obtenons donc une suite  $\{x_{p_i}\}$  telle que :

$$\exists \{x_{p_i}\} \subset \{x_n\} \quad d(x_{p_i}, x^*) < d(x_{p_{i-1}}, x^*) < \dots < d(x_0, x^*)$$

La suite  $d(x_{p_i}, x^*)$  est décroissante et minorée par zéro, donc elle converge. De plus la suite  $\{x_{p_i}\}$  est contenue dans  $B(x^*, \varepsilon)$  qui est compacte, on peut donc en extraire une sous-suite convergente

$$\exists \{x_{q_i}\} \subset \{x_{p_i}\} \quad \text{et} \quad \exists x^{**} \quad \begin{cases} \lim_{i \rightarrow \infty} d(x_{q_i}, x^*) = d(x^{**}, x^*) \\ \lim_{i \rightarrow \infty} x_{q_i} = x^{**} \end{cases}$$

Nous allons montrer qu'il est impossible que  $x^{**}$  soit différent de  $x^*$ . Supposons le et appliquons la condition du théorème à  $x^{**}$  :

$$x^{**} \in B(x^*, \varepsilon) \quad \exists r \in \mathbb{N} \quad d(F^r x^{**}, x^*) < d(x^{**}, x^*)$$

Posons alors :

$$d(x^{**}, x^*) - d(F^r x^{**}, x^*) = \eta > 0$$

De la continuité de  $F$  et de ses puissances nous déduisons :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F^r x_{q_i} = F^r x^{**}$$

ce qui implique que :

$$\exists M \quad \forall q_i > M \quad d(F^r x_{q_i}, F^r x^{**}) < \eta$$

A partir de cette relation nous obtenons :

$$\begin{aligned} \forall q_i > M \quad d(F^r x_{q_i}, x^*) &< d(F^r x_{q_i}, F^r x^{**}) + d(F^r x^{**}, x^*) \\ &< \eta + d(x^*, x^{**}) - \eta \end{aligned}$$

et donc :

$$\forall q_i > M \quad d(F^r x_{q_i}, x^*) < d(x^*, x^{**})$$

Or cela est contradictoire avec le fait que :

$$\forall n \quad d(x_n, x^*) \geq d(x^{**}, x^*)$$

Donc  $x^{**} = x^*$  et la suite  $\{x_n\}$  tend vers  $x^*$ . On déduit facilement alors que toute la suite  $\{x_p\} \subset \{x_n\}$  converge vers  $x^*$  ce qui conclut la démonstration.

Nous pouvons maintenant nous tourner vers la démonstration du théorème.

*Démonstration du théorème :* Le lemme 1 fournit la démonstration de (i)  $\Rightarrow$  (ii).

Pour démontrer l'autre implication, nous supposons (2.1) vérifiée et choisissons  $x_0 (\neq x^*)$  quelconque dans  $B(x^*, \varepsilon)$ . D'après le lemme précédent nous pouvons exhiber une sous-suite de la suite des approximations successives qui converge vers  $x^*$ .

$$\forall \eta \quad 0 < \eta \leq \varepsilon \quad \exists q \quad \forall j \geq q \quad F^{p_j} x_0 \in B(x^*, \eta) \quad (2.4)$$

Notre but est de montrer que toute la suite converge et donc qu'à partir d'un certain rang tous les éléments de la suite sont contenus dans  $B(x^*, \eta)$ . Appliquons la relation (2.1) en posant  $x = F^{p_q} x_0$ .

$$\exists p \in \mathbb{N} \quad \forall i \geq p \quad d(F^i x, x^*) < d(x, x^*)$$

ce qui s'écrit :

$$\exists p \in \mathbb{N} \quad \forall i \geq p \quad d(F^{p_q+i} x_0, x^*) < d(F^{p_q} x_0, x^*) \quad (2.5)$$

De (2.4) et (2.5) nous déduisons :

$$\forall \eta \quad 0 < \eta \leq \varepsilon \quad \exists M = p_q + p \quad \forall j \geq M \quad F^j x_0 \in B(x^*, \eta)$$

ce qui prouve que toute la suite converge.

