

RAIRO

ANALYSE NUMÉRIQUE

JEAN DUCHON

**Sur l'erreur d'interpolation des fonctions de
plusieurs variables par les D^m -splines**

RAIRO – Analyse numérique, tome 12, n° 4 (1978), p. 325-334.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1978__12_4_325_0

© AFCET, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO – Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ERREUR D'INTERPOLATION DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES PAR LES D^m -SPLINES (*)

par Jean DUCHON (1)

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — *Considérant une fonction f de $H^m(\Omega)$ et la D^m -spline f_m^A qui interpole f sur un sous-ensemble donné A de $\bar{\Omega}$ en minimisant la semi-norme $\|D^m v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, on établit des estimations de l'erreur $f - f_m^A$ et de ses dérivées en fonction de la distance h de A à $\bar{\Omega}$, du type $\|D^k(f - f_m^A)\|_{L^p(\Omega)} = o(h^{m-k - (n/2) + (n/p)})$.*

INTRODUCTION

La D^m -spline d'interpolation f_m^A de f sur A est par définition la solution, unique si A contient un sous-ensemble P_{m-1} -unisolvant, du problème : minimiser $\|D^m u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ parmi les fonctions $u \in D^{-m}L^2$ qui coïncident avec f sur A . On suppose $m > n/2$ de sorte que les éléments de $D^{-m}L^2$ (distributions dont les dérivées d'ordre m sont dans $L^2(\mathbb{R}^n)$) sont en fait des fonctions continues.

$D^m u(t)$ désigne la dérivée m -ième de u en $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, c'est une forme m -linéaire sur $(\mathbb{R}^n)^m$, et $|D^m u(t)|$ est sa norme comme élément du produit tensoriel euclidien $\otimes^m \mathbb{R}^n$:

$$|D^m u(t)| = \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \left| \frac{\partial^m u(t)}{\partial t_{i_1} \dots \partial t_{i_m}} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Ainsi

$$\|D^m u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |D^m u(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^m u(t)}{\partial t_{i_1} \dots \partial t_{i_m}} \right|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Le terme de D^m -spline est en accord avec la terminologie usuelle, où on appelle

(*) Reçu février 1978.

(1) Laboratoire I.M.A.G., Université de Grenoble, Grenoble.

L -spline (à une variable) ce qu'on obtient en minimisant $\int_a^b |Lu|^2$, L étant un opérateur différentiel, [7].

Mais ici D^m est un opérateur différentiel à valeurs dans $\otimes^m \mathbf{R}^n$, et on minimise la norme de $|D^m u|$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ et non dans un $L^2(\Omega)$, Ω borné. Voir [5] pour la caractérisation de f_m^A en vue du calcul, lorsque A est fini.

Nous allons montrer que, si Ω est un ouvert borné assez régulier de \mathbf{R}^n , f une fonction de $H^m(\Omega)$, et A un sous-ensemble de $\overline{\Omega}$, on a

$$\|D^k(f - f_m^A)\|_{L^p(\Omega)} = o(h^{m-k-(n/2)+(n/p)}),$$

où $h = \sup_{t \in \Omega} \inf_{a \in A} |t - a|$, chaque fois que $p \in [2, \infty]$ et l'entier $k = 0, 1, \dots$ sont tels que l'immersion $H^m = W^{m,2} \subset W^{k,p}$ ait lieu (pour un ouvert borné régulier : d'après le théorème de Sobolev, c'est le cas si $m - k - (n/2) + (n/p) \geq 0$, sauf, si n est pair, pour $k = m - (n/2)$ avec $p = \infty$).

Décrivons schématiquement la démonstration.

