RAIRO
ANALYSE NUMÉRIQUE

M. MIGNOTTE
M. PAYAFAR

Distance entre les racines d'un polynôme

RAIRO – Analyse numérique, tome 13, nº 2 (1979), p. 181-192.
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1979__13_2_181_0>

R A I R O Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol 13, n° 2, 1979, p 181 a 192)

DISTANCE ENTRE LES RACINES D'UN POLYNÔME (*)

par M. MIGNOTTE (1) et M. PAYAFAR (2)

Communiqué par P G CIARLET

Résumé — *Nous étudions des minorations de la distance entre des racines distinctes d'un polynôme à coefficients entiers Le cas des polynômes cubiques est étudié en détail Nous construisons aussi des polynômes irréductibles sur les entiers ayant deux racines « très proches »*

Abstract — *We study lower bounds of the distance between distinct root of an integer polynomial A detailed study of the case of cubic polynomials is made We also built irreductible polynomials over the integers with two "very closed" roots*

1. INTRODUCTION

La séparation des racines d'un polynôme constitue souvent le premier pas des algorithmes de calcul des racines de ce polynôme. Ce type de calcul intervient bien sûr dans certains problèmes d'Analyse Numérique, il apparaît aussi comme étape d'algorithmes de calcul formel et on sait l'importance croissante du Calcul Algébrique Symbolique. Des discussions plus détaillées sur ce sujet figurent en particulier dans les articles suivants [1, 2, 5]...

Nous considérerons ici surtout des polynômes à coefficients entiers. Ce sont ces polynômes qui interviennent dans les calculs symboliques. En outre, les calculs avec les ordinateurs digitaux sont le plus souvent effectués sur des nombres binaires de longueur bornée et peuvent être ramenés, par un changement d'unité, à des calculs sur les entiers.

Nous étudions des minorations de la distance minimale entre les racines distinctes d'un polynôme. Nous rappelons brièvement les résultats connus et de plus obtenons un certain nombre de minorations nouvelles.

(*) Reçu mai 1978
(1) Centre de Calcul, Université Louis-Pasteur, Strasbourg (France)
(2) Polytechnique de Téhéran, avenue Hafez, Téhéran (Iran)

2. NOTATIONS

Nous considérerons dans toute la suite un polynôme P de degre $d \geqq 2$ a coefficients complexes et de racines α_i,

$$P(X)=a_d X^d+\cdots+a_0=a_d(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_d), \qquad a_0 a_d \neq 0, \tag{1}$$

dont les racines sont numerotées de sorte que l'on ait

$$|\alpha_1| \geqq |\alpha_2| \geqq \cdots \geqq |\alpha_d|$$

La distance minimale entre deux racines distinctes de P est la quantité

$$\operatorname{sep}(P)=\min_{\alpha_i \neq \alpha_j} |\alpha_i-\alpha_j|,$$

avec par convention $\operatorname{sep}(P)=\infty$ si P ne possede pas deux racines distinctes La mesure $M(P)$ du polynôme P est définie par la relation

$$M(P)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}|P(e^{i\theta})|\,d\theta,$$

la formule de Jensen montre que

$$M(P)=|a_d|\prod_{i=1}^{d}\max\{1,|\alpha_i|\}$$

Le discriminant Δ du polynôme P vaut

$$\Delta=a_d^{2d-2}\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2,$$

si les a_i sont tous entiers alors Δ est aussi un entier

On posera enfin

$$\|P\|_2=\left(\sum_{i=0}^{d}|a_i|^2\right)^{1/2}$$

3. MAJORATION DE LA MESURE D'UN POLYNÔME

Le résultat suivant a été démontré récemment par W Lawton [4]

LEMME 1 — *Soit P un polynôme donné par la formule* (1) *Pour tout polynôme Q on pose*

$$\|Q\|=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|Q(e^{i\theta})P(e^{i\theta})|^2\,d\theta\right)^{1/2}$$