#### IV. EXEMPLES D'APPLICATIONS

La caractérisation de convergence locale donnée par le théorème 2 est, à notre connaissance, la première se situant dans un cadre aussi général. Elle généralise à la fois les résultats de Stepleman [11] et de Bashurov et Obigin [2] pour les fonctions réelles et ceux de Sarkovski [10].

Dans les corollaires qui suivent, nous donnons quelques exemples d'applications du théorème.

Le premier corollaire redonne un théorème démontré par Diaz et Metcalf [6] concernant les applications strictement non expansive en  $x^*$ .

**COROLLAIRE 2.1 :** *Si, en plus des hypothèses générales sur  $F$  et  $E$ , nous supposons que  $F$  est localement strictement non expansive en  $x^*$ , c'est-à-dire :*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \quad x \neq x^* \quad d(Fx, x^*) < d(x, x^*)$$

*alors la méthode des approximations successives est localement convergente vers  $x^*$  et la région de convergence est  $B(x^*, \varepsilon)$ .*

*Démonstration* : La démonstration est immédiate puisque la relation du corollaire se déduit de (2.1) en prenant  $p = 1$  pour tout  $x$ .

Si, au lieu de fonctions strictement non expansives en  $x^*$ , nous considérons des fonctions non expansives en  $x^*$ , il est bien évident que la convergence n'est plus assurée.

En effet la fonction définie dans  $\mathbf{R}^n$  par :

$$\forall x \in E \quad Fx = x$$

admet tout point comme point fixe tandis que celle définie par :

$$\forall x \in E \quad Fx = -x$$

admet 0 comme point fixe mais, quel que soit  $\varepsilon$ , il n'y a pas convergence vers 0 dans  $B(0, \varepsilon)$ . L'application du théorème 2 nous permet de déduire le :

**COROLLAIRE 2.2** : *Si, en plus des hypothèses sur  $F$  et  $E$ , nous supposons que  $F$  est localement non expansive en  $x^*$ , c'est-à-dire :*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \quad d(Fx, x^*) \leq d(x, x^*)$$

*alors une condition nécessaire et suffisante de convergence locale vers  $x^*$  de la méthode des approximations successives est :*

$$\exists \xi \quad 0 < \xi \leq \varepsilon \quad \forall x \in B(x^*, \xi) \quad x \neq x^* \quad \exists p \in \mathbf{N} \quad d(F^p x, x^*) < d(x, x^*)$$

*Démonstration* : La condition est évidemment nécessaire. Pour démontrer la condition suffisante, nous remarquons que les deux conditions du corollaire nous donne :

$$\exists \xi > 0 \quad \forall x \in B(x^*, \xi) \quad x \neq x^* \quad \exists p \in \mathbf{N} \quad \forall i \geq p \quad d(F^i x, x^*) < d(x, x^*)$$

ce qui est la condition (2.1) du théorème.

Pour terminer nous présentons un corollaire portant sur les applications dont les puissances forment un ensemble équicontinu. Parmi ces applications, on peut citer les applications contractantes, non expansives et strictement non expansives. Ce corollaire constitue donc une extension des théorèmes de Banach [1] et d'Edelstein [7] en ce qui concerne la convergence de la suite des approximations successives.

**COROLLAIRE 2.3** : *Si, en plus des hypothèses sur  $F$  et  $E$ , nous supposons que l'ensemble :*

$$\mathcal{F} = \{ G/G : D \rightarrow E \text{ et } \exists i \in \mathbf{N} \quad G = F^i \}$$

*soit équicontinu dans  $B(x^*, \varepsilon)$ , alors une condition nécessaire et suffisante de convergence locale vers  $x^*$  de la méthode des approximations successives est :*

$$\exists \xi \quad 0 < \xi \leq \varepsilon \quad \forall x \in B(x^*, \xi) \quad x \neq x^* \quad \exists p \in \mathbf{N} \quad d(F^p x, x^*) < d(x, x^*)$$

*Démonstration* : La condition est évidemment nécessaire. Pour démontrer la condition suffisante rappelons la définition de l'équicontinuité :  $\mathcal{F}$  est équicontinu si :

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall G \in \mathcal{F} \quad \forall x, y \in D \quad d(x, y) \leq \eta \Rightarrow d(Gx, Gy) \leq \delta$$

Soit  $x_0$  dans  $B(x^*, \xi)$ . Du lemme 2 nous déduisons qu'il existe une sous-suite de la suite des approximations successives convergeant vers  $x^*$ . Nous l'appelons  $\{x_{n_i}\}$ .

