

RAIRO

ANALYSE NUMÉRIQUE

O. PIRONNEAU

O. P. SHARMA

**Sur le découplage de problèmes elliptiques
dans des ouverts cylindriques de \mathbb{R}^3 avec des
éléments fins prismatiques**

RAIRO – Analyse numérique, tome 13, n^o 1 (1979), p. 55-66.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1979__13_1_55_0

© AFCET, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO – Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LE DÉCOUPLAGE DE PROBLEMES ELLIPTIQUES
DANS DES OUVERTS CYLINDRIQUES DE \mathbb{R}^3
AVEC DES ÉLÉMENTS FINIS PRISMATIQUES (*)**

par O PIRONNEAU ⁽¹⁾ et O P SHARMA ⁽²⁾

Communique par P G CIARLET

Resume — Ce bref article a pour but de rappeler comment un probleme elliptique dans un ouvert cylindrique de \mathbb{R}^3 , discretise par une methode d'elements fins prismatiques, se decompose par une methode spectrale en un nombre fini de problemes elliptiques dans \mathbb{R}^2 . Cette methode est bien connue en differences finies mais apparemment oubliee en elements fins. On montre qu'un facteur entre 10 et 100 peut etre gagne sur la place memoire et le temps calcul dans certains cas

0. INTRODUCTION

Soit Ω un ouvert cylindrique de \mathbb{R}^3 $\Omega = \Omega_1 \times]0, Z[$. On considere par exemple le probleme suivant trouver u solution de

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad (1)$$

où Γ est la frontiere de Ω . Pour intégrer numériquement (1), une méthode classique consiste à faire une décomposition de Fourier par rapport à la dernière variable. On cherche $u(x_1, x_2, x_3)$ sous la forme

$$u(x_1, x_2, x_3) = \sum_i u_i(x_1, x_2) w_i(x_3) \quad (2)$$

Alors (u_i, w_i) doivent satisfaire à

$$-\sum_i \left(w_i \Delta_{x_1 x_2} u_i + u_i \frac{d^2 w_i}{dx_3^2} \right) = f \text{ dans } \Omega \quad (3)$$

(*) Manuscrit reçu le 3 mars 1978

(¹) Iria-Laboria, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, 78150 Le Chesnay

(²) Indian Institute of Technology, Math Dept, New Delhi

Donc si on choisit pour w_i les solutions du problème aux valeurs propres

$$-\frac{d^2 w_i}{dx_3^2} = \lambda_i w_i \quad \text{dans }]0, Z[, \quad w_i(0) = w_i(Z) = 0. \quad (4)$$

Alors u_i est solution de

$$-\Delta_{x_1 x_2} u_i + \lambda_i u_i = f_i, \quad u_i|_{\Gamma_1} = 0, \quad (5)$$

où Γ_1 est la frontière de Ω_1 et où f_i est la décomposition de f sur la base $\{w_i\}$ c'est-à-dire

$$\sum f_i(x_1 x_2) w_i(x_3) = f(x_1 x_2 x_3). \quad (6)$$

Numériquement on peut alors discrétiser (5) par une méthode d'éléments finis de Lagrange triangulaire d'ordre 1, par exemple.

Alternativement on aurait pu discrétiser (1) directement par une méthode d'éléments finis. Si on utilise des éléments prismatiques de Lagrange d'ordre 1, alors la présente étude montre que les deux méthodes sont *rigoureusement* équivalentes lorsque f vérifie (5) et à condition que (4) soit discrétisée en éléments finis de degré 1. La méthode mixte (2)-(5) n'est donc rien d'autre qu'un algorithme de résolution par décomposition du système linéaire obtenu en discrétisant (1) avec des éléments prismatiques. La méthode s'étend à quelques opérateurs à coefficients non constants et aux éléments finis de Lagrange de degré quelconque. Notons que cette méthode est très proche de la méthode spectrale pour l'intégration des problèmes paraboliques par découplage en problèmes elliptiques et qu'elle est souvent utilisée en différences finies (problèmes de météorologie cf. Sadourny [1] par exemple) sous une forme légèrement différente. Il ne s'agit donc pas d'une nouvelle méthode mais d'un rappel qui peut être très utile aux analystes numériques désireux d'illustrer de nouvelles méthodes ou de nouveaux schémas sur des problèmes tridimensionnels simples lorsqu'ils disposent des codes bidimensionnels. Comme nous allons le voir la méthode permet aussi un gain substantiel sur l'occupation mémoire en machine.