On a alors :

(i) $M(P)^2 = \inf_{Q,\, Q(0)=1} \|Q\|$;

(ii) $\inf_{Q,\, Q(0)=1,\, \deg(Q)=l} \|Q\| = g_{l+1}/g_l$;

où on a posé

$$g_l = \det(\varphi(i-j))_{1 \leqq i,\, j \leqq l}$$

et

$$\varphi(k) = \begin{cases} a_d \bar{a}_{d-k} + a_{d-1} \bar{a}_{d-k-1} + \ldots + a_k \bar{a}_0 & si \quad 0 \leqq k \leqq d, \\ 0 \quad si \quad k > d, \\ \varphi(-k) \quad si \quad k < 0. \end{cases}$$

On en déduit le résultat bien connu suivant :

COROLLAIRE 1. — *La mesure de P vérifie :*

$$M(P) \leqq \|P\|_2. \tag{2}$$

>On a $M(P) \leqq \|Q_0\|$ pour $Q_0(X)=1$. D'après la formule de Parseval $\|Q_0\| = \|P\|_2$.<

Ce corollaire peut être raffiné en appliquant la formule (ii) pour $l=1$. On obtient ainsi l'inégalité suivante, qui ne semble pas avoir mise en évidence auparavant.

COROLLAIRE 2. — *Si P est un polynôme donné par la formule* (1) *alors sa mesure vérifie :*

$$M(P)^2 \leqq \|P\|_2^2 - |a_d \bar{a}_{d-1} + a_{d-1} \bar{a}_{d-2} + \ldots + a_1 \bar{a}_0|^2. \tag{3}$$

4. MINORATIONS GÉNÉRALES DE $|\alpha_i - \alpha_j|$

Nous distinguerons plusieurs cas, en supposant toujours $i<j$. Rappelons que la numérotation choisie pour les racines de P est telle que l'on a $|\alpha_1| \geqq |\alpha_2| \geqq \ldots \geqq |\alpha_d|$.

a) Cas général

Majorons le discriminant Δ du polynôme P. On a

$$|\Delta| = \Big| a_d^{2d-2} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \prod_{\substack{1 \leqq k < k' \leqq d \\ k \neq i}} (\alpha_k - \alpha_{k'})^2 \prod_{\substack{k > i \\ k \neq j}} (\alpha_k - \alpha_i)^2 \Big|$$

$$\leqq |\alpha_i - \alpha_j|^2 |a_d|^{2d-2} \prod_{\substack{1 \leqq k < k' \leqq d \\ k \neq i}} (2|\alpha_k|)^2 \prod_{\substack{k > i \\ k \neq j}} (2|\alpha_i|)^2$$

$$= |\alpha_i-\alpha_j|^2 |a_d|^{2d-2} \Big(\prod_{1\leq k<d} (2|\alpha_k|)^{2(d-k)} \Big) (2|\alpha_j|)^{-2}$$

$$= |\alpha_i-\alpha_j|^2 |a_d|^{2d-2} 2^{d(d-1)-2}$$

$$\times |\alpha_1|^{2(d-1)} |\alpha_2|^{2(d-2)} \ldots |\alpha_{d-1}|^2 |\alpha_j|^{-2}.$$

Par conséquent,

$$|\alpha_i-\alpha_j| \geqq |\Delta|^{1/2} 2^{1-d(d-1)/2} |\alpha_j| \; |a_d|^{1-d} |\alpha_1|^{1-d} |\alpha_2|^{2-d} \ldots |\alpha_{d-1}|^{-1}, \qquad (4)$$

et en particulier

$$|\alpha_i-\alpha_j| \geqq |\Delta|^{1/2} 2^{1-d(d-1)/2} M(P)^{1-d}. \qquad (5)$$

Plus généralement, soit $\Omega \subset \{(i, j);\ 1 \leqq i < j \leqq d\}$ et soit $\Omega' = \{ j\,;\, (i, j) \in \Omega\}$ alors l'inégalité (4) peut être remplacée par

$$\prod_{(i\ j)\in\Omega} |\alpha_i-\alpha_j| \geqq |\Delta|^{1/2} 2^{k-d(d-1)/2} \prod_{j\in\Omega} |\alpha_j| . |a_d|^{1-d} |\alpha_1|^{1-d} \ldots |\alpha_{d-1}|^{-1}, \qquad (6)$$

où $k = \mathrm{Card}(\Omega)$.