Fixons-nous  $\delta$  et soit  $\eta$  associé à  $\delta$  par équicontinuité. Comme  $\{x_{n_i}\}$  converge, nous avons :

$$\exists N_0 \quad \forall n_i \geq N_0 \quad d(x_{n_i}, x^*) \leq \eta$$

D'après la définition de l'équicontinuité, en prenant  $\eta$  inférieur ou égal à  $\xi$

$$\forall j \in \mathbf{N} \quad \forall n_i \geq N_0 \quad d(F^j x_{n_i}, x^*) \leq \delta$$

ce qui montre bien que toute la suite converge.

Le théorème 1 (Ascoli) ne nous permet pas d'assurer que la convergence de la méthode est uniforme, c'est-à-dire que

$$\forall \eta > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbf{N} \quad \forall i \geq N_0 \quad \forall x \in B(x^*, \xi) \quad d(F^i x, x^*) \leq \eta$$

et, dans la plupart des cas, ce ne sera pas le cas. Par contre, ce même théorème nous montre que l'équicontinuité est une condition nécessaire à la convergence uniforme.

Examinons maintenant de plus près les hypothèses du théorème 2.

Si la partie  $D$  de  $E$  n'est pas compacte, il est possible de construire des exemples où la suite des approximations successives n'admet aucune sous-suite convergente, bien que la condition du théorème soit vérifiée. Pour une illustration, nous renvoyons le lecteur à Diaz et Metcalf [6].

Le lemme 2 nous assure que la condition (2.3) est nécessaire et suffisante pour entraîner la convergence d'une sous-suite de chaque suite des approximations successives. En fait, elle constitue une condition nécessaire pour que toute la suite converge mais, comme nous allons le constater sur un exemple, elle n'est pas suffisante (nous verrons, cependant, dans la partie suivante que dans  $\mathbf{R}$  (2.3) et (2.1) sont équivalentes). En effet, il est possible que d'autres sous suites convergent vers des points d'accumulation différents du point fixe (qui est nécessairement unique si (2.3) est vérifiée). Cependant, il est alors facile de montrer que le nombre de ces points d'accumulation est infini. Pour illustrer ces deux affirmations, nous proposons l'exemple suivant qui est tiré de Metcalf et Rogers [8].

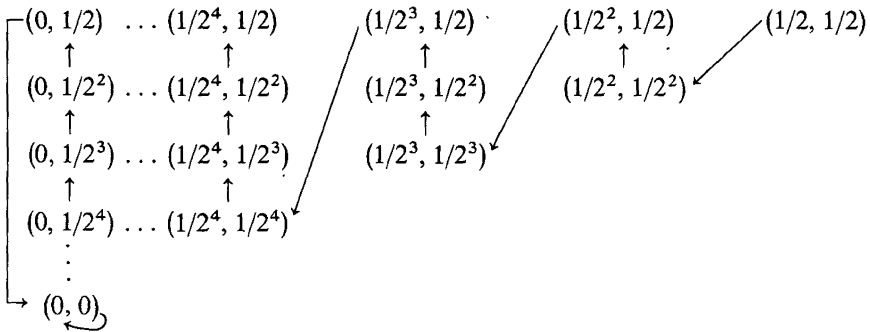
L'espace  $E$  est une grille de points dans le plan muni de la distance euclidienne. La fonction  $F$  est définie par les flèches. Le point  $x^* = (0, 0)$  est point fixe unique de  $F$ . L'ensemble des points d'accumulation de la suite

$$\{ F^n(1/2, 1/2) \}$$

est donné par :

$$\mathcal{L} = \{ (0, 0) \} \cup \{ (0, 1/2m) : m = 1, 2, \dots \}$$

Il existe une sous-suite convergeant vers  $x^* : \{ x_{n_i} \} = \{ 1/2^i, 1/2^i \}$ . Chaque point d'accumulation est limite de la sous-suite  $\{ x_{s_i} \} = \{ 1/2^{m+i}, 1/2^m \}$