Notons deux applications pratiques pour lesquelles la méthode ci-dessus est bien adaptée :

- 1° les écoulements tridimensionnels externes autour d'un barreau pour les modèles de turbulence (Perrier-Pironneau [2]);
- 2° le calcul du champ électromagnétique dans un moteur linéaire (Marrocco [3]).

Après avoir posé le problème au paragraphe 1, on étudie une discrétisation par éléments prismatiques, ainsi que la décomposition du problème, au

paragraphe 2. Au paragraphe 3, on compte les opérations et les mémoires nécessaires lorsque les systèmes linéaires sont résolus par une factorisation de Cholesky. Pour les discrétisations typiques des problèmes 1 et 2 ci-dessus on trouve que le nombre de mots-mémoire nécessaires et le nombre d'opérations sont divisés par 20, factorisations non comprises. Ces gains sont tout à fait remarquables malheureusement la méthode se généralise mal aux opérateurs non constants et ne s'applique pas si Ω n'est pas cylindrique.

1. POSITION DU PROBLÈME

Soit Ω_1 un ouvert borné de R^m de frontière Γ_1 et Ω_2 un ouvert borné de R^n de frontière Γ_2 . Soit Ω l'ouvert cylindrique de R^M , $M=m+n$ et Γ sa frontière

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \quad \Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2, \tag{1.1}$$

soit $a_0, a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \dots, M$ des coefficients vérifiant la propriété

$$\left. \begin{aligned} a_0(x) &= a_0^1(x_1) \beta(x_2), \\ a_{ij}(x) &= a_{ij}^1(x_1) \beta(x_2), \quad i, j \leq n, \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2, \\ &= a_{ij}^2(x_2) \gamma(x_1), \quad i, j > n. \end{aligned} \right\}$$

Soit f un élément de $H^{-1}(\Omega)$, g un élément de $L^2(\Gamma)$ et u_0 un élément de $H^1(\Omega)$. On considère le problème elliptique aux limites non homogènes suivant :

$$\left. \begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^M \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u &= f \quad \text{dans } \Omega. \\ u|_{\Gamma_d} &= u_0|_{\Gamma_d} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_A} \Big|_{\Gamma_n} = g. \end{aligned} \right\} \tag{1.3}$$

où (Γ_d, Γ_n) est une partition de Γ . Avec des notations évidentes on suppose que

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_d &= \Gamma_{1d} \times \Gamma_{2d}, \\ \Gamma_n &= \Gamma_{1n} \times \Gamma_{2n}. \end{aligned} \right\} \tag{1.4}$$

On fait les hypothèses habituelles de coercivité sur les a_{ij} :

$$\sum_{i,j=1}^M a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad \forall \xi \in R^M. \tag{1.5}$$

pour un $\alpha > 0$ et

$$a_0 \geq 0 \quad \text{où} \quad a_0 \geq \alpha \quad \text{si} \quad \Gamma_d = \emptyset. \tag{1.6}$$

En plus on suppose que la matrice A des coefficients a_{ij} est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}; \quad (1.7)$$

c'est-à-dire que

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i, j \text{ tel que } j > n \text{ ou } i > n, j \leq n. \quad (1.8)$$

Pour donner un sens précis au problème (1.3) on notera

$$V = \{v \in L^2(\Omega) \mid \nabla v \in L^2(\Omega)^M, v|_{\Gamma_d} = 0\}. \quad (1.9)$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0 uv dx, \quad (1.10)$$

$$b(v) = \int_{\Omega} fv dx + \int_{\Gamma_n} gv dx, \quad (1.11)$$

de telle sorte que le problème à résoudre est le suivant :

$$\left. \begin{aligned} a(u, v) &= b(v), & \forall v \in V, \\ u - u_0 &\in V, \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

où u_0 est une extension dans $H^1(\Omega)$ de $u_0|_{\Gamma}$. Sous la forme (1.12) on démontre par le lemme de Lax-Milgram que u existe et est unique dans V .