On commence par majorer $\|D^k(f - f_m^A)\|_{L^p(\Omega)}$ en fonction de $\|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$, où f_m^Ω est la D^m -spline d'interpolation de f sur Ω , qui est définie sur tout \mathbf{R}^n et coïncide avec f sur Ω (et même sur $\overline{\Omega}$, ce sont des fonctions continues). Compte tenu du fait que $f_m^\Omega - f_m^A$ s'annule sur A , on doit majorer $\|D^k u\|_{L^p(\Omega)}$ en fonction de $\|D^m u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$ (et h) pour les fonctions $u \in D^{-m} L^2$ qui s'annulent sur A . Pour cela on définit un recouvrement (Ω_i) de Ω par des boules de rayon proportionnel à h , chacune contenant un ensemble P_{m-1} -unisolvant $A_i \subset \overline{A}$. Dans chaque Ω_i , on majore l'erreur de P_{m-1} -interpolation de Lagrange sur A_i . En « recollant les morceaux » (c'est là qu'intervient la condition $2 \leq p \leq \infty$) on obtient

$$(\star) \quad \|D^k(f - f_m^A)\|_{L^p(\Omega)} \leq C h^{m-k-(n/2)+(n/p)} \|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

Il reste à montrer que pour $f \in H^m(\Omega)$, $\|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \rightarrow 0$ lorsque A varie de telle sorte que $h \rightarrow 0$.

C'est d'ailleurs classique : s'agissant d'interpolation « d'énergie minimale », l'énergie de l'erreur d'interpolation tend vers zéro; c'est par exemple une conséquence du résultat abstrait de J. L. Joly [6], comme indiqué dans [5], du moins pour une suite (A_k) . On le démontre ici directement en utilisant (\star) .

Nous allons préciser :

- le recouvrement de Ω par des boules Ω_i (§ 1);
- comment estimer l'erreur de P_{m-1} -interpolation de Lagrange sur A_i , dans Ω_i (§ 2);
- comment « recoller les morceaux » pour obtenir les inégalités (\star) (§ 3);

— l'argument permettant de montrer la convergence « en énergie »
 $\|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ (§ 4).

Une analyse d'erreur analogue à celle-ci a été faite par R. Arcangeli [1] pour les splines définies par M. Atteia [3] (où la semi-norme minimisée est $\|D^m u\|_{L^2(\Omega)}$ au lieu de $\|D^m u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$) avec les différences suivantes : Ω est supposé triangulé par A , donc polyédrique avec des points de A sur le bord; h est un paramètre dépendant de la triangulation; enfin l'erreur et ses dérivées sont estimées seulement dans $L^2(\Omega)$.

1. RECOUVREMENT DE Ω

PROPOSITION 1 : *Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^n ayant la propriété du cône intérieur d'angle $\theta > 0$ et de rayon $r > 0$: pour tout $t \in \Omega$ il existe un vecteur unitaire $\xi(t) \in \mathbf{R}^n$ tel que le cône*

$$C(t, \xi(t), \theta, r) = \{t + \lambda \eta : \eta \in \mathbf{R}^n, |\eta| = 1, \eta \cdot \xi(t) \geq \cos \theta, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

soit contenu dans Ω .

Il existe M et M_1 (dépendant de n et θ) et $\varepsilon_0 > 0$ (dépendant de θ et r) tels que, pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ strictement positif, il existe $T_\varepsilon \subset \Omega$ vérifiant :

(i) $B(t, \varepsilon) \subset \Omega, \forall t \in T_\varepsilon;$

(ii) $\Omega \subset \bigcup_{t \in T_\varepsilon} B(t, M\varepsilon);$

(iii) $\sum_{t \in T_\varepsilon} 1_{B(t, M\varepsilon)} \leq M_1;$

où $B(t, R)$ désigne la boule fermée de centre t et de rayon R , et 1_E est la fonction indicatrice de l'ensemble E , égale à 1 sur E et 0 ailleurs (la condition (iii) signifie que tout point de \mathbf{R}^n se trouve dans au plus M_1 boules de rayon $M\varepsilon$ centrées sur T_ε).

Démonstration : Considérons dans \mathbf{R}^n l'ensemble Z^n des points de coordonnées entières. Quel que soit $t \in \mathbf{R}^n$, il existe $t' \in Z^n$ tel que $|t - t'| \leq \sqrt{n}/2$ ($t'_i = t_i$ arrondi à l'entier le plus proche). Par une homothétie de centre 0 et de rapport $2\varepsilon/\sqrt{n}$, on voit que toute boule de rayon ε rencontre $(2\varepsilon/\sqrt{n}) Z^n$, donc toute boule de rayon 2ε contient une boule de rayon ε centrée sur $(2\varepsilon/\sqrt{n}) Z^n$.

