RAIRO
ANALYSE NUMÉRIQUE

J. P. BERLIOZ

A propos de l'algorithme *QZ*

RAIRO – Analyse numérique, tome 13, nº 1 (1979), p. 21-30.
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1979__13_1_21_0>

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 13, n° 1, 1979, p. 21 à 30)

A PROPOS DE L'ALGORITHME QZ (*)

par J. P. BERLIOZ ([1])

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — *On étudie la structure de tous les itérés de l'algorithme QZ sous translation et l'on montre qu'en un nombre fini d'étapes toutes les singularités ont été trouvées, en arithmétique exacte.*

Le problème de valeurs propres généralisées ($Ax = \lambda Bx$), a nécessité le développement de méthodes particulières, la transformation au problème standard pouvant engendrer des cas d'instabilité [6, 9], en particulier dans le cas de matrices quelconques, Moler et Stewart [3] ont introduit l'algorithme QZ, on se propose de donner d'importantes précisions quant aux comportements liés aux matrices A et B.

Notations et Définitions

On considère $\mathbb{C}^{nn}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n,

$$A = (a_{ij}), \qquad a_{ij} \in \mathbb{C}$$

DÉFINITION 1 : *$H = (h_{ij}) \in \mathbb{C}^{nn}$ est dite Hessenberg supérieure si et seulement si $h_{ij} = 0$ pour $i > j + l$ et $j = 1, 2, \ldots, n - 1$.*

DÉFINITION 2: *Une matrice $H \in \mathbb{C}^{nn}$ Hessenberg supérieure est dite non réduite si $h_{ii-1} \neq 0$ pour $i = 2, 3, \ldots, n$.*

DÉFINITION 3 : *Soient $A \in \mathbb{C}^{nn}$ Hessenberg supérieure et $B \in \mathbb{C}^{nn}$ triangulaire supérieure. On appelle décomposition QZ du couple (A, B) la double factorisation*

$$\begin{cases} QA = R \\ (QB)Z = T \end{cases}$$

avec Q matrice unitaire, Z matrice unitaire Hessenberg supérieure, R et T triangulaires supérieures.

On notera par la suite $\tilde{A} = QAZ$ et $\tilde{B} = QBZ$.

(*) Manuscrit reçu le 24 mars 1978.
([1]) Centre de Calcul Scientifique, Celar, Bruz.

Proposition 1 : *Existence et construction, il existe deux matrices unitaires Hessenberg supérieures Q^* et Z réalisant cette décomposition.*

Démonstration [3, 8] : On peut construire une matrice unitaire décomposant A, comme produit de $n - 1$ matrices de rotations élémentaires :

$$Q = Q^{(n-1)} \dots Q^{(2)} Q^{(1)},$$

où chaque $Q^{(i)}$ est une matrice de rotation complexe, on sait que Q^* est Hessenberg supérieure.

$Q^{(1)}$ modifie la première et la deuxième ligne de B en créant éventuellement un élément non nul en position (2, 1) qui devra être annulé par une matrice de rotation complexe Z_1 ne modifiant que la première et la deuxième colonne de $Q^{(1)}B$.

Notons

$$B^{(1)} = B$$
$$B^{(2)} = Q^{(1)} B^{(1)} Z^{(1)},$$

$B^{(2)}$ est triangulaire supérieure.

Supposons $B^{(k)}$ triangulaire supérieure, soit $Q^{(k)}$ la matrice de rotation ne modifiant que la $k^{\text{ième}}$ et $(k + 1)^{\text{ieme}}$ ligne de $B^{(k)}$ en créant éventuellement un élément non nul en position $(k + 1, k)$ qui devra être annulé par une matrice de rotation complexe $Z^{(k)}$ ne modifiant que les $k^{\text{ième}}$ et $(k + 1)^{\text{ième}}$ colonnes de $Q^{(k)}B^{(k)}$.

Posons

$$B^{(k+1)} = Q^{(k)} B^{(k)} Z^{(k)}$$

$B^{(k+1)}$ est triangulaire supérieure ; le processus s'arrête pour $k = n - 1$ et l'on peut écrire

$$\tilde{B} = QBZ = B^{(n)}$$
$$Z = Z^{(1)} \times Z^{(2)} \times \dots \times Z^{(n-1)}$$

Remarquons que Q ne dépend que de A et que par la suite l'étude portera essentiellement sur Z [5].