2. APPROXIMATION PAR DES ÉLÉMENTS PRISMATIQUES

2.1. Approximation de Ω

Soit \mathcal{T}_h^1 une triangulation de Ω_1 , \mathcal{T}_h^2 une triangulation de Ω_2 où h désigne le plus grand côté des triangles. Comme d'habitude on suppose que les triangles ont une intersection vide ou réduite à un sommet ou à un côté; on suppose que lorsque h tend vers zéro les angles des triangles restent compris entre α et β , $\alpha > 0$, $\beta < \pi$ et que le rapport du plus grand côté des triangles sur le plus petit côté reste borné et strictement positif.

A partir de \mathcal{T}_h^1 et \mathcal{T}_h^2 on peut construire une triangulation de Ω par des prismes

$$\mathcal{P}_h = \{P = T_1 \times T_2 \mid T_1 \in \mathcal{T}_h^1, T_2 \in \mathcal{T}_h^2\}. \quad (2.1)$$

Soit Ω_h l'approximation de Ω correspondante

$$\Omega_h = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_h} P.$$

De façon évidente on définira Γ_{dh} et Γ_{nh} les approximations de Γ_d et Γ_n induites par \mathcal{P}_h .

2.2. Approximation de V

Avec les éléments prismatiques on travaille avec R^k l'espace des polynômes de degré k en x_1 à x_2 fixé et de degré k en x_2 à x_1 fixé. On définit une approximation V_h de V :

$$V_h = \{ v_h \in C^0(\overline{\Omega_h}) \mid v_h|_P \in R^k \forall P \in \mathcal{P}_h; v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_{dh} \}. \tag{2.2}$$

2.3. Notations

Pour la suite nous introduisons les notations suivantes :

$\{q_j\}_{j=1}^{N_1}$ les nœuds de \mathcal{P}_h ;

N, N_1, N_2 le nombre de nœuds de $\mathcal{P}_h, \mathcal{T}_h^1, \mathcal{T}_h^2$;

$$I = \{ i \mid q_i \in \Gamma_{dh} \}, \tag{2.3}$$

$$V_{ih} = \{ v_{ih} \in C^0(\overline{\Omega_{ih}}) \mid v_{ih}|_{T_i} \in P^k, \forall T_i \in \mathcal{T}_h^i; v_{ih}|_{\Gamma_{idh}} = 0 \}, \quad i = 1, 2, \tag{2.4}$$

où P^k est l'ensemble des polynômes de degré k .

PROPOSITION 1 : Soit $\{w_h^i\}_{i=1}^{N_2}$ une base de V_{2h} . Alors quel que soit $v_h \in V_h$, il existe $v_{1h}^i \in V_{1h}, i = 1, \dots, N_2$ tel que

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{N_2} w_h^i(x_2) v_{1h}^i(x_1), \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega_h. \tag{2.5}$$

Démonstration : Soit $\{\bar{w}_h^i\}_{i=1}^{N_2}$ la base canonique de V_{2h} telle que

$$\bar{w}_h^i(q_{2j}) = \delta_{ij}, \quad \forall q_{2j} \text{ nœud de } \mathcal{T}_h^2. \tag{2.6}$$

Posons

$$\bar{v}_{1h}^i(x_1) = v_h(x_1, q_{2i}), \tag{2.7}$$

alors d'après (2.6), on peut re-écrire (2.7) comme

$$v_h(x_1, q_{2j}) = \sum_{i=1}^{N_2} \bar{w}_h^i(q_{2j}) \bar{v}_{1h}^i(x_1), \quad \forall j = 1, \dots, N_2. \tag{2.8}$$