D'autre part, posant $r' = r \sin \theta / (1 + \sin \theta)$, la boule de rayon r' et de centre $t + (r - r') \xi(t)$ est contenue dans le cône $C(t, \xi(t), \theta, r)$, donc dans Ω . Posons $\varepsilon_0 = r'/2$, et soit $\varepsilon = \lambda \varepsilon_0$ avec $0 < \lambda \leq 1$. Pour chaque $t \in \Omega$, le cône $C(t, \xi(t), \theta, \lambda r)$ est contenu dans $C(t, \xi(t), \theta, r)$ donc dans Ω , et contient une boule de rayon

$\lambda r' = 2\varepsilon$, qui elle-même contient une boule de rayon ε centrée sur $(2\varepsilon/\sqrt{n})Z^n$. Le centre t' de cette boule se trouve dans $C(t, \xi(t), \theta, \lambda r)$ donc $|t - t'| \leq \lambda r$, donc la boule de centre t' et de rayon $\lambda r = (r/\varepsilon_0)\varepsilon$ contient t .

On obtient ainsi (i) et (ii) avec

$$\varepsilon_0 = \frac{r}{2} \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} \quad \text{et} \quad M = \frac{r'}{\varepsilon_0} = 2 + \frac{2}{\sin \theta},$$

et

$$T_\varepsilon = \left\{ t \in \frac{2\varepsilon}{\sqrt{n}}Z^n : B(t, \varepsilon) \subset \Omega \right\}.$$

Pour obtenir (iii) il suffit de remarquer que la boule $B(t, M\varepsilon)$ est contenue dans le cube $\prod_{i=1}^n [t_i - M\varepsilon, t_i + M\varepsilon]$, qui contient au plus $(M\sqrt{n} + 1)^n$ points de $(2\varepsilon\sqrt{n})Z^n$. On peut donc prendre $M_1 = (M\sqrt{n} + 1)^n$, par exemple.

2. BORNES IMPLICITES DE L'ERREUR DE P_{m-1} -INTERPOLATION DE LAGRANGE

Soit m entier $> n/2$, et appelons N la dimension de l'espace P_{m-1} des polynômes (à n variables) de degré $\leq m-1$.

LEMME : Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbf{R}^n , à frontière lipschitzienne.

Soit $B \subset \Omega^N$ un ensemble compact de N -uplets $b = (b^1, \dots, b^N)$ P_{m-1} -unisolvants, et soit Π^b l'opérateur de P_{m-1} -interpolation de Lagrange, défini pour $u \in H^m(\Omega)$ ($\subset C(\bar{\Omega})$) par :

$$\begin{cases} \Pi^b u \in P_{m-1}, \\ \Pi^b u(b^i) = u(b^i), \quad i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Soit enfin k entier ≥ 0 et $p \in [1, \infty]$ tels que

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega).$$

Il existe C (dépendant de Ω, B, k et p) tel que l'on ait :

$$\|D^k(u - \Pi^b u)\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|D^m u\|_{L^2(\Omega)}$$

pour tout $b \in B$ et toute $u \in H^m(\Omega)$.

Démonstration : Pour chaque b , l'application $u \mapsto u - \Pi^b u$ de $H^m(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ est linéaire, continue, et s'annule sur P_{m-1} . Donc $I - \Pi^b : u + P_{m-1} \mapsto u - \Pi^b u$ est linéaire continue de $H^m(\Omega)/P_{m-1}$ dans $H^m(\Omega)$. Comme Ω

est connexe et assez régulier, l'application $u + P_{m-1} \rightarrow \|D^m u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme sur $H^m(\Omega)/P_{m-1}$, équivalente à la norme hilbertienne quotient.

Par ailleurs si k et p sont tels que $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ (auquel cas l'injection est nécessairement continue, d'après le théorème du graphe fermé), on a

$$\|D^k u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^m(\Omega)}, \quad \forall u \in H^m(\Omega).$$

Finalement il existe une constante $C(b)$ telle que

$$\|D^k(u - \Pi^b u)\|_{L^p(\Omega)} \leq C(b) \|D^m u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^m(\Omega).$$

C'est tout à fait classique (voir [4] par exemple).