Une classe particulière de matrice Hessenberg, celle des matrices non réduites, a été considérée dans le cas de la décomposition QR habituelle. Pour la décomposition QZ d'un couple de matrices (A, B) cette classe particulière devient celle des matrices Hessenberg supérieures non réduite A et des matrices triangulaires supérieures f de première colonne non nulle.

Proposition 2 : *Soit A non réduite et b_{11} non nul, alors*

1) *Q^* et Z construites précédemment sont Hessenberg supérieures non réduites,*

2) *toutes les matrices réalisant la décomposition s'écrivent :*

$D_1 Q$ et ZD_2 ; D_1 et D_2 diagonales unitaires.

Démonstration : Soit Q réalisant une décomposition unitaire et triangulaire de A non réduite, Q^* est Hessenberg supérieure non réduite et toutes les matrices ainsi construites sont de la forme $D_1 Q$ avec D_1 diagonale unitaire (voir [1]).

Rreprenons la démonstration de la proposition précédente.

Notons que, pour tout k, $Q^{(k)}$ est différente de l'unité.

En effet :

$Q^{(1)}$ différente de l'identité, modifie la première et deuxième ligne de B, et crée un élément non nul en position (2, 1) car b_{11} est non nul, cet élément devra être annulé par une matrice $Z^{(1)}$ différente de l'identité.

Rreprenons les notations :

$$B^{(1)} = B$$
$$B^{(2)} = Q^{(1)} \times B^{(1)} \times Z^{(1)}$$

examinons le cas particulier b_{22} nul ; pour cela limitons les calculs aux sous-matrices 2×2 concernées :

$$\begin{pmatrix} q_1^{(1)} & q_2^{(1)} \\ -\bar{q}_2^{(1)} & \bar{q}_1^{(1)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1^{(1)} & z_2^{(1)} \\ -\bar{z}_2^{(1)} & \bar{z}_1^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(2)} & b_{12}^{(2)} \\ 0 & b_{22}^{(2)} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} q_1^{(1)}(z_1^{(1)} b_{11}^{(1)} - b_{12}^{(1)} \bar{z}_2^{(1)}) \\ -q_2^{(1)}(z_1^{(1)} b_{11}^{(1)} - b_{12}^{(1)} \bar{z}_2^{(1)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^{(1)}(z_2^{(1)} b_{11}^{(1)} + \bar{z}_1^{(1)} b_{12}^{(1)}) \\ q_2^{(1)}(z_2^{(1)} b_{11}^{1)} + \bar{z}_1^{(1)} b_{12}^{(1)}) \end{pmatrix}$$

On voit que $z_1^{(1)} b_{11}^{(1)} - b_{12}^{(1)} \bar{z}_2^{(1)} = 0$ implique aussi $b_{11}^{(2)} = 0$.

Comme $B^{(2)}$ et B ne diffèrent que par les premières et deuxièmes lignes et colonnes, et ont même rang, comme b_{11} est non nul, on peut conclure que :
$b_{22}^{(2)}$ est non nul,
et $b_{11}^{(2)}$ est nul si $b_{12}^{(1)}$ était nul.

Pour $k \leqq n - 1$ soit

$$B_k^{(k+1)} = Q^{(k)} B^{(k)} Z^{(k)} \quad \text{avec} \quad b_{kk}^{(k)} \text{ non nul.}$$

Seules les lignes k et $k + 1$ sont différentes entre $Q^{(k)} B^{(k)}$ et $B^{(k)}$; l'élément de $Q^{(k)} B^{(k)}$ en position $(k + 1, k)$ est non nul, car $Q^{(k)}$ diffère de l'identité et $b_{kk}^{(k)}$ est non nul, toute matrice de rotation $Z^{(k)}$ annulant cet élément est donc différente de l'identité, $Z^{(k)}$ ne modifiant que les colonnes k et $k + 1$, par le même calcul, et le même raisonnement on peut conclure :
$b_{k+1\,k+1}^{(k+1)}$ est non nul,
$b_{kk}^{(k+1)}$ est nul si $b_{k+1\,k+1}^{(k)}$ était nul.

Remarquons que pour tout $j \geqq k+1$ la $k^{\text{ième}}$ ligne de $B^{(j)}$ est inchangée.
Considérons le produit :

$$Z = Z^{(1)}Z^{(2)} \dots Z^{(n-1)}$$

où chaque Z_k est une matrice de rotation élémentaire différente de l'identité, leur produit est Hessenberg supérieur non réduit et l'on a :

$$\tilde{B} = B^{(n)} = QBZ.$$

Supposons maintenant qu'une autre matrice unitaire et Hessenberg supérieure γ décompose QB en une matrice T.