Comme $\bar{w}_h^i \bar{v}_{1h}^i \in V_h$ par construction, l'égalité (2.8) est vraie en tout point

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{N_2} \bar{w}_h^i(x_2) \bar{v}_{1h}^i(x_1), \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega_h. \tag{2.9}$$

Pour démontrer que (2.9) est vraie pour toute base $\{w_h^i\}$ on écrit la base

canonique sur cette base

$$\bar{w}_h^i = \sum_{j=1}^{N_2} \alpha_{i,j} w_j^i \quad (2.10)$$

et on pose

$$v_{1h}^j = \sum \alpha_{i,j} \bar{v}_{1h}^i. \quad (2.11)$$

2.4. Décomposition du problème discret

Sous forme discrète le problème (1.12) s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} a(u_h, v_h) &= b(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \\ u_h - u_{0h} &\in V_h, \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

où u_{0h} est une approximation contenue dans V_h de u_0 et

$$a(u_h, v_h) = \int_{\Omega_h} a_{i,j} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx, \quad (2.13)$$

$$b(v_h) = \int_{\Omega_h} f v_h dx + \int_{\Gamma_{mh}} g v_h dx. \quad (2.14)$$

D'après l'hypothèse (1.7), (2.13) s'écrit :

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_h} a_{i,j} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx \\ &\quad + \sum_{i,j=n+1}^M \int_{\Omega_i} a_{i,j} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial v_h}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega_h} a_0 u_h v_h dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

D'après la proposition 1, étant donnée une base quelconque $\{w_h^i\}_{i=1}^{N_2}$ de V_{2h} on peut écrire :

$$u_h = \sum_{k=1}^{N_2} u_h^k u_{1h}^k. \quad (2.16)$$

Donc en prenant $v_h = w_h^l v_{1h}$ dans (2.15) on obtient :

$$\begin{aligned} a(u_h, w_h^l v_{1h}) &= \sum_{k=1}^{N_2} \left[\sum_{i,j \leq n} \int_{\Omega_h} w_h^k w_h^l a_{i,j} \frac{\partial u_h^k}{\partial x_i} \frac{\partial v_{1h}}{\partial x_j} dx \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j > n} \int_{\Omega_h} a_{i,j} u_{1h}^k v_{1h} \frac{\partial w_h^k}{\partial x_i} \frac{\partial w_h^l}{\partial x_j} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega_h} a_0 w_h^k w_h^l u_{1h}^k v_{1h} dx \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Soit, compte tenu de (1.2) :

$$\begin{aligned}
 a(u_h, w_h^l v_{1h}) = & \sum_{k=1}^{N_2} \left[\sum_{i,j \leq n} \int_{\Omega_h} \beta w_h^k w_h^l dx_2 \int_{\Omega_{1h}} a_{ij}^1 \frac{\partial u_{1h}^k}{\partial x_i} \frac{\partial v_{1h}}{\partial x_j} dx_1 \right. \\
 & + \sum_{i,j > n} \int_{\Omega_{1h}} \gamma u_{1h}^k v_{1h} dx_1 \int_{\Omega_{2h}} a_{ij}^2 \frac{\partial w_h^k}{\partial x_i} \frac{\partial w_h^l}{\partial x_j} dx_2 \\
 & \left. + \int_{\Omega_{1h}} a_0^1 u_{1h}^k v_{1h} dx \int_{\Omega_{2h}} \beta w_h^k w_h^l dx_2 \right]. \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Soit $\{\tilde{w}_h\}_{l=1}^{N_2}$ la base des vecteurs propres

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{i,j > n} \int_{\Omega_{2h}} a_{ij}^2 \frac{\partial \tilde{w}_h^k}{\partial x_i} \frac{\partial w_h^l}{\partial x_j} dx_2 = \lambda_k \int_{\Omega_{2h}} \beta \tilde{w}_h^k w_h^l dx_2, \\
 \forall l = 1, \dots, N_2.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

[D'après (1.2) $\beta^{-1} a_{ij}^2$ est positive définie. Le système (2.19) admet donc une solution unique $\{\lambda_k\}_{k=1}^{N_2} \{\tilde{w}_h^k\}_{k=1}^{N_2}$.