Il reste à montrer que $C(b)$ reste borné lorsque b décrit B , un ensemble compact de N -uplets P_{m-1} -unisolvants. Pour cela on applique le théorème dit « principe de la borne uniforme » à la famille (indexée par $b \in B$) des opérateurs linéaires continus $I - \Pi^b$ de $H^m(\Omega)/P_{m-1}$ dans $H^m(\Omega)$: il suffit de montrer que pour u fixée $\in H^m(\Omega)$, l'ensemble $\{\Pi^b u : b \in B\}$ est borné dans $H^m(\Omega)$.

Soit p_1, \dots, p_N une base de P_{m-1} , et $M(b)$ la matrice $N \times N$ de terme général $m_{ij}(b) = p_j(b^i)$; notons $m_{ij}^{-1}(b)$ le terme général de la matrice inverse $M^{-1}(b)$. On a alors

$$\Pi^b u = \sum_{i,j} u(b^i) m_{ij}^{-1}(b) p_j.$$

Mais u est continue sur $\bar{\Omega}$ donc

$$\|\Pi^b u\|_{H^m(\Omega)} \leq C(u) \sum_{i,j} |m_{ij}^{-1}(b)| \|p_j\|_{H^m(\Omega)}.$$

D'autre part, l'inversion d'une matrice est une opération continue, et $M(b)$ dépend continûment de b , donc chaque fonction $m_{ij}^{-1}(b)$ est continue sur B compact, chaque $\{m_{ij}^{-1}(b) : b \in B\}$ est borné. Donc $\|\Pi^b u\|_{H^m(\Omega)}$ reste borné quand b décrit B .

On a donc $\|u - \Pi^b u\|_{H^m(\Omega)} \leq C \|D^m u\|_{L^2(\Omega)}, \forall b \in B, \forall u \in H^m(\Omega)$. Utilisant encore $\|D^k u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^m(\Omega)}$, on obtient le résultat.

REMARQUE : Pour $p=2$, avec Ω convexe par exemple, ce résultat peut être déduit de celui de R. Arcangeli et J. L. Gout [2], où de plus une borne explicite est donnée pour la constante C , faisant intervenir les normes (dans $L^\infty(\Omega)$) des polynômes de base d'interpolation de Lagrange sur chaque ensemble $\{b^1, \dots, b^N\}$.

PROPOSITION 2 : Il existe $R > 0$ (dépendant de n et m) et (pour tout $M \geq 1, k$ entier ≥ 0 et $p \in [1, \infty]$) tels que $W^{m,2} \subset W^{k,p}$) une constante C (dépendant

de M, n, m, k et p) vérifiant ceci : pour tout $h > 0$ et tout $t \in \mathbf{R}^n$, la boule $B(t, Rh)$ contient N boules β_1, \dots, β_N de rayon h telles que l'on ait :

$$\| D^k u \|_{L^p(B(t, MRh))} \leq Ch^{m-k-(n/2)+(n/p)} \| D^m u \|_{L^2(B(t, MRh))}$$

pour toute $u \in H^m(B(t, MRh))$ qui s'annule en au moins un point de chacune des boules β_1, \dots, β_N .

Démonstration : Soit $\{b_0^1, \dots, b_0^N\}$ un ensemble P_{m-1} -unisolvent (par exemple les N points de la forme (k_1, \dots, k_n) où les k_i sont des entiers ≥ 0 vérifiant $k_1 + \dots + k_n \leq m-1$). L'ensemble des N -uplets P_{m-1} -unisolvents est ouvert dans $(\mathbf{R}^n)^N$ (son complémentaire est l'ensemble des solutions d'un système d'équations algébriques), donc il existe $\delta > 0$ tel que $\{b^1, \dots, b^N\}$ soit encore P_{m-1} -unisolvent si $|b^i - b_0^i| \leq \delta$. Par une homothétie de rapport $1/\delta$, posant $a^i = (1/\delta)b_0^i$, on obtient N boules $B(a^i, 1)$: le produit $\prod_{i=1}^N B(a^i, 1)$ est un compact de $(\mathbf{R}^n)^N$ formé de N -uplets P_{m-1} -unisolvents. L'ensemble $\bigcup_{i=1}^N B(a^i, 1)$ est borné donc contenu dans une boule $B(a, R)$ (dont le rayon R dépend de n et m).