Les majorations précédentes de $M(P)$ permettent d'obtenir des minorations de sep(P) qui s'expriment facilement en fonction des coefficients de P. C'est ainsi que des inégalités (2) et (5) on déduit la minoration

$$\mathrm{sep}(P) \geqq 2^{2-d(d-1)/2} |\Delta|^{1/2} \|P\|_2^{1-d}. \qquad (7)$$

REMARQUE 1. — Dans les formules précédentes la dépendance en fonction de d est assez médiocre puisque de la forme c^{-d^2}. On peut remplacer ce terme dans la formule (5) par d^{-cd} en procédant ainsi. Remarquons d'abord que le discriminant de P est aussi donné par la formule

$$\Delta = \pm a_d^{2d-2} (\det(\alpha_k^l)_{0<k\leqq d,\, 0\leqq l<d})^2.$$

Par une manipulation élémentaire du déterminant D qui figure au membre de droite et l'inégalité de Hadamard, on obtient facilement

$$|D| \leqq \left(\sum_{k=1}^{d-1} |\alpha_i^h - \alpha_j^h|^2 \right)^{1/2} \prod_{k\neq i} (1+|\alpha_k|^2 + \ldots + |\alpha_k|^{2d-2})^{1/2}$$

$$< |\alpha_i-\alpha_j| \, d^{(d+2)/2} \max\{1, |\alpha_i|\}^{-1} (M(P)/a_d)^{d-1}.$$

D'où la minoration

$$|\alpha_i-\alpha_j| > |\Delta|^{1/2} \max\{1, |\alpha_i|\} \, d^{-(d+2)/2} M(P)^{1-d}, \qquad (5\ bis)$$

qui implique

$$\operatorname{sep}(P) > d^{-(d+2)/2} |\Delta|^{1/2} \|P\|_2^{1-d},$$

inégalité qui peut être améliorée par le facteur multiplicatif $\sqrt{3}$ ([3], Th. 1).

Quoi qu'il en soit nous nous intéressons ici surtout à la dépendance en fonction de $M(P)$ et nous ne chercherons pas des formules raffinées en fonction de d.

Notons encore que dans le cas particulier (important) des polynômes à coefficients entiers sans facteurs multiples on a $|\Delta| \geqq 1$, ce qui simplifie les inégalités ci-dessus.

L'inégalité (6) va nous permettre d'améliorer l'inégalité (5) dans certains cas que nous examinons maintenant.

b) α_i et α_j non réels, $\alpha_j \neq \bar{\alpha}_i$, P à coefficients réels.

Appliquons (6) avec $\Omega = \{(i, j), (i', j')\}$ où $\alpha_{i'} = \bar{\alpha}_i$, $\alpha_{j'} = \bar{\alpha}_j$. Il vient

$$|\alpha_i - \alpha_j| \geqq |\Delta|^{1/4} 2^{1-d(d-1)/4} |\alpha_j| (|a_d|^{1-d} |\alpha_1|^{1-d} \dots |\alpha_{d-1}|^{-1})^{1/2}, \tag{8}$$

donc aussi

$$|\alpha_i - \alpha_j| \geqq |\Delta|^{1/4} 2^{1-d(d-1)/4} M(P)^{(1-d)/2}. \tag{9}$$

Les inégalités (5) et (9) figurent essentiellement dans l'article [3] de Güting. Par contre le cas suivant semble nouveau.

c) α_i réel, α_j non réel, P à coefficients réels.