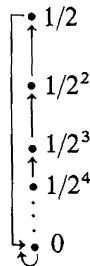


Nous pouvons démontrer facilement que, si dans la condition (2.3), nous imposons une borne supérieure aux entiers  $p$ , la condition est alors suffisante pour que la méthode soit localement convergente. Malheureusement la nouvelle condition n'est plus nécessaire comme le montre l'exemple suivant dont la fonction vérifie la condition (2.1) du théorème.

L'espace  $E$  est formé des points  $\{ 0 \} \cup \{ 1/2^i : i = 1, 2, \dots \}$  de la droite réelle munie de la distance euclidienne. La fonction est définie par

$$F(1/2) = 0 \quad F(0) = 0 \quad F(1/2^i) = 1/2^{i-1} \quad i = 2, \dots$$

Le point 0 est point fixe de  $F$ . Quel que soit le point de départ, la suite des approximations successives converge vers 0 et pourtant il est impossible de donner une borne supérieure aux entiers  $p$ .



Les exemples précédents nous montrent que les hypothèses du théorème 2 sont essentielles. Nous allons voir dans la partie suivante en examinant le cas des fonctions réelles que, si nous particularisons l'espace  $E$ , nous pouvons simplifier de manière non négligeable le théorème.

### V. LE CAS PARTICULIER DES FONCTIONS RÉELLES

Soit  $D$  une partie compacte de  $\mathbf{R}$ . Soit  $F$  une application continue de  $D$  dans  $\mathbf{R}$  admettant dans  $D$  un point fixe  $x^*$ . Le théorème 2 donne une caractérisation de la convergence locale de la méthode des approximations successives conduite sur  $F$ . Cependant les propriétés particulières de  $\mathbf{R}$  permettent de simplifier cette caractérisation. En particulier, la convergence vers  $x^*$  d'une sous-suite de chaque suite des approximations successives entraîne la convergence de toutes les suites. Cette propriété, qui n'est pas vérifiée en général, comme en atteste un des exemples de la partie précédente, nous permet d'affirmer que le lemme 2 caractérise la convergence de la méthode. Ces résultats sont rassemblés dans le

**THÉORÈME 3 :** *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la méthode des approximations successives est localement convergente vers  $x^*$ .*

(ii) *il existe  $\varepsilon$ , réel positif, tel que, quel que soit le point de départ dans  $B(x^*, \varepsilon)$ , la suite des approximations successives admet une sous-suite convergente vers  $x^*$  :*

$$\forall x \in B(x^*, \varepsilon) \quad \exists \{n_i\} \subset \mathbf{N} \quad n_0 < n_1 < \dots < n_i < \dots \quad \lim_{i \rightarrow \infty} F^{n_i} x = x^*$$

(iii) *il existe  $\varepsilon$ , réel positif, tel que la condition suivante soit vérifiée :*

$$\forall x \in B(x^*, \varepsilon) \quad x \neq x^* \quad \exists p \in \mathbf{N} \quad |F^p x - x^*| < |x - x^*| \quad (2.3)$$

Il est bien évident que l'équivalence entre (ii) et (iii) est acquise (lemme 2). Pour démontrer le théorème nous devons montrer l'équivalence entre (i) et (ii). Comme (i) implique trivialement (ii), il ne reste plus qu'à prouver l'autre moitié de l'équivalence. La démonstration est très technique et nécessite quatre lemmes dont certains constituent des extensions de résultats, dus à Stepleman [11].