Soit $M \geq 1$. On peut appliquer le lemme précédent à la boule ouverte $\mathring{B}(a, MR)$: il existe une constante c (dépendant de M, n, m, k et p) telle que $\| D^k (u - \Pi^b u) \|_{L^p(B(a, MR))} \leq c \| D^m u \|_{L^2(B(a, MR))}$ si $u \in H^m(B(a, MR))$ et $b = (b^1, \dots, b^N)$ avec $|b^i - a^i| \leq 1$.

Mettant ce résultat sous une autre forme, on peut écrire :

$$\| D^k u \|_{L^p(B(a, MR))} \leq c \| D^m u \|_{L^2(B(a, MR))}$$

pour toute $u \in H^m(B(a, MR))$ qui s'annule en un point de chacune des boules $B(a^i, 1)$.

Utilisons maintenant la technique (classique) du *changement d'échelle*.

Soit $h > 0$ et $t \in \mathbf{R}^n$. L'application $F : x \rightarrow t + h(x - a)$ transforme $B(a, MR)$ en $B(t, MRh)$; elle est affine, bijective, et a pour matrice jacobienne (constante) hI_n , de déterminant h^n . On a donc pour toute fonction φ définie sur $B(t, MRh)$:

$$\int_{B(t, MRh)} \varphi(x) dx = h^n \int_{B(a, MR)} \varphi(F^{-1}(y)) dy.$$

D'autre part

$$D^k u(x) = h^{-k} D^k (u_0 F^{-1})(F(x))$$

d'où si $u \in H^m(B(t, MRh))$:

$$\| D^k u \|_{L^p(B(t, MRh))} = h^{-k+(n/p)} \| D^k (u_0 F^{-1}) \|_{L^p(B(a, MR))} \quad \text{pour } 1 \leq p < \infty,$$

et évidemment

$$\|D^k u\|_{L^\infty(B(t, MRh))} = h^{-k} \|D^k(u_0 F^{-1})\|_{L^\infty(B(a, MR))},$$

et de même

$$\|D^m u\|_{L^2(B(t, MRh))} = h^{-m+(n/2)} \|D^m(u_0 F^{-1})\|_{L^2(B(a, MR))}.$$

On obtient le résultat en posant $\beta_i = F(B(a^i, 1)) = B(t + h(a^i - a), h)$.

3. BORNES IMPLICITES DE L'ERREUR $f - f_m^A$

PROPOSITION 3 : Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbf{R}^n , à frontière lipschitzienne, ayant la propriété du cône intérieur d'angle $\theta > 0$ et de rayon $r > 0$. Soit m entier $> n/2$. Il existe $h_0 > 0$ (dépendant de θ, r, n et m), K (dépendant de Ω et m), et, si k entier ≥ 0 et $p \in [2, \infty]$ sont tels que $H^m(\Omega) = W^{m, 2}(\Omega) \subset W^{k, p}(\Omega)$, il existe C (dépendant de θ, n, m, k et p), tels que l'on ait, pour toute fonction $f \in H^m(\Omega)$ et tout ensemble $A \subset \bar{\Omega}$ vérifiant :

$$h = \sup_{t \in \bar{\Omega}} \inf_{a \in A} |t - a| \leq h_0,$$

$$\begin{aligned} (\star) \quad \|D^k(f - f_m^A)\|_{L^p(\Omega)} &\leq C h^{m-k-(n/2)+(n/p)} \|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\leq C h^{m-k-(n/2)+(n/p)} \|D^m f_m^\Omega\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\leq KC h^{m-k-(n/2)+(n/p)} \|D^m f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