Dans la base \tilde{w}_h , (2.18) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 a(u_h, \tilde{w}_h^l v_{1h}) = & \sum_{k=1}^{N_2} \left(\int_{\Omega_{2h}} \tilde{w}_h^k \tilde{w}_h^l dx_2 \right) \\
 & \times \left[\sum_{i,j \leq n} \int_{\Omega_h} a_{ij}^1 \frac{\partial u_{1h}^k}{\partial x_i} \frac{\partial v_{1h}}{\partial x_j} dx_1 + \int_{\Omega_{1h}} (\lambda_k \gamma + a_0^1) u_{1h}^k v_{1h} dx_1 \right]. \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

NOTATION : Posons

$$a_k^1(u_{1h}, v_{1h}) = \sum_{i,j \leq n} \int_{\Omega_h} a_{ij}^1 \frac{\partial u_{1h}}{\partial x_i} \frac{\partial v_{1h}}{\partial x_j} dx_1 + \int_{\Omega_{1h}} (\lambda_k \gamma + a_0^1) u_{1h} v_{1h} dx_1. \quad (2.21)$$

Pour découpler (2.12) on doit pouvoir écrire

$$b(w_h^l v_{1h}) = \sum_{k=1}^{N_2} b_k(v_{1h}) \int_{\Omega_{2h}} \beta w_h^l \tilde{w}_h^k dx_2, \quad (2.22)$$

alors (2.12) devient

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{N_2} [a_k^1(u_{1h}, v_{1h}) - b_k(v_{1h})] \int_{\Omega_{2h}} \beta \tilde{w}_h^l \tilde{w}_h^k dx_2 = 0, \\
 \forall v_{1h} \in V_{1h}, \quad \forall l, \quad u_h - u_{0h} \in V_h
 \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Le problème (2.23) se découple si on choisit u_{1h}^k solution de

$$\left. \begin{aligned}
 a_k^1(u_{1h}^k, v_{1h}) = b_k(v_{1h}), \quad \forall v_{1h} \in V_{1h}, \\
 u_{1h}^k - u_{0h}^k \in V_{1h}.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

où u_{0h}^k est tel que

$$u_0 = \sum_{k=1}^{N_2} u_{0h}^k \tilde{w}_h^k \quad (2.25)$$

[on notera que les hypothèses sur les a_{ij} impliquent l'existence et l'unicité des solutions de (2.24)]. Donc pour pouvoir écrire (2.22) on pose

$$\alpha_{lk} = \int_{\Omega_{2h}} \beta \tilde{w}_h^k \tilde{w}_h^l dx_2 \quad (2.26)$$

et on calcule f_h^k solution de

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_2} \alpha_{lk} \int_{\Omega_{2h}} f_h^k v_{1h} dx_1 &= \int_{\Omega_h} f \tilde{w}_h^l v_{1h} dx + \int_{\Gamma_{nh}} g \tilde{w}_h^l v_{1h} d\Gamma, \\ \forall v_{1h} \in V_{1h}, \quad \forall l &= 1, \dots, N_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Pour résoudre (2.27) on peut procéder comme suit : d'après la proposition 1, l'interpolé f_h de f peut s'écrire

$$f_h(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{N_2} f_{1h}^i(x) \tilde{w}_h^i(x_2) \beta(x_2), \quad (2.28)$$