**LEMME 3 :** *Soit  $k$  un entier positif. Posons  $G = F^k$ .*

(i) *S'il existe  $x_0$  tel que la suite  $\{G^i x_0\}$  ne contienne aucune sous-suite convergente vers  $x^*$  alors il en est de même pour la suite  $\{F^i x_0\}$ .*

(ii) *S'il existe  $z$ , différent de  $x^*$ , tel que  $Gz = z$  alors la suite  $\{F^i z\}$  ne contient aucune sous-suite convergente vers  $x^*$ .*

*Démonstration :* Si la suite  $\{G^i x_0\}$  ne contient aucune sous-suite convergente vers  $x^*$  alors :

$$\exists \xi_0 > 0 \quad \forall i \in \mathbf{N} \quad G^i x_0 \notin B(x^*, \xi_0)$$

Montrons que la propriété est vraie pour  $\{G^{i+q} x_0\}$  avec  $q = 1, \dots, k-1$ . Pour cela raisonnons par l'absurde (supposons qu'il existe  $q$  tel que  $\{G^{i+q} x_0\}$  contienne une sous-suite convergente vers  $x^*$ )

$$\exists q \quad \forall \xi > 0 \quad \exists \{n_i\} \subset \mathbf{N} \quad \exists M \in \mathbf{N} \quad \forall i > M \quad G^{n_i+q} x_0 \in B(x^*, \xi)$$

Comme  $G^{k-q}$  est continue :

$$\forall \xi \exists \{n_i\} \subset \mathbb{N} \exists M' \in \mathbb{N} \forall i > M' \quad G^{n_i+k}x_0 \in B(x^*, \xi)$$

Mais  $G^{n_i+k}x_0$  est une sous-suite de  $\{G^i x_0\}$  et si nous prenons  $\xi = \xi_0$  nous obtenons une contradiction. Nous avons donc :

$$\forall q \quad q \in [0, \dots, k-1] \exists \xi_q > 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad G^{i+q}x_0 \notin B(x^*, \xi_q)$$

Posons  $\xi = \min_q \xi_q$

$$\forall q \quad q \in [0, \dots, k-1] \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad G^{i+q}x_0 \notin B(x^*, \xi)$$

ce qui est équivalent à :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad F^i x_0 \notin B(x^*, \xi)$$

ce qui montre (i).

(ii) S'il existe  $z$  tel que  $Gz = z$ , alors  $\{G^i z\}$  ne contient aucune sous-suite convergeant vers  $x^*$  et il en est de même pour  $\{F^i z\}$  d'après (i).

Il est à noter que la démonstration reste valable si la fonction n'est pas réelle, mais qu'elle applique un espace métrique dans lui-même. Le lemme est donc valable dans un cadre plus général, ce qui n'est pas le cas des résultats qui suivent.

LEMME 4 : Si, en plus des hypothèses sur  $F$  et  $E$ , nous supposons que :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [x^*, x^* + \varepsilon] \quad Fx \geq x$$

alors :

(i) Quel que soit  $\eta$  avec  $0 < \eta \leq \varepsilon$ , il existe un point de  $[x^*, x^* + \eta]$  dont la suite des approximations successives ne contient aucune sous-suite convergeant vers  $x^*$ .

(ii) La méthode des approximations successives n'est pas localement convergente vers  $x^*$ .

Démonstration : Il est évident que (ii) se déduit immédiatement de (i).

(i) Fixons-nous  $\eta$  avec  $0 < \eta \leq \varepsilon$  et donc :

$$\forall x \in [x^*, x^* + \eta] \quad Fx \geq x$$

Si  $F(x^* + \eta) = x^* + \eta$  la suite des approximations successives, issue de  $x^* + \eta$ , ne contient aucune sous-suite convergeant vers  $x^*$  et la démonstration est terminée.

Supposons alors que  $F(x^* + \eta) > x^* + \eta$  et posons :

$$t_0 = \inf \{ s \in (x^* + \eta, \infty) / Fs \leq s \} \tag{3.1}$$

Si  $t_0 = \infty$  alors quel que soit  $x_0$  dans  $(x^*, x^* + \eta)$  la suite  $\{F^n x_0\}$  est croissante et ne peut de ce fait contenir de sous-suite convergeant vers  $x^*$ .

Nous devons donc supposer que  $t_0$  est fini et, par continuité, nous en déduisons que  $Ft_0 = t_0$ .