LEMME 3.1 : Pour toute $f \in H^m(\Omega)$, le problème : minimiser $\|D^m u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$ parmi les $u \in D^{-m}L^2$ vérifiant $u|_\Omega = f$, a une solution unique f_m^Ω . De plus, il existe $K = K_m(\Omega)$ tel que l'on ait

$$\|D^m f_m^\Omega\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq K \|D^m f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall f \in H^m(\Omega).$$

Démonstration : L'ouvert Ω , à frontière lipschitzienne, a la propriété de m -prolongement : toute $f \in H^m(\Omega)$ a un prolongement $\tilde{f} \in H^m(\mathbf{R}^n)$. Comme évidemment $H^m(\mathbf{R}^n) \subset D^{-m}L^2$, la D^m -spline d'interpolation f_m^Ω de f sur Ω existe. Par définition, $\|D^m f_m^\Omega\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \inf \{ \|D^m u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} : u \in D^{-m}L^2, u|_\Omega = f \}$. Donc l'application $f + P_{m-1} \rightarrow \|D^m f_m^\Omega\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$ n'est autre que la norme hilbertienne transportée de $D^{-m}L^2/P_{m-1}$ sur $H^m(\Omega)/P_{m-1}$. Comme $\|D^m f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|D^m f_m^\Omega\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$, cette norme est plus fine que $f + P_{m-1} \rightarrow \|D^m f\|_{L^2(\Omega)}$, dont on a vu que, Ω étant connexe (et assez régulier), elle est équivalente à la norme hilbertienne quotient sur $H^m(\Omega)/P_{m-1}$. D'après un théorème de Banach, elles sont équivalentes, d'où le résultat.

REMARQUE : Si $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ est une *similitude* (application affine conservant les angles), on a $K_m(F(\Omega)) = K_m(\Omega)$. En effet $f_m^{F(\Omega)} = (f_0 F^{-1})_m^\Omega$ (l'interpolation D^m -spline commute avec les similitudes) puisque

$$\|D^m u\|_{L^2(\Omega)} = \lambda^{-m+(n/2)} \|D^m(u_0 F^{-1})\|_{L^2(F(\Omega))} \quad \text{si } u \in H^m(\Omega),$$

et $\|D^m u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \lambda^{-m+(n/2)} \|D^m u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$ si $u \in D^{-m} L^2$, λ étant le rapport de similitude. Autrement dit la constante K de l'énoncé ne dépend, pour chaque m , que de la forme de Ω . On peut évidemment, si c'est utile, encadrer $K_m(F(\Omega))$ en fonction de $K_m(\Omega)$ pour une application affine inversible quelconque F .

En dimension $n=1$, on a toujours $K=1$: toute $f \in H^m(a, b)$ peut être prolongée (par son développement de Taylor à l'ordre $m-1$ en a et b) de telle sorte que $\int_{-\infty}^{\infty} |D^m f|^2 = \int_a^b |D^m f|^2$.

LEMME 3.2 : Pour tout $A \subset \overline{\Omega}$ et toute $f \in H^m(\Omega)$ on a

$$\|D^m f_m^\Omega\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \|D^m f_m^A\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2.$$

Démonstration : $f_m^A + P_{m-1}$ est la projection orthogonale de $0 \in (D^{-m} L^2 / P_{m-1})$ sur le sous-espace affine fermé des $u + P_{m-1}$ où $u = f$ sur A . Donc $f_m^A + P_{m-1}$ est orthogonal au sous-espace vectoriel parallèle : $\{v + P_{m-1} : v = 0 \text{ sur } A\}$, donc à $f_m^\Omega - f_m^A + P_{m-1}$. D'où le résultat.

Cette relation est connue dans la littérature sur les fonctions-spline comme la première relation intégrale.

Notons également que $f_m^A + P_{m-1}$ est aussi la projection orthogonale de $f_m^\Omega + P_{m-1}$ sur l'orthogonal de $\{v + P_{m-1} : v = 0 \text{ sur } A\}$ dans $D^{-m} L^2 / P_{m-1}$. (En particulier l'application $f_m^\Omega + P_{m-1} \rightarrow f_m^A + P_{m-1}$ est linéaire.)