Si $\alpha_{j'} = \bar{\alpha}_j$ on prend $\Omega = \{(i, j), (i, j'), (j, j')\}$ et on applique la formule (6), en remarquant que l'on a

$$|\alpha_j - \bar{\alpha}_j| \leqq 2 |\alpha_i - \alpha_j|,$$

d'où l'inégalité

$$|\alpha_i - \alpha_j| \geqq (|\Delta|^{1/2} 2^{2-d(d-1)/2} |\alpha_j|^3 |a_d|^{1-d} |\alpha_1|^{1-d} \dots |\alpha_{d-1}|^{-1})^{1/3}, \tag{10}$$

qui implique

$$|\alpha_i - \alpha_j| \geqq (|\Delta|^{1/2} 2^{2-d(d-1)/2} M(P)^{1-d})^{1/3}.$$

Remarquons que si α_j est réel et α_i non réel (et si les coefficients de P sont réels) la minoration (10) a encore lieu.

En résumé, nous obtenons le théorème suivant.

THEOREME 1. — *Soit P un polynôme de degré d à coefficients complexes, de discriminant Δ, de racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ avec $|\alpha_1| \geqq |\alpha_2| \geqq \dots \geqq |\alpha_d|$,*

$$P(X) = a_d X^d + \dots + a_0, \qquad d \geqq 2.$$

Alors on a l'inégalité

$$|\alpha_i-\alpha_j| \geqq |\Delta|^{1/2}\, 2^{1-d(d-1)/2}\, |\alpha_j| \,.\, |a_d|^{1-d}\, |\alpha_1|^{1-d}\, |\alpha_2|^{2-d} \ldots |\alpha_{d-1}|^{-1}.$$

De plus, lorsque P est à coefficients réels, si α_i et α_j sont des racines imaginaires de P non conjuguées on a

$$|\alpha_i-\alpha_j| \geqq |\Delta|^{1/4}\, 2^{1-d(d-1)/4}\, |\alpha_j| (|a_d|^{1-d}\, |\alpha_1|^{1-d}\, |\alpha_2|^{2-d} \ldots |\alpha_{d-1}|^{-1})^{1/2}$$

et si un des nombres α_i, α_j et un seul est réel alors :

$$|\alpha_i-\alpha_j| \geqq (|\Delta|^{1/2}\, 2^{2-d(d-1)/2}\, |\alpha_j|^3\, |a_d|^{1-d}\, |\alpha_1|^{1-d}\, |\alpha_2|^{2-d} \ldots |\alpha_{d-1}|^{-1})^{1/3}.$$

5. UTILISATION DE PROPRIÉTÉS GALOISIENNES

Supposons le polynôme P à coefficients entiers et irréductible sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels. Soit D le degré sur $\mathbf{Q}$ du corps $\mathbf{Q}(\alpha_i, \alpha_j)$, alors $d \leqq D \leqq d(d-1)$. Considérons le nombre

$$q = a_d^{2\delta} \prod_\sigma \sigma(\alpha_i - \alpha_j) \qquad \text{avec} \quad \delta = D/d,$$

où σ parcourt l'ensemble E des plongements du corps $\mathbf{Q}(\alpha_i, \alpha_j)$ dans $\mathbf{C}$. Le nombre q est un entier rationnel non nul, donc

$$1 \leqq |q| \leqq |\alpha_i - \alpha_j| \,.\, |a_d|^{2\delta} \prod_{\sigma \neq \mathrm{Id}} (|\sigma(\alpha_i)| + |\sigma(\alpha_j)|).$$

