

RAIRO

ANALYSE NUMÉRIQUE

CATHERINE BOLLEY

Solutions numériques de problèmes de bifurcation

RAIRO – Analyse numérique, tome 14, n° 2 (1980), p. 127-147.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1980__14_2_127_0

© AFCET, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO – Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS NUMÉRIQUES DE PROBLÈMES DE BIFURCATION (*)

par Catherine BOLLEY ⁽¹⁾

Communiqué par P.-A. RAVIART

Résumé. — Dans cet article, on étudie numériquement, à l'aide d'un schéma obtenu par discrétisation en temps du problème d'évolution associé, un problème elliptique non linéaire qui entre dans le cadre des problèmes de bifurcation. Des résultats de convergence montrent que pour certaines valeurs du pas de discrétisation en temps, les solutions stables du problème elliptique sont encore stables pour le schéma, tandis que pour d'autres valeurs du pas, ce sont des solutions instables du problème elliptique qui deviennent stables pour le schéma. Des essais numériques en dimension un et deux complètent cette étude.

Abstract. — In this paper we investigate numerical analysis of a non linear elliptic problem which belongs to a class of bifurcation problems, by use of a time discretisation of the associated evolution equation. Results of convergence show that for some values of the step of time discretisation, stable solutions of the elliptic problem are still stable for the scheme, while for other values of the step, stable solutions of the scheme are instable solutions for the elliptic problem. Numerical calculations in dimension one and two complete this work.

I. LE PROBLÈME ABSTRAIT

Considérons le problème suivant :

$$(S) \begin{cases} \text{trouver } u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ vérifiant :} \\ Au - \lambda u + P(u) = 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné régulier connexe de \mathbb{R}^m avec $m \leq 3$; A est un opérateur elliptique à coefficients réels et constants de la forme

$$A = - \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

avec

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j \in \{1, \dots, m\},$$

(*) Reçu décembre 1978, révision reçue avril 1979.

(1) I.N.S.A., Laboratoire d'Analyse numérique, Rennes.

λ est un paramètre réel; P est une fonction numérique de classe $C^1(\mathbb{R})$, vérifiant $P(0)=P'(0)=0$, et telle que la fonction f définie par $f(x)=P(x)/x$ soit strictement croissante sur \mathbb{R}^+ , strictement décroissante sur \mathbb{R}^- , tendant vers $+\infty$ quand x tend vers $\pm\infty$.

Exemples :

$$P(x)=x\sqrt{|x|} \quad \text{ou} \quad P(x)=x|x|.$$

La fonction u identique à zéro est une solution évidente du problème (S); et toute autre solution appartient à $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

Nous savons d'autre part qu'il ne peut apparaître de branches de bifurcation issues d'un point $(u, \lambda)=(0, \lambda)$ que pour des valeurs de λ appartenant au spectre de l'opérateur A pour le problème de Dirichlet dans Ω .

Soit λ_0 la première valeur propre de A . Rappelons le résultat suivant :

PROPOSITION 1 : (i) le point $(0, \lambda_0)$ est un point de bifurcation pour le problème (S). Il lui correspond deux rameaux de bifurcation : l'un est associé à une solution strictement positive, l'autre à une solution strictement négative;

(ii) de plus, lorsque $\lambda \leq \lambda_0$, la solution identique à zéro est la seule solution de (S); et lorsque $\lambda > \lambda_0$: la solution strictement positive est la seule solution positive ou nulle, non identiquement nulle, tandis que la solution strictement négative est la seule solution négative ou nulle, non identiquement nulle.

Démonstration : (i) résulte de P. H. Rabinowitz [5];

(ii) pour tout $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, nous avons :

$$(Au - \lambda u + P(u), u)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)_{L^2(\Omega)} - \lambda |u|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} f(u) u^2 dx \geq (\lambda_0 - \lambda) |u|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Il en résulte que, lorsque $\lambda \leq \lambda_0$, la seule solution de (S) est la solution identique à zéro (cf. D. Sattinger [6]).

Lorsque $\lambda > \lambda_0$, nous utilisons le lemme suivant (suggéré par F. Mignot) :

LEMME 1 : Supposons $\lambda > \lambda_0$, et soient m et m' les constantes définies par

$$f(m) = f(m') = \lambda; \quad m > 0 \quad \text{et} \quad m' < 0,$$

alors toute solution u de (S) vérifie :

$$m' \leq u \leq m \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Démonstration du lemme 1 : Si u est une solution de (S), nous avons :

$$Au + uf(u) = \lambda u = f(m)u \quad \text{dans } \Omega,$$

donc

$$A(u-m) + u(f(u) - f(m)) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Posons

$$(u-m)^+ = \sup(u-m, 0), \quad (u-m)^- = \sup(-(u-m), 0),$$

alors :

$$(u-m)^+ \in H_0^1(\Omega), \quad (u-m)^- \in H^1(\Omega)$$

et

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (u-m)^+, \frac{\partial}{\partial x_j} (u-m)^- \right)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Par conséquent

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (u-m)^+, \frac{\partial}{\partial x_j} (u-m)^+ \right)_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} u(f(u) - f(m))(u-m)^+ dx = 0.$$

Ces deux quantités sont positives ou nulles et l'égalité ne peut avoir lieu que si $(u-m)^+ = 0$. Il en résulte que

$$u \leq m \quad \text{dans } \Omega.$$

On montrerait de même que $u \geq m'$ dans Ω .