car $\{\beta \tilde{w}_h^i\}_i$ est aussi une base de V_{2h} , donc

$$\int_{\Omega_h} f_h \tilde{w}_h^l v_{1h} dx = \sum_{k=1}^{N_2} \int_{\Omega_{1h}} f_{1h}^k v_{1h} dx_1 \int_{\Omega_{2h}} \beta \tilde{w}_h^k \tilde{w}_h^l dx_2, \quad (2.29)$$

qui est bien de la forme (2.27) lorsque $g=0$. Pour calculer $\{f_h^k\}$ est donc ramené à résoudre un système linéaire $N_2 \times N_2$ en chaque nœud. En effet, si

$$\tilde{w}_h^i = \sum_{j=1}^{N_2} b_{ij} \bar{w}_h^j, \quad i = 1, \dots, N_2, \quad (2.30)$$

alors

$$\sum_{i=1}^{N_2} f_{1h}^i(q_k) b_{ij} \beta(q_j) = f_h(q_k, q_j), \quad \forall (q_k, q_j) \text{ nœud de } \mathcal{P}_h. \quad (2.31)$$

THÉORÈME 1 ($g=0$) : Soit $\{\lambda_k, w_h^k\}_{k=1}^{N_2}$ la solution du problème aux valeurs propres

$$\sum_{i,j > n} \int_{\Omega_{2h}} a_{ij}^2 \frac{\partial \tilde{w}_h^k}{\partial x_i} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} dx_2 = \lambda_k \int_{\Omega_{2h}} \beta \tilde{w}_h^k w_h dx_2, \quad \forall w_h \in V_{2h}. \quad (2.32)$$

Soit $\{f_{1h}^k\}$ les solutions de (2.31) et soit $\{u_{1h}^k\}$ les solutions de

$$a_k(u_{1h}^k, v_{1h}) = \left. \begin{aligned} &\int_{\Omega_{1h}} f_{1h}^k v_{1h} dx, \quad \forall v_{1h} \in V_{1h}, \\ &u_{1h}^k - u_{0h}^k \in V_{1h}, \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

alors

$$u_h = \sum_{k=1}^{N_2} u_{1h}^k w_h^k, \quad (2.34)$$

est solution de (2.12).

REMARQUE 1 : Lorsque g est non nul, on peut soit résoudre (2.24) soit convertir l'intégrale frontière en intégrale sur Ω_h en définissant une extension \tilde{g}_h de g et utiliser (2.31) sur $f + g$.

REMARQUE 2 : En fait on a pas besoin de f_1^k mais de

$$\int_{\Omega_{1h}} f_{1h}^k v_{1h}^l dx,$$

où les $\{v_{1h}^l\}$ forment une base de V_{1h} . On peut donc résoudre directement (2.27) avec $v_{1h} = v_{1h}^l$. Soit un système linéaire $N_2 \times N_2$ en chaque nœud.

THÉORÈME 2 : Si $\Omega = \Omega_h$ et si la solution de (1.12) est dans $H^{k+1}(\Omega)$ alors :

$$\|u_h - u\|_{H^1(\Omega)} \leq C h^k |u|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

Démonstration : Voir Ciarlet [4].

REMARQUE 3 : Il semble que le même type de résultat soit vrai lorsque Ω_{1h} est triangulé par des éléments quadrangulaires isoparamétriques.

3. EXEMPLES D'APPLICATIONS ET DÉCOMPTE DES OPÉRATIONS

3.1. Écoulements incompressibles visqueux

Le calcul des écoulements incompressibles visqueux

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + u \nabla u = \nabla p; \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega \text{ (cf. fig. 1)} \quad u|_{\Gamma} = u_0. \quad (3.1)$$

est un sujet de recherche pour lequel il peut être intéressant de tester les modèles proposés sur l'exemple tridimensionnel suivant : $\Omega =]1, 1[^3 - C$ où C est un cylindre d'axe ox_1 et de rayon $r < 1$. De tels écoulements sont tridimensionnels turbulents si ν est assez petit et il faut un grand nombre de nœuds dans le fluide pour une précision correcte. Certaines méthodes (cf. Glowinski-Pironneau [5]

par exemple) ramène la résolution de (3.1) à une succession de problèmes de Dirichlet dans Ω pour l'opérateur $((1/\Delta t) - \nu \Delta)$. Une telle méthode est aussi utilisée en météorologie pour des problèmes du type (3.1) dans un cube (cf. Sharma [6]). Une discrétisation typique pour ces problèmes est : 20 tranches de 1 000 nœuds, la largeur de bande dans chaque tranche étant de 20 environ, alors que la longueur de bande du problème non découplé est de 400.