En utilisant le fait que pour chaque α_k la famille $(\sigma(\alpha_k))_{\sigma \in E}$ comporte chaque élément α_k répété exactement δ fois, on obtient :

$$1 \leqq |\alpha_i - \alpha_j| \,.\, |a_d|^{2\delta}\, 2^{D-1}\, |\alpha_1^{2\delta} \alpha_2^{2\delta} \ldots \alpha_{\delta-1}^{2\delta} \alpha_\delta^{\varepsilon\delta-1}|,$$

où

$$\delta' = [(\delta+1)/2] \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = 1 + 2\delta' - \delta \quad (=1 \text{ si } \delta \text{ est pair et } 2 \text{ sinon}).$$

D'où la minoration

$$|\alpha_i - \alpha_j| \geqq 2^{1-D}\, |a_d|^{-2\delta}\, |\alpha_1^{2\delta} \alpha_2^{2\delta} \ldots \alpha_{\delta'-1}^{2\delta} \alpha_\delta^{\varepsilon\delta-1}|^{-1} \tag{11}$$

qui implique

$$|\alpha_i - \alpha_j| \geqq 2^{1-D} M(P)^{-2\delta}. \tag{12}$$

D'où le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit P un polynôme à coefficients entiers irréductible sur $\mathbf{Q}$, de degré d et de mesure $M(P)$. Soient α_i et α_j deux racines distinctes de P et soit δ le degré du corps $\mathbf{Q}(\alpha_i, \alpha_j)$ sur le corps $\mathbf{Q}(\alpha_i)$ alors on a*

$$|\alpha_i - \alpha_j| \geqq 2^{1-d\delta} M(P)^{-2\delta}. \tag{12}$$

Remarquons que l'inégalité (5) jointe à la minoration $|\Delta| \geqq 1$ (justifiée par le fait que P est ici un polynôme irréductible à coefficients entiers) conduit à la relation

$$|\alpha_i - \alpha_j| \geqq 2^{1-d(d-1)/2}\, \mathrm{M}(\mathrm{P})^{1-d},$$

par conséquent la formule (12) est plus précise que cette dernière inégalité lorsque D vérifie $D < d(d-1)/2$, ce qui ne peut se produire que pour $d \geqq 4$.

6. APPLICATION DES RÉSULTATS PRECEDENTS AUX POLYNÔMES DE DEGRE 3

Nous avons choisi pour illustrer les résultats précédents le premier exemple non trivial, celui des polynômes de degre 3 à coefficients entiers sans racine multiple.

1. Soit donc $P = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ un polynôme de degré 3 a coefficients entiers de racines α_1, α_2, α_3 distinctes avec $|\alpha_1| \geqq |\alpha_2| \geqq |\alpha_3|$.

Supposons d'abord que P ne possede qu'une racine réelle. Appelons α la racine réelle et β, $\bar{\beta}$ les racines complexes conjuguees de P. Les inégalités (10) et (4) impliquent respectivement

$$|\alpha - \beta| \geqq (2M(P))^{-2/3} \tag{13}$$

et

$$|\beta - \bar{\beta}| \geqq |2a_3\alpha_1|^{-2} \geqq (2M(P))^{-2} \tag{14}$$

Passons maintenant au cas géneral. D'apres (4), nous avons alors :

$$|\alpha_i - \alpha_j| \geqq 2^{-2} a_3^{-2} |\alpha_1|^{-2} \qquad \text{pour} \quad i \neq j \tag{15}$$

Il est à noter que les inégalités (14) et (15) ne peuvent être améliorées qu'à une constante multiplicative près. En effet, la suite de polynômes

$$P_n(X) = (q_n X - p_n)(X^2 - 2),$$

où p_n/q_n est la n-ieme convergente du developpement en fraction continue de $\sqrt{2}$, verifie suivant la parité de n

$$|\alpha_1 - \alpha_i| \leqq 3\, q_n^{-2} \alpha_1^{-2} \qquad \text{pour} \quad i = 2 \text{ ou } 3$$

(puisque $|p_n/q_n - \sqrt{2}| < q_n^{-2}$ et que l'on a $p_n/q_n < \sqrt{2}$ ou $p_n/q_n > \sqrt{2}$ suivant la parité de n).