On obtient aisément les relations :

$$B = Q^*\tilde{B}Z^*$$
$$B = Q^*T\gamma^*$$

en notant $U = Z^*\gamma$, on obtient :

$$\tilde{B}U = T.$$

La matrice $\tilde{B}$ se partitionne de la façon suivante :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 \\ 0 & \tilde{B}_3 \end{pmatrix}$$

avec $\tilde{B}_3$ matrice inversible d'ordre P, $1 \leqslant P \leqslant n$, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 \\ 0 & \tilde{B}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}$$

les règles du produit par bloc imposent les relations :

$$\begin{cases} \tilde{B}_3 U_4 = T_3 \\ \tilde{B}_3 U_3 = 0 \end{cases}$$

la matrice $\tilde{B}_3$ étant inversible, on en déduit $U_3 = 0$, V est unitaire, alors $U_2 = 0$ et U_1, U_4 unitaires; la relation $U_4 = \tilde{B}_3^{-1} T_3$ implique U_3 triangulaire supérieure unitaire donc diagonale unitaire, notons-la Δ. Y s'écrit :

$$Y = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 U_1 & Z_2\Delta \\ Z_3 U_1 & Z_4\Delta \end{bmatrix}$$

Z_1 est Hessenberg supérieure non réduite d'ordre m.
Z_4 est Hessenberg supérieure non réduite d'ordre p.
Z_3 a un seul élément non nul celui de la première ligne et de la $m^{\text{ième}}$ colonne z_{m+1m}.
$Z_3 U_1$ a une seule ligne éventuellement non identiquement nulle, la première, elle s'écrit :

$$z_{m+1m}(u_{m1}, u_{m2}, \dots, u_{mm})$$

Y doit être Hessenberg supérieure ceci implique :

$$u_{mk} = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, m-1$$

on montre alors que si $u_{lk} = 0$ pour $k = 1, \ldots, l-1$, alors $u_{l-1k} = 0$ pour $k = 1, \ldots, l-2$ et pour l variant de $m-1$ à 3.

Les $l-2$ premiers éléments de la $l-1$ ligne du produit $Z_1 U_1$ s'écrivent $z_{ll-1} u_{l-1k}$ pour $k = 1, \ldots, l-2$, $Z_1 U_1$ Hessenberg supérieure implique $u_{l-1k} = 0$ pour k variant de 1 à $l-2$.

U_1 est donc triangulaire supérieure et unitaire donc diagonale.

REMARQUES : 1) Si B est inversible, il est évident que Q réalise une décomposition unitaire et triangulaire de AB^{-1} et Z^* une décomposition unitaire et triangulaire de $B^{-1}A$, en effet :

$$Z^* B^{-1} A = Z^* B^{-1} Q^* Q A = \tilde{B} Q A$$

$\tilde{B}$ et QA sont triangulaires supérieures.

2) La définition de la décomposition QZ avec Z Hessenberg supérieure est restrictive, en effet si l'on se contente de QAZ Hessenberg supérieure dans le cas A non inversible et b_{nn} nul, Z peut être unitaire de forme quelconque, par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

QAZ est Hessenberg supérieure et QBZ est triangulaire supérieure.

COROLLAIRE 1 : *Avec les mêmes hypothèses, A non réduite et b_{11} non nul, quelles que soient les matrices de décomposition Q et Z alors :*

1) *Si A est inversible, $\tilde{A}$ est non réduite inversible.*

2) *Si A n'est pas inversible, $\tilde{A}$ s'écrit :*

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \hline 0 \ldots 0 & 0 \end{array}\right)$$

COROLLAIRE 2 : *Sous les memes hypothèses, A non réduite et b_{11} non nul, quelles que soient les matrices de décomposition Q et Z :*

1) *Si B est inversible, $\tilde{B}$ est inversible.*

2) *Si B s'écrit :*

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{pmatrix}$$

avec B_3 d'ordre P inversible ;
alors $\tilde{B}$ s'écrit :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 \\ 0 & \tilde{B}_3 \end{pmatrix}$$

avec $\tilde{B}_3$ d'ordre $P + 1$ inversible.

Démonstration : Il suffit de reprendre la démonstration de la première partie de la proposition 2, et la suite

$$B^{(k)} = Q^{(k)} B^{(k-1)} Z^{(k)}$$

si b_{11} est non nul nous avons montré que pour tout $k = 2, \ldots, n - 1$, $b^{(k)}_{k+1k+1}$ est non nul.