Fin de la démonstration de la proposition 1 (ii) : 1° supposons $\lambda > \lambda_0$, et montrons qu'alors toute solution v positive ou nulle, non identiquement nulle est strictement positive.

Nous avons

$$Av = v(\lambda - f(v)) \quad \text{dans } \Omega,$$

avec $v \leq m$ et $f(m) = \lambda$ (d'après le lemme 1).

f étant croissante sur \mathbb{R}^+ , nous en déduisons que

$$Av \geq 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \text{avec } v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

v n'étant pas identiquement nulle dans Ω , il résulte du principe du maximum que v est strictement positive dans Ω .

2° soit v une solution positive de (S); v est majorée sur Ω par la constante positive m définie dans le lemme 1. La fonction ψ identique à m sur Ω est une sur-solution pour le problème (S).

Comme dans I. Stakgold-L. E. Payne [9], on considère la solution maximale de (S), \bar{u} , construite à partir de ψ et de la sous-solution identique à zéro. Nous avons

$$0 < v \leq \bar{u} \leq \psi \equiv m \quad \text{dans } \Omega,$$

avec

$$\bar{u}(Av - \lambda v + vf(v)) = 0 \quad \text{et} \quad v(A\bar{u} - \lambda\bar{u} + \bar{u}f(\bar{u})) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Par conséquent

$$\int_{\Omega} (f(\bar{u}) - f(v))v\bar{u} \, dx = 0,$$

\bar{u} et v étant strictement positives dans Ω et f étant strictement croissante sur \mathbb{R}^+ , il en résulte que \bar{u} et v coïncident sur $\bar{\Omega}$.

On montrerait de même que la solution strictement négative est la seule solution négative ou nulle, non identiquement nulle.

Si u_{λ} désigne la solution positive du problème (S) = (S $_{\lambda}$) pour la valeur $\lambda > \lambda_0$ du paramètre, u_{λ} est une sous-solution du problème (S $_{\lambda'}$) pour tout $\lambda' \geq \lambda$. Il en résulte que si x_0 est un point de Ω , l'application $\lambda \rightarrow u_{\lambda}(x_0)$ est croissante en λ sur $]\lambda_0, +\infty[$. On montrerait de même que l'application $\lambda \rightarrow u_{\lambda}(x_0)$ est décroissante en λ sur $]\lambda_0, +\infty[$ lorsque u_{λ} désigne la solution négative de (S).

Soit donc x_0 un point de Ω , nous pouvons représenter ces résultats par le schéma suivant :

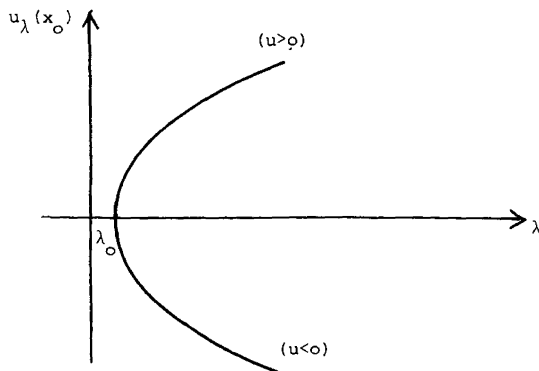


Figure 1

Précisons d'autres solutions du problème (S) dans certains cas particuliers :

1^{er} exemple :

$$\Omega =]0, a[, \quad A = -\Delta.$$

Toutes les valeurs propres λ_i , $i \in \mathbb{N}$, de A sont simples. Il résulte des travaux de Rabinowitz [4] qu'en chaque point $(u, \lambda) = (0, \lambda_i)$, $i \in \mathbb{N}$, vont apparaître deux rameaux de bifurcation.