Mais les polynômes ainsi construits sont réductibles et le problème de l'optimalité de la relation (15) pour des polynômes irréductibles reste ouvert, ainsi que celui de l'optimalité des relations (13) et (14).

2 Considérons maintenant le cas particulier important ou P est un polynôme unitaire, autrement dit supposons $a_3=1$ On a alors d'après (4)

$$|\alpha_1-\alpha_2|\geqq 2^{-2}|\alpha_1|^{-2}$$

Supposons $|\alpha_1-\alpha_2|\leqq 1/5$, alors

$$|\alpha_1|^2<|\alpha_1|\left(|\alpha_2|+\frac{1}{4}\right)\leqq\frac{5}{4}|\alpha_1\alpha_2|\leqq\frac{5}{4}M(P)\quad(\text{puisque } |\alpha_1|\geqq 1),$$

donc

$$|\alpha_1-\alpha_2|>(5\,M(P))^{-1}, \tag{16}$$

inégalité encore vérifiee pour $|\alpha_1-\alpha_2|>1/5$

3 Un cas encore plus particulier est celui des polynômes cubiques unitaires et dont le second coefficient, a_2, est nul C'est aussi un cas important en pratique Supposons donc maintenant $a_3=1$ et $a_2=0$ La somme des racines de P est nulle Il en résulte que P ne peut avoir une seule racine de grand module Plus précisement, la relation

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$$

implique

$$|\alpha_1|\leqq 2|\alpha_2|$$

On en déduit la majoration

$$|\alpha_1|\leqq\sqrt{2\,M(P)}$$

qui, jointe a (15), fournit l'inegalite

$$|\alpha_i-\alpha_j|\geqq(8\,M(P))^{-1}\qquad\text{pour}\quad i\neq j \tag{17}$$

Résumons les resultats obtenus

THEOREME 3 — *Soit $P(X)=a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0$ un polynôme cubique à coefficients entiers de racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (avec $|\alpha_1|\geqq|\alpha_2|\geqq|\alpha_3|$) Alors on a toujours*

$$|\alpha_i-\alpha_j|\geqq(2a_3|\alpha_1|)^{-2}\qquad\textit{pour}\quad i\neq j$$

Si α_i est réelle et α_j ne l'est pas alors

$$|\alpha_i-\alpha_j|\geqq(2\,M(P))^{-2/3}$$

Lorsque P est unitaire α_1 et α_2 verifient

$$|\alpha_1-\alpha_2|>(5\,M(P))^{-1}$$

Enfin si $a_3=1$ et $a_2=0$, on a

$$\operatorname{sep}(P)\geqq(8\,M(P))^{-1}$$

7. ÉTUDE ASYMPTOTIQUE

Nous nous proposons d'étudier pour d fixé le comportement de sep (P) lorsque $\|P\|_2$ tend vers l'infini. Nous considèrerons plus précisément la quantité

$$\rho(P) := \frac{-\operatorname{Log}(\operatorname{sep}(P))}{\operatorname{Log}(\|P\|_2)},$$

P parcourant l'ensemble U_d des polynômes de degré d à coefficients entiers et sans racine multiple. Pour un tel polynôme, l'inégalité (7) nous apprend que l'on a

$$\rho(P) \leqq (d-1) + d^2 (\operatorname{Log}\|P\|_2)^{-1}.$$

Posons

$$L(d) = \lim_{P \in U_d} \sup_{\|P\|_2 \to \infty} \rho(P).$$

Cette fonction a déjà été étudiée en [5], où elle est définie par une formule légèrement différente. La majoration précédente de $\rho(P)$ montre que l'on a

$$L(d) \leqq d-1. \tag{18}$$

En utilisant des résultats de Wirsing et W. Schmidt, il a été démontré dans ce travail la minoration

$$L(d) \geqq [(d+1)/2]. \tag{19}$$

On a donc

$$L(2) = 1,$$
$$L(3) = 2.$$

La première de ces égalités est presque triviale, la seconde résoud un problème posé par Collins et Horowitz en [1]. Pour $d \geqq 4$ la valeur de $L(d)$ ne semble pas connue.