REMARQUES : En décomposant une matrice A Hessenberg supérieure non réduite et une matrice B triangulaire supérieure de première colonne non nulle, on voit que les singularités de A apparaissent dans le coin inférieur droit de la matrice, comme dans une décomposition QR standard, et que les éléments diagonaux nuls de B remontent d'un indice le long de la diagonale ([1, 4]).

Avant de pouvoir conclure sur la suite des itérés par la décomposition QZ, il faut donc étudier le cas où B est de première colonne identiquement nulle.

PROPOSITION 3 : *Soit A Hessenberg supérieure non réduite et $b_{11} = 0$.*

1) *Il existe un indice k tel que pour tout facteur unitaire Q décomposant A, toutes les matrices Z correspondantes sont réduites et $z_{k+1k} = 0$.*

2) *Tous les Z peuvent s'écrire :*

$$Z = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

I est la matrice identité.
W est Hessenberg supérieure unitaire d'ordre k.
Δ est diagonale unitaire.
Z_1 Hessenberg supérieure non réduite.

Démonstration de la proposition 3 : Soit une décomposition de Q en matrices de rotations élémentaires :

$$Q = Q^{(n-1)} \ldots Q^{(1)}$$

Notons

$$A^{(j)} = Q^{(j)} \dots Q^{(1)}A$$
$$B^{(j)} = Q^{(j)}Q^{(j-1)} \dots Q^{(1)}B$$

pour $j = 1, \dots, n - 1$.

Chaque $Q^{(j)}$ diffère de l'identité par une sous matrice 2×2 sur la diagonale en ligne j et $j + 1$, celle-ci s'écrit :

$$\begin{pmatrix} q_1^{(j)} & q_2^{(j)} \\ -\bar{q}_2^{(j)} & \bar{q}_1^{(j)} \end{pmatrix}$$

avec $q_1^{(j)}\bar{q}_1^{(j)} + \bar{q}_2^{(j)}q_2^{(j)} = 1$ et $q_2^j \neq 0$.

Si b_{11} est nul, $B^{(1)}$ est triangulaire supérieure, de première colonne nulle. Soit k le plus grand indice tel que $B^{(k)}$ soit encore triangulaire supérieure, alors k existe et $k \leqslant n - 1$, si $k < n - 1$, alors $B^{(k+1)}$ non triangulaire supérieure implique $b_{k+1,k+1}^{(k)}$ non nul car $q_2^{(k+1)}$ est non nul.

Alors

$$B^{(k)} = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline 0 & B_3 \end{array}\right)$$

avec B_1 matrice nilpotente d'ordre k.

Étudions le problème déflaté avec :

$$(A^k)_{n-k} = \begin{pmatrix} a_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots\cdots\cdots & & a_{k+1,n}^{(k)} \\ a_{k+2,k+2}^{(k)} & & & \vdots \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 \;\dots\; 0 & & a_{nn-1}^{(k)} & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$(B^k)_{n-k} = \begin{pmatrix} b_{k+1}^{(k)} & \cdots & b_{k+1,n}^{(k)} \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Les résultats des propositions précédentes s'appliquent et toutes les matrices Z_1 Hessenberg supérieures unitaires obtenues sont non réduites et définies à une diagonale unitaire près.

Une matrice particulière décomposant le problème initial est :

$$Z = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix}.$$

De plus on peut montrer que les éléments sous diagonaux de la $(k + 1)^{\text{ième}}$

colonne de QB ne sont pas tous nuls, en particulier le dernier s'écrit au signe près :

$$\bar{q}_2^{(k+1)} \ldots \bar{q}_2^{(n-1)} b_{k+1,k+1}^{(k)}$$

QBZ a donc un élément sous diagonal de la $k^{\text{ième}}$ colonne de la forme $\lambda z_{k+1,k}$ avec λ non nul.

Une condition nécessaire pour que QBZ soit triangulaire supérieure est $z_{k+1,k} = 0$.

Toutes les matrices décomposant le problème initial sont alors de la forme :

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix},$$

avec W Hessenberg supérieure unitaire d'ordre k,
Δ diagonale unitaire,
Z_1 unitaire Hessenberg supérieure non réduite décomposant le problème déflaté.

COROLLAIRE 1 : *Soit A non réduite et b_{11} nul.*

1) *Toutes les matrices $\tilde{A}$ s'écrivent :*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ 0 & \tilde{A}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

$\tilde{A}_3$ est d'ordre k triangulaire supérieure inversible.
$\tilde{A}_3$ est Hessenberg supérieure, non réduite si A est inversible, sinon $\tilde{A}_3$ est de la forme :

$$\tilde{A}_3 = \begin{array}{c|c} \tilde{A}'_3 & A'_4 \\ \hline 0 \ldots 0 & 0 \end{array}$$

avec $\tilde{A}'_3$ Hessenberg supérieure non réduite.