Si  $F$  applique  $[x^*, t_0]$  dans lui-même alors, quel que soit  $x_0$  dans  $[x^*, x^* + \eta]$ , la suite  $F^n x_0$  converge vers  $t_0$  et ne peut contenir de sous-suite convergente vers  $x^*$ .

Supposons alors que :

$$\exists s_0 \in (x^*, t_0) \quad Fs_0 > t_0$$

Par continuité, nous en déduisons que :

$$\exists t_1 \in (x^*, t_0) \quad Ft_1 = t_0$$

Si  $t_1$  appartient à  $[x^*, x^* + \eta]$  la suite issue de  $t_1$  converge vers  $t_0$  et ne peut contenir de sous-suite convergente vers  $x^*$ .

Si  $t_1$  n'appartient pas à  $[x^*, x^* + \eta]$  alors

$$t_1 \in (x^* + \eta, t_0) \quad \text{et} \quad Ft_1 > t_1 > x^*$$

Par continuité, nous en déduisons que :

$$\exists t_2 \in (x^*, t_1) \quad Ft_2 = t_1$$

Si  $t_2$  appartient à  $[x^*, x^* + \eta]$  la conclusion est identique à la précédente. Nous devons supposer que  $t_2$  appartient à  $(x^* + \eta, t_1)$ .

En répétant le procédé, nous construisons une suite  $\{t_i\}$  telle que :

$$x^* + \eta < t_{i+1} \leq t_i \quad \text{et} \quad t_i = Ft_{i+1}$$

La suite est donc convergente et, par continuité, nous déduisons que

$$\exists t^* \in [x^* + \eta, t_0) \quad Ft^* = t^*$$

ce qui contredit (3.1) et conclut la démonstration.

Il est bien évident que, si dans la démonstration précédente nous remplaçons  $\varepsilon$  et  $\eta$  par  $-\varepsilon$  et  $-\eta$  et les signes  $\geq$  et  $>$  par  $\leq$  et  $<$  le résultat reste inchangé, d'où le

**LEMME 4' :** *Si dans le lemme 4 nous remplaçons l'hypothèse par*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [x^* - \varepsilon, x^*] \quad Fx \leq x$$

*alors les conclusions restent les mêmes en remplaçant*

$$[x^*, x^* + \eta] \quad \text{par} \quad [x^* - \eta, x^*].$$

Les trois résultats précédents vont nous servir à démontrer le lemme 5 qui est la clé de la démonstration du théorème 3.

**LEMME 5 :** *Si, en plus des hypothèses sur  $F$  et  $E$ , nous supposons que :*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \neq x^* \quad x_\varepsilon \in B(x^*, \varepsilon) \quad \exists k \in \mathbf{N} \quad k = k_\varepsilon$$

tels que

$$(F^k x_\varepsilon - x^*)(x_\varepsilon - x^*) > 0 \quad \text{et} \quad |F^k x_\varepsilon - x^*| \geq |x_\varepsilon - x^*|$$

alors :

(i) il existe un point de  $B(x^*, \varepsilon)$  dont la suite des approximations successives ne contient aucune sous-suite convergeant vers  $x^*$ .

(ii) la méthode des approximations successives n'est pas convergente vers  $x^*$  dans  $B(x^*, \varepsilon)$ .

*Démonstration* : Comme dans le lemme 4, il est évident que (i) entraîne (ii).

(i) Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que :

$$F^k x_\varepsilon \geq x_\varepsilon > x^*$$

(le cas  $F^k x_\varepsilon \leq x_\varepsilon < x^*$  se traite de façon similaire).

Si, quel que soit  $x$  dans  $[x^*, x^* + \varepsilon]$ , nous avons :

$$F^k x \geq x$$

la conclusion se déduit des lemmes 3 et 4 (ou 3 et 4').

Supposons alors que :

$$\exists y \in (x^*, x^* + \varepsilon] \quad y > F^k y$$

Par continuité de  $F^k$  nous en déduisons que :

$$\exists z \in (y, x_\varepsilon] \quad F^k z = z \quad z \neq x^*$$

et la conclusion provient alors du lemme 3.