3.2. Moteur électromagnétique linéaire

Si \vec{A} désigne le potentiel vecteur du champ, il faut résoudre (méthode de Lagrangien augmenté) :

$$\min_{\substack{A \\ \forall n \Gamma=0}} \max_{\lambda} \mathcal{L}_r(A, q, \lambda), \tag{3.2}$$

avec

$$\mathcal{L}_r(A, q, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \psi(|q|^2) + r(\eta(q - \nabla \times A)^2 + \eta|\nabla \cdot A|^2) + \frac{\gamma}{\Delta t} A^2 + 2 \left[\eta \lambda (q - \nabla \times A) - j A + \frac{\gamma}{\Delta t} A A^{n-1} \right] \right\} dx, \tag{3.3}$$

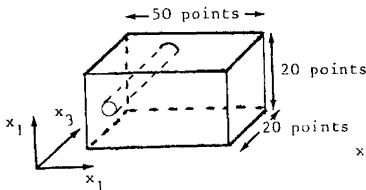


Figure 1.

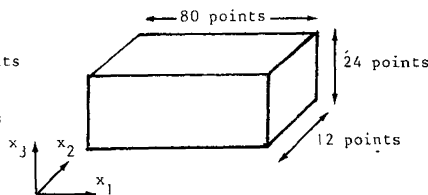


Figure 2.

où Ω est un rectangle, ψ est une fonction de R dans R donné, $r \in R$ donné, $\eta(x_1, x_2, x_3) = \eta_1(x_1, x_2) \eta_2(x_3)$; $\gamma, \Delta t, A^{n-1}$ deux constantes et une fonction données.

On approxime A par des éléments prismatiques PQ comme ci-dessus et λ et q par des fonctions constantes par morceaux sur chaque prisme. Alors (3.2) résolu par l'algorithme d'Uzawa donne :

connaissant $A_h^{m+1}, q_h^m, \lambda_h^m$ calculer $A_h^{m+1}, q_h^{m+1}, \lambda_h^{m+1}$ en résolvant successivement

$$\left. \begin{aligned} r \int_{\Omega} \left[(\eta \nabla A_h \nabla w_h) + \frac{\gamma}{\Delta t} (A_h, w_h) \right] dx \\ = \int_{\Omega} \left[(\eta (r q_h - \lambda_h) \nabla \times w_h) + (j, w_h) + \frac{\gamma}{\Delta t} (A^{n-1}, w_h) \right] dx, \\ \forall w_h \in V_h, \quad A_h \in V_h; \quad A_h \times n|_{\Gamma} = 0, \end{aligned} \right\} \tag{3.4}$$

$$\psi(|q_h|^2) q_h + r \langle \eta \rangle q_h = r \langle \eta \nabla \times A_h \rangle - \langle \eta \rangle \lambda_h, \tag{3.5}$$

$$\lambda_h = \lambda_h^n + \rho(q_h - \langle \nabla \times A_h \rangle), \tag{3.6}$$

où $\langle f \rangle$ est une fonction constante par morceaux sur chaque prisme, la constante étant la valeur moyenne sur le prisme. La constante ρ est donnée. Les équations (3.5) (3.6) se résolvent sur chaque élément, il reste (3.4) qui est une équation de Poisson vérifiant les hypothèses du théorème 1. Pour résoudre (3.4) on calculera donc les vecteurs propres suivant la direction x_3 et on sera ramené à la résolution d'une équation de Poisson sur chaque tranche k :

$$\left. \begin{aligned} r \int_{\Omega} (\eta_1 \nabla A_{1h}^k, \nabla v_{1h}) dx_1 \\ + \int_{\Omega_1} \left(\frac{\gamma}{\Delta t} + \lambda_k \eta_1 A_{1h}^k, v_{1h} \right) dx_1 = \int_{\Omega_1} (g_h^k, v_h) dx_1, \\ A_{1h}^k \times n = 0, \end{aligned} \right\} \tag{3.7}$$

où g_h^k est obtenu par analyse de Fourier du deuxième membre de (3.4).