La démonstration de l'inégalité (19) qui figure en [5] est obtenue en construisant des polynômes réductibles ayant un facteur fixe Q de degré $[d/2]+1$ et un autre facteur dont une racine tend vers une racine donnée de Q. Cette remarque conduit à considérer la fonction

$$L^*(d) = \lim_{P \in U_d} \sup_{P \text{ irréductible}} \rho(P) \quad \text{quand } \|P\|_2 \to \infty.$$

Du fait de l'importance pratique des polynômes unitaires il est encore naturel de considérer les quantités

$$L_0(d) = \lim_{P \in U_d} \sup_{P \text{ unitaire}} \rho(P)$$

et

$$L_0^*(d)=\lim_{P\in U_d}\ \sup_{\substack{P \text{ unitaire} \\ \text{et irreductible}}}\ \rho(P)$$

Ces fonctions vérifient trivialement les inégalités

$$L_0^*(d)\leqq L^*(d)\leqq L(d)$$

et

$$L_0^*(d)\leqq L_0(d)\leqq L(d)$$

Il est facile de voir que l'on a

$$L^*(2)=1, \qquad L_0^*(2)=L_0(2)=0$$

Pour $d\geqq 3$ il semble que l'on ne connaît aucune des valeurs $L_0^*(d)$, $L_0(d)$ ou $L^*(d)$

Nous allons démontrer des minorations de $L_0^*(d)$

THEOREME 4 — *Pour $d\geqq 3$ on a*

$$L_0^*(d)\geqq 1/2 \tag{20}$$

et

$$L_0^*(d)\geqq d^{1/3}/15 \qquad \textit{pour} \quad d\geqq 24 \tag{21}$$

$>$ La démonstration de (20) est facile On considère la famille de polynômes

$$P_k(X)=X^d-(4k+2)X^2+2, \qquad k\to\infty,$$

le polynôme P_k a deux racines proches de $\pm(2k)^{-1/2}$ et le critère d'Eisenstein montre qu'il est irréductible

Le schéma de la démonstration de la minoration (21) est le suivant Soit $n=[(d/3)^{1/3}]$ et soit H un entier très grand D'après (19) on peut trouver un polynôme Q de degré n à coefficients entiers et qui vérifie $\rho(Q)\geqq n/2-1/(2n)$ et $\|Q\|_2\geqq H$ Pour $|x|>1$ et $|y|>1$ on a $|x^{-1}-y^{-1}|<|x-y|$, on peut donc supposer que Q a deux racines α et β avec $|\alpha|\leqq 1$ et $\operatorname{sep}(Q)=|\alpha-\beta|$ (si tel n'est pas le cas remplacer Q par son polynôme reciproque)

Soit $k=[\|Q\|_2^{1/n}]+1$ alors le polynôme $Q(kX)$ possède les racines $\alpha'=\alpha/k$ et $\beta'=\beta/k$ et on a

$$\max\{|\alpha'|,|\beta'|\}\leqq 2\|Q\|_2^{-1/n}, \tag{22}$$

$$2|\alpha'-\beta'|\leqq\|Q\|_2^{-n/2} \tag{23}$$

Soit p le plus petit nombre premier qui ne divise pas $Q(0)$, on pose

$$R(X)=pQ(kX), \qquad P(X)=X^d+R(X),$$

d'après le critère d'Eisenstein P est irréductible.