Nous pouvons maintenant nous tourner vers la démonstration du théorème :

*Démonstration du théorème* : Nous avons vu qu'il suffisait de démontrer que (ii)  $\Rightarrow$  (i). Choisissons  $x_0$  quelconque dans  $B(x^*, \varepsilon)$  et supposons, sans perte de généralité, que la suite  $\{n_i\}$  est telle que :

$$|x_0 - x^*| > |F^{n_1} x_0 - x^*| > \dots > |F^{n_i} x_0 - x^*| > \dots$$

et

$$\forall k \quad n_i < k < n_{i+1} \quad |F^k x_0 - x^*| \geq |F^{n_i} x_0 - x^*|$$

S'il existe  $n_i$  et  $k$  tels que :

$$n_i < k < n_{i+1} \quad (F^k x_0 - x^*)(F^{n_i} x_0 - x^*) > 0$$

Le lemme 5, appliqué au point  $F^{n_i} x_0$  (qui est bien dans  $B(x^*, \varepsilon)$ ), permet de conclure à une contradiction de (ii).

Nous avons donc les relations :

$$\begin{aligned} \forall n_i \quad \forall k \quad n_i < k < n_{i+1} \quad (F^k x_0 - x^*)(F^{n_i} x_0 - x^*) &\leq 0 \\ \forall k' \neq k \quad n_i < k < n_{i+1} \quad (F^k x_0 - x^*)(F^{k'} x_0 - x^*) &> 0 \end{aligned}$$

S'il existe  $k$  tel que,  $n_i + 1 < k < n_{i+1}$   $|F^k x_0 - x^*| \geq |F^{n_i+1} x_0 - x^*|$  le lemme 5, appliqué à  $F^{n_i+1}(x_0)$  qui converge vers  $x^*$ , puisque  $F$  est continue et qui est donc bien à l'intérieur de  $B(x^*, \varepsilon)$  permet de conclure à une contradiction de (ii). Donc  $F^k(x_0) \in B(x^*, \varepsilon)$ .

S'il existe  $k$  et  $k'$  tels que :

$$n_i < k < k' < n_{i+1} \quad |F^{k'} x_0 - x^*| \geq |F^k x_0 - x^*|$$

le lemme 5, appliqué au point  $F^k x_0$ , permet de conclure à une contradiction de (ii).

Nous avons donc la relation :

$$\forall n_i \quad |F^{n_i+1} x_0 - x^*| > |F^{n_i+2} x_0 - x^*| > \dots > |F^{n_i+1-1} x_0 - x^*| > |F^{n_i} x_0 - x^*|$$

Or, si  $F^{n_i} x_0$  tend vers  $x^*$ , la continuité de  $F$  entraîne que  $F^{n_i+1} x_0$  tend vers  $x^*$  et la relation précédente montre que toute la suite converge.

Pour terminer, nous présentons un corollaire de ce théorème. Il constitue aussi un cas particulier du corollaire 2.2.

**COROLLAIRE 3.1 :** *Si, en plus des hypothèses sur  $F$  et  $E$ , nous supposons que  $F$  est localement non expansive en  $x^*$ , c'est-à-dire :*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \quad |Fx - x^*| \leq |x - x^*|$$

*alors une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode des approximations successives soit localement convergente est que :*

$$\exists \eta > 0 \quad \eta \leq \varepsilon \quad \forall x \in B(x^*, \eta) \quad x \neq x^* \quad F^2 x \neq x$$

*Démonstration :* La condition est évidemment nécessaire.

Si la condition est vérifiée, mais qu'il n'y a pas convergence locale alors du théorème précédent, nous déduisons :

$$\exists \eta > 0 \quad \eta \leq \varepsilon \quad \exists x \in B(x^*, \eta) \quad x \neq x^* \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad |F^k x - x^*| \geq |x - x^*|$$

Comme  $F$  est non expansive en  $x^*$ , nous en obtenons :

$$\exists \eta > 0 \quad \eta \leq \varepsilon \quad \exists x \in B(x^*, \eta) \quad x \neq x^* \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad |F^k x - x^*| = |x - x^*|$$

Considérons  $k = 1$  et  $k = 2$

$$\begin{aligned} |Fx - x^*| = |x - x^*| &\Rightarrow Fx = x \quad \text{ou} \quad Fx = 2x^* - x \\ |F^2 x - x^*| = |x - x^*| &\Rightarrow F^2 x = x \quad \text{ou} \quad F^2 x = 2x^* - x \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse et conclut la démonstration.