Pour des résultats numériques sur ce problème on renvoie à Marrocco [3].

3.3. Décompte des opérations

La situation typique étant $\Omega = \Omega_1 \times]0, Z[$, $m = 2$, $n = 1$, supposons que Ω_1 ait été triangulé avec N_1 nœuds et une largeur de bande μ_1 et $]0, Z[$ à N_2 nœuds. Alors Ω a $N_1 \times N_2$ nœuds et une largeur de bande de $N_1 + 1$. Comme en général (3.5) :

$$N_2 \ll N_1;$$

la matrice des coefficients des \tilde{w}_h est petite et leur temps de calcul est négligeable. La place mémoire est donc celle de N_2 matrices de rigidité des opérateurs a^k dans Ω_1 , c'est-à-dire

$$N_2 \times N_1 \times \mu_1,$$

qui doit être comparé avec

$$N_1 \times N_2 \times \mu,$$

c'est-à-dire le nombre de coefficients bande de la matrice de rigidité de largeur de bande μ de l'opérateur a dans Ω_2 . Dans le cas de l'exemple (3.1) on a donc divisé par $\mu/\mu_1 = 20$ la place mémoire nécessaire. Dans le cas de l'exemple (3.2) $\mu/\mu_1 = 24$.

Une fois la factorisation faite, une résolution d'un système linéaire de M inconnues par la méthode de Cholesky demande $2 M \mu$ divisions où μ est la

largeur de bande de la matrice Pour le gros système cela fait $2 N_1 \times N_2 \mu$ divisions et pour les N_2 petits systèmes cela fait $N_2 (2 N_1 \mu_1)$ Là encore on a un gain de N_1/μ_1 sur le temps calcul mais le calcul des $\{f_h^k\}$ peut être non négligeable puisqu'il faut faire une multiplication par la matrice inverse des b_{ij} sur chaque nœud, c'est-à-dire $(N_2)^2 N_1 \times N_2$ multiplications Sachant qu'une multiplication est 30 fois plus rapide qu'une division on obtient dans le cas de l'exemple (3 1) encore un gain de temps de 100

Résumons cette discussion dans la proposition suivante

CONCLUSION Si l'on doit résoudre le problème un grand nombre de fois par une méthode directe (Cholesky), et si le nombre de tranches est nettement plus petit que le nombre de nœuds dans chaque tranche, alors l'opération de découplage étudiée au paragraphe 2 divise les temps calculs et la place mémoire nécessaire par le rapport des largeurs de bande des matrices de l'opérateur initial et de l'opérateur découplé

REMERCIEMENTS

Ce travail a pu être réalisé grâce aux accords scientifiques franco-indiens

BIBLIOGRAPHIE

- 1 R SADOURNY, *These d'État*, Paris, 1972
- 2 P PERRIER, O PIRONNEAU, *Calcul des écoulements turbulents par les techniques de l'homogénéisation* C R Acad Sc t 286 serie A 1978 p 635 638
- 3 A A MARROCCO, *Calcul numérique d'un moteur lineaire* (à paraître)
- 4 P G CIARLET, *The Finite Element Method*, North-Holland, 1978
- 5 R GLOWINSKI, O PIRONNEAU, (à paraître)
- 6 O SHARMA, *A mixed spectral finite element solution of the Omega equation*, IUTAM Symposium on Monsoon dynamics, New Delhi, decembre 1977