Démonstration de la proposition 3 : Compte tenu des deux lemmes précédents, il suffit de montrer la première inégalité de (\star).

Toute boule de centre $t \in \overline{\Omega}$ et de rayon $h = \sup_{t \in \overline{\Omega}} \inf_{a \in A} |t - a|$ rencontre \overline{A} (qui est compact). D'autre part la fonction $f_m^\Omega - f_m^A$ s'annule sur A donc, étant continue, sur \overline{A} . On peut appliquer la proposition 2 à $f_m^\Omega - f_m^A$ et écrire :

$$\begin{aligned} (\star\star) \quad & \|D^k(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(B(t, MRh))} \\ & \leq c h^{m-k+(n/2)-(n/p)} \|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(B(t, MRh))} \end{aligned}$$

où c dépend de n, m, k, p (vérifiant $W^{m,2} \subset W^{k,p}$) mais ne dépend pas de h , $f \in H^m(\Omega)$, et $t \in \Omega$; et R dépend seulement de n et m . On peut appliquer la proposition 1 avec $\varepsilon = Rh$ dès que $h \leq h_0 = \varepsilon_0/R$, où ε_0 dépend seulement de r et

θ : il existe un ensemble $S_h \subset \bar{\Omega}$ tel que toute boule de rayon Rh centrée sur S_h soit contenue dans Ω , chaque point de Ω appartenant à au moins une et au plus M_1 boules de rayon MR_h , centrées sur S_h . M et M_1 sont des constantes dépendant seulement de θ et n .

L'inégalité (★★) est valable pour tout $t \in S_h$. Si $p \in [2, \infty[$ on peut appliquer l'inégalité de Jensen $(\sum x_i^p)^{1/p} \leq (\sum x_i^2)^{1/2}$ et écrire :

$$\left(\sum_{t \in S_h} \int_{B(t, MRh)} |D^k(f_m^\Omega - f_m^A)|^p \right)^{1/p} \leq ch^{m-k-(n/2)+(n/p)} \left(\sum_{t \in S_h} \int_{B(t, MRh)} |D^m(f_m^\Omega - f_m^A)|^2 \right)^{1/2}.$$

Comme $1_\Omega \leq \sum_{t \in S_h} 1_{B(t, MRh)} \leq M_1$ on a le résultat voulu avec $C = c\sqrt{M_1}$. Le cas $p = \infty$ est plus simple : on a

$$\begin{aligned} \|D^k(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \sup_{t \in S_h} \|D^k(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^\infty(B(t, MRh))} \\ &\leq ch^{m-k-(n/2)} \left(\sum_{t \in S_h} \int_{B(t, MRh)} |D^m(f_m^\Omega - f_m^A)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq ch^{m-k-(n/2)} \left(M_1 \int_{\mathbb{R}^n} |D^m(f_m^\Omega - f_m^A)|^2 \right)^{1/2} \\ &= c\sqrt{M_1} h^{m-k-(n/2)} \|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

4. CONVERGENCE EN ÉNERGIE

PROPOSITION 4 : Dans les conditions de la proposition 3, pour toute $f \in H^m(\Omega)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $h_1 > 0$ tel que l'on ait :

$$\|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$$

pour tout $A \subset \bar{\Omega}$ vérifiant $h = \sup_{t \in \bar{\Omega}} \inf_{a \in A} |t - a| \leq h_1$.

Démonstration : Dans $D^{-m}L^2/P_{m-1}$ muni de la norme hilbertienne $u + P_{m-1} \mapsto \|D^m u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, $f_m^A + P_{m-1}$ est orthogonal à $g + P_{m-1}$ si $g = 0$ sur A . En particulier $\int_{\mathbb{R}^n} D^m f_m^A \cdot D^m(f_m^\Omega - f_m^A) = 0$. Donc

$$\|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} D^m f_m^\Omega \cdot D^m(f_m^\Omega - f_m^A).$$

D'autre part, soit j l'injection $H^m(\Omega)/P_{m-1} \rightarrow L^2(\Omega)/P_{m-1}$. Sa transposée $j' : (L^2(\Omega)/P_{m-1})' \rightarrow (H^m(\Omega)/P_{m-1})'$ a une image dense. Munissons $H^m(\Omega)/P_{m-1}$ de la norme $f + P_{m-1} \mapsto \|D^m f_m^\Omega\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ qui en fait un Hilbert, et soit I l'isomorphisme canonique de $(H^m(\Omega)/P_{m-1})'$

sur $H^m(\Omega)/P_{m-1}$. L'application Ij' de $(L^2(\Omega)/P_{m-1})'$ dans $H^m(\Omega)/P_{m-1}$ est encore d'image dense.