Ce théorème est à rapprocher du résultat de Stepleman [11] pour les fonctions monotones décroissantes et de celui de Bashurov et Ogibin [2] qu'il complète en ce qui concerne les applications non expansives. Pour illustrer

ce corollaire, nous utiliserons trois exemples :  $F$  est une application de  $[-1, +1]$  dans lui-même.

a)  $Fx = x$ ,  $F$  admet le point fixe  $x = 0$  et il n'y a pas convergence locale puisque dans tout voisinage de 0 il y a un autre point fixe.

b)  $Fx = -x$ ,  $F$  admet le point fixe  $x = 0$  et il n'y a pas convergence locale puisque, dans tout voisinage de 0, il y a un point de période 2.

c)  $Fx = \begin{cases} -x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$   $F$  admet le point fixe  $x = 0$ . Il n'y a pas

convergence globale puisque  $x = 1$  est point fixe, mais, dans toute boule de centre 0 et de rayon inférieur à 1, la méthode converge.

## VI. CONCLUSIONS

Jusqu'à présent il n'existait que peu de conditions nécessaires et suffisantes de convergence de la méthode des approximations successives. Dans cet exposé, nous avons présenté des caractérisations de convergence locale concernant des applications continues d'une partie compacte d'un espace métrique dans lui-même. Ces théorèmes généralisent des résultats présentés par Stepleman concernant les applications continues de la variable réelle et s'en inspirent : conditions faisant intervenir explicitement le point fixe et les itérés de la méthode.

En effet, les résultats de Stepleman supposent l'existence d'un point fixe localement isolé. Il existe cependant des fonctions pour lesquelles cette condition n'est pas vérifiée (par exemple :  $f(x) = x \left( \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \right)$ ). Notre contribution consiste à avoir présenté une caractérisation générale, valable pour toute fonction réelle continue admettant un point fixe.

Bien entendu ces caractérisations ne sont pas utilisables dans la pratique, mais elles constituent des réponses théoriques au problème général de la convergence locale.

## BIBLIOGRAPHIE

1. S. BANACH, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales* (Thèse, Université de Luow, 1920), Fund, Math. 3, 1922, p. 133-181.
2. V. V. BASHUROV and V. N. OGININ, *Conditions for the convergence of iterative processes on the real axis*, USSR Comp. Math. and Math. Phys. 6, 5, 1966, p. 178-184.
3. G. CHOQUET, *Cours d'Analyse*, Tome II, Topologie, Masson et Cie.

4. M. Y. COSNARD, *Une condition nécessaire et suffisante de convergence locale de la méthode des approximations successives dans  $\mathbf{R}$* , Colloque d'Analyse Numérique, Port Bail, 1976.
5. M. Y. COSNARD, *Sur les traces du théorème de Banach : un tour d'horizon des résultats de base sur les problèmes de points fixes*, R. R. n° 44, Mathématiques Appliquées, Grenoble, 1976.
6. J. B. DIAZ and F. T. METCALF, *On the set of subsequential limit points of successive approximation*. Trans. A.M.S. 135, 1969, p. 459-485.
7. M. EDELSTEIN, *On non expansive mappings*. Proc. A.M.S. 15, 1964, p. 689-695.
8. F. T. METCALF and T. D. ROGERS, *The cluster set of sequences of successive approximations*, J. Math. Anal. and Applic. 31, 1970, p. 206-212.
9. A. OSTROWSKI, *Solutions of equations and systems of equations*, 2nd Ed., Academic Press, New York, 1966.
10. A. N. SARKOVSKI, *A classification of fixed points*, Am. Math. Soc. Trans. (2), 97, 1970.
11. R. S. STEPLEMAN, *A characterization of local convergence for fixed point iterations in  $\mathbf{R}$* , Siam, J. Numer. Anal., 12.6, 1975, p. 887-894.