Il existe un disque centré au point $(\alpha'+\beta')/2$ et de rayon majoré par $|\alpha'-\beta'|$ qui contient α' et β' dans son intérieur et sur la frontière Γ duquel on a

$$|R(z)| \geqq c_1 \| R \|_2^{-n^2},$$

où c_1 est une quantité positive qui ne dépend que de d. D'autre part, (22) et (23) impliquent

$$|z^d| \leqq (3/k)^d \qquad \text{si} \quad z \in \Gamma.$$

Il est facile de démontrer la majoration

$$2 \| R \|_2 \leqq \| Q_2 \|^{5/2} \qquad \text{pour} \quad H \text{ assez grand.}$$

Des trois inégalités précédentes résulte que l'on a

$$|z^d| < |R(z)| \qquad \text{si} \quad z \in \Gamma \quad (\text{puisque } d \geqq 3n^2).$$

Le théorème de Rouché montre enfin qu'il existe au moins deux racines de P dans le disque de frontière Γ. On a donc

$$\text{sep}(P) \leqq 2|\alpha'-\beta'| \leqq \| P \|_2^{-n/5} \leqq \| P \|_2^{-d^{1/3}/15}.$$

D'où la seconde assertion. <

REMARQUE. — Nous n'avons fait aucun effort pour raffiner l'inégalité (21) car on peut penser qu'il existe une constante positive c telle que l'on ait

$$L_0^*(d) \geqq cd \qquad \text{pour} \quad d \geqq 3.$$

8. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Nous avons étudié le cas particulier des polynômes unitaires de degré 3 dont le second coefficient est nul. Soit :

$$P = X^3 - aX + b, \qquad b \neq 0,$$

un tel polynôme, son discriminant vaut

$$\Delta = 4a^3 + 27b^2,$$

nous le supposons non nul. La distance minimale entre deux racines d'un tel polynôme vérifie :

$$\text{sep}(P) \geqq |\Delta|^{1/2} (2|\alpha_1|)^{-2} \geqq |\Delta|^{1/2} (8M(P))^{-1}, \qquad (17\,bis)$$

où comme plus haut α_1, désigne une racine de P de module maximal.

On sait que, dans le cas considéré ici, $|\Delta|$ tend vers l'infini avec $|b|$, mais on ne sait pas démontrer l'inégalité

$$\underline{\lim} \frac{\operatorname{Log}|\Delta|}{\operatorname{Log}|b|} > 0.$$

Des calculs, effectués sur UNIVAC 1110, ont conduit au résultat suivant : pour $a \leqq 23 . 10^5$ on a

$$\varepsilon := \frac{\operatorname{Log}|\Delta|}{\operatorname{Log}|b|} > 1/2 \qquad \text{si} \quad \Delta \neq 0$$

sauf dans les cas qui figurent dans le tableau suivant :

a	b	ε	$\Delta = 27 b^2 - 4 a^3$
17 977	927 735	0,481	743
338 815	75 908 788	0,495	7 988
1 013 692	392 832 257	0,275	− 232
1 072 283	427 378 081	0,449	− 7 600
1 306 999	575 123 345	0,490	19 680
2 160 342	1 222 170 726	0,482	24 320

Notons pour conclure que l'on a l'encadrement

$$0 \leqq \lim_{P = X^3 - aX + b} \sup_{b\Delta(P) \neq 0} \rho(P) \leqq 1 - \operatorname{Lim} \inf \varepsilon(P).$$

BIBLIOGRAPHIE

1. G. E. Collins and E. Horowitz, *The Minimum Root Separation of a Polynomial*, Math Comp., vol. 28, n° 126, 1974, p. 589-597
2. G E Collins and R. Loos, *Polynomial Real Root Isolation by Differentiation*, Proceedings of the 1976 A.C.M. Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, R D. Jenks, éd., p 15-25.
3. R. Guting, *Polynomials with Multiple Zeroes*, Mathematika, vol 14, 1967, p. 181-196.
4. W. Lawton, *Heights of Algebraic Numbers and Szego's Theorem*, Proc American Math. Soc , vol. 49, 1975, p. 47-50
5. M. Mignotte, *Sur la complexité de certains algorithmes ou intervient la séparation des racines d'un polynôme*, R A.I.R.O. Informatique théorique, vol 10, 1976, p 51-55.