2) *Toutes les matrices $\tilde{B}$ s'écrivent :*

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 \\ 0 & \tilde{B}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

$\tilde{B}_1$ d'ordre k nilpotente.

La matrice W est Hessenberg supérieure non réduite d'ordre k, la matrice Δ est diagonale.

Envisageons maintenant la suite des itérés d'un couple (A, B) ; A Hessenberg supérieure non réduite, B triangulaire supérieure, par l'algorithme QZ :

$$A_1 = A\,, \qquad B_1 = B$$

la $(k+1)^{\text{ième}}$ étape s'écrit :

$$\begin{aligned} Q_k A_k &= R_k \\ Q_k B_k Z_k &= B_{k+1} \\ A_{k+1} &= Q_k A_k Z_k \end{aligned}$$

avec Q_k^*, Z_k, A_{k+1} Hessenberg supérieures, les deux premières unitaires
R_k, B_k, B_{k+1} triangulaires supérieures.

Supposons que B soit de rang r, l'indice du dernier élément diagonal nul étant l, on peut énoncer la :

PROPOSITION 4 : *Après l'itérations, la matrice B_l s'écrit :*

$$B_l = \left(\begin{array}{c|c} B_1^l & B_2^l \\ \hline 0 & B_3^l \end{array}\right)$$

B_3^l triangulaire supérieure d'ordre r' inversible, avec $r' \geqq r$.
B_1^l triangulaire supérieure ayant 0 comme valeur propre de multiplicité géométrique au moins égale à celle de B.

La matrice A_l s'écrit :

$$A_l = \left(\begin{array}{c|c} A_1^l & A_2^l \\ \hline 0 & A_3^l \end{array}\right)$$

A_1^l d'ordre $n-r'$, A_3^l d'ordre r' Hessenberg supérieure.

L'itération se poursuit alors sur deux couples distincts (A_1^l, B_1^l), (A_3^l, B_3^l).

Remarquons que la décomposition QZ de $(A_1^l B_1^l)$ n'est pas unique et pose un problème de stabilité [7, 9].

Prenons par exemple,

$$A_1^l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_1^l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad QB_1^l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad QA_1^l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

une première décomposition est réalisée avec $Z = I$.

Soit

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & v \\ 0 & -v & w \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad w^2 + v^2 = 1$$

on a

$$\tilde{A}_1^l W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{B}_1^l W = \begin{pmatrix} 0 & w & v \\ 0 & -v & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est une seconde décomposition possible.

B_3^l étant inversible, l'itération QZ sur le couple $(A_3^l B_3^l)$ est entièrement déterminé par l'itération QR sur $A_3^l(B_3^l)^{-1}$ ou $(B_3^l)^{-1}A_3^l$. Les théorèmes de convergence du QR habituel et l'accélération de convergence par translation peuvent s'appliquer [2, 8].

Cette étude a permis de se placer dans un cadre favorable à l'étude de la stabilité de l'algorithme QZ, notamment de son comportement numérique lorsque B est presque singulière, ceci fera l'objet d'un prochain article.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. LEBAUD, *Contribution à l'étude de l'algorithme QR*, Thèse à l'Université de Rennes, 1971.
2. C. LEBAUD, *Remarques sur la convergence de l'algorithme QR*, Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, 1968.
3. MOLER, G. W. STEWART, *An algorithme for generalized Matrix eigenvalue problems*, S.I.A.M., J. Numer. Anal., 10, 1973.
4. PARLETT, *Global convergence of the basic QR algorithm for hessenberg matrices*, Math. Comp., 22, 1968.
5. W. G. PARLETT, POOLE, *A geometric theory for the QR, LU and power iteration*, S.I.A.M., J. Numer. Anal., 10, 1972.
6. PETERS, WILKINSON, *$Ax = \lambda Bx$ and the generalized eigenproblem*, S.I.A.M., J. Numer. Anal., 7, 1970.
7. G. W. STEWART, *On the sensitivity of the eigenvalue problem $Ax = \lambda Bx$*, S.I.A.M., J. Numer. Anal., 9, 1972.
8. J. H. WILKINSON, *The algebraic Eigenvalue problem*, Oxford University Press, 1965.
9. J. H. WILKINSON, *Some recent advances in numerical linear Algebra*, dans « The state of the art in Numerical Analysis », 1977.