Si f appartient à cette image, c'est-à-dire $f = Ij' \varphi$, $\varphi \in (L^2(\Omega)/P_{m-1})'$, on a

$$\|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} D^m f_m^\Omega \cdot D^m(f_m^\Omega - f_m^A) = \langle \varphi, f - f_m^A + P_{m-1} \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la dualité entre $(L^2(\Omega)/P_{m-1})'$ et $L^2(\Omega)/P_{m-1}$. Mais,

$$\langle \varphi, f - f_m^A + P_{m-1} \rangle \geq |\varphi|_{(L^2(\Omega)/P_{m-1})'} |f - f_m^A|_{L^2(\Omega)}.$$

D'après la proposition 3, on a

$$|f - f_m^A|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^m \|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

dès que h est assez petit. Donc

$$\|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq Ch^m |\varphi|_{(L^2(\Omega)/P_{m-1})'}.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ et $f \in H^m(\Omega)$. Puisque $\mathcal{R}(Ij')$ est dense, il existe $\tilde{f} + P_{m-1} = Ij' \varphi$ tel que $\|D^m(f_m^\Omega - \tilde{f}_m^\Omega)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon/3$, donc aussi $\|D^m(f_m^A - \tilde{f}_m^A)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon/3$. \tilde{f} et φ étant fixés, il existe $h_1 > 0$ tel que $Ch_1^m |\varphi|_{(L^2(\Omega)/P_{m-1})'} \leq \varepsilon/3$, et alors $\|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon/3$ pour tout $A \subset \Omega$ tel que $h \leq h_1$. D'où finalement $\|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$.

Joignant les propositions 3 et 4, on obtient le :

THÉORÈME : Soit Ω un ouvert borné à frontière lipschitzienne de \mathbb{R}^n , m entier $> n/2$, $p \in [2, \infty]$ et k entier $\leq m - (n/2) + (n/p)$ (sauf éventuellement $k = m - n/2$ si $p = \infty$). Quels que soient $f \in H^m(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$, il existe h_0 tel que, pour tout $A \subset \Omega$ vérifiant :

$$h = \sup_{t \in \Omega} \inf_{a \in A} |t - a| \leq h_0,$$

on ait

$$\|D^k(f - f_m^A)\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon h^{m-k-(n/2)+(n/p)}.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. R. ARCANGELI, *Étude de problèmes de type elliptique ou parabolique avec conditions ponctuelles*, Thèse, Toulouse, 1974.
2. R. ARCANGELI et J. L. GOUT, *Sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert de \mathbb{R}^n* , R.A.I.R.O. Analyse Numérique, vol. 10, n° 3, 1976, p. 5-27.
3. M. ATTEIA, *Existence et détermination des fonctions « spline » à plusieurs variables*, C.R. Acad. Sci., Paris, 262, 1966, p. 575-578.
4. P. G. CIARLET et P. A. RAVIART, *General Lagrange and Hermite Interpolation in \mathbb{R}^n with Applications to Finite Element Methods*, Arch. Rat. Mech. Anal., 46, 1972, p. 177-199.
5. J. DUCHON, *Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces*, R.A.I.R.O. Analyse Numérique, vol. 10, n° 12, 1976, p. 5-12.
6. J. L. JOLY, *Théorèmes de convergence des fonctions « spline » générales d'interpolation et d'ajustement*, C.R. Acad. Sci., Paris, 264, 1967, p. 126-128.
7. M. H. SCHULTZ et R. S. VARGA, *L-Splines*, Nümer. Math., vol. 10, 1967, p. 345-369.