Nous avons donc :

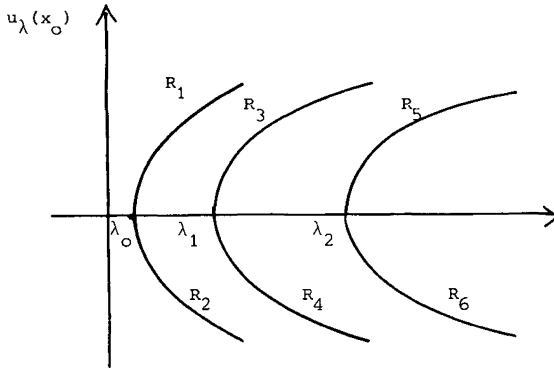


Figure 2

Les solutions des rameaux R_3 et R_4 changent une fois de signe sur Ω , les solutions des rameaux R_5 et R_6 changent deux fois de signe, etc.

2^e exemple :

$$\Omega =]0, a[\times]0, b[; \quad A = -\Delta; \quad f \text{ est supposée paire.}$$

Les solutions du problème (S) appartiennent encore à $C^{2, \alpha}(\bar{\Omega})$ pour $0 < \alpha < 1$; cf. P. Grisvard [2] ou la méthode des réflexions. Nous avons alors la :

PROPOSITION 2 : Si λ_i est une valeur propre de A de multiplicité p , il apparaît au point $(0, \lambda_i)$ au moins $2p$ rameaux de solutions du problème (S) dont les zéros sont invariants en λ .

REMARQUE 1 : Lorsque a/b est un rationnel, de la forme $a/b = i/j$, où i et $j \in \mathbb{N}^*$, nous sommes assurés de l'existence d'une valeur propre multiple de $-\Delta$. En effet : les valeurs propres de A étant égales à

$$\pi^2 \times \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right) \equiv \mu(l, k), \quad l, k \in \mathbb{N}^*,$$

nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$: $\mu(ni, mj) = \mu(mi, nj)$:

La démonstration de la proposition 2 donne l'allure des solutions bifurquées.

Si λ_i est une valeur propre de A de multiplicité p , il existe p couples distincts d'entiers (l_j, k_j) , $j = 1, \dots, p$ tels que $\mu(l_j, k_j) = \lambda_i$. Soit (l_j, k_j) l'un de ces couples. On décompose le rectangle Ω en $l_j \times k_j$ rectangles D de côtés a/l_j et b/k_j .

λ_i est alors égale à la valeur propre principale de $-\Delta$ dans chacun des rectangles D . En considérant le problème (S) dans D au lieu de Ω , il résulte de la proposition 1 que lorsque λ traverse λ_i , il apparaît une solution positive et une solution négative sur chacun des rectangles D .

Considérons la fonction u définie sur Ω de la façon suivante : u est égale sur chacun des rectangles D tantôt à la solution positive, tantôt à la solution négative, u changeant de signe sur deux rectangles D consécutifs. Par exemple : si $l_j=4, k_j=2$,

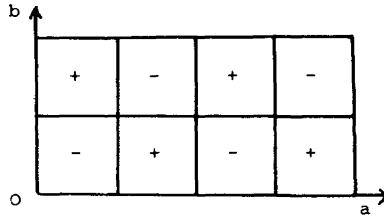


Figure 3

ou l'inverse.

On vérifie par des arguments de symétrie, que u appartient à $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et vérifie l'équation (S) dans Ω .

A un couple (l_j, k_j) distinct du précédent correspond un découpage différent de Ω , et donc deux solutions différentes.

Stabilité des solutions

La stabilité des solutions du problème (S) se définit à partir des solutions du problème d'évolution associé, c'est-à-dire :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + Au - \lambda u + P(u) = 0 \quad \text{dans }]0, \infty[\times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ u \in C^0([0, \infty[; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty[; L^2(\Omega)). \end{array} \right.$$

On vérifie la :

PROPOSITION 3 : Pour tout $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, il existe une et une seule solution bornée, notée $u(t)$, du problème (E).

cf. C. Bolley [1], par exemple.

DÉFINITION 1 : Une solution $u \equiv u(x)$ de (S) est dite L^p -stable ($p \geq 1$) si pour tout voisinage V de u dans $L^p(\Omega)$, il existe un voisinage W de u dans $L^p(\Omega)$ tel que, pour

tout u_0 dans $W \cap H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, il existe une solution $u(t)$ du problème (E) vérifiant $u(0) = u_0$ et telle que pour tout $t > 0$, on ait $u(t) \in V$.

Si u n'est pas L^p -stable, u est dite L^p -instable.

DÉFINITION 2 : Une solution u du problème stationnaire (S) est dite conditionnellement asymptotiquement L^p -stable relativement à un sous-ensemble K de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ si :

- (i) u est L^p -stable;
- (ii) pour tout $u_0 \in K$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - u) = 0 \quad \text{dans } L^p(\Omega)$$

[on dira inconditionnellement lorsque $K = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$].

Nous avons les résultats de stabilité suivants concernant les solutions positives ou nulles :

PROPOSITION 4 : (i) lorsque $\lambda < \lambda_0$ la solution identique à zéro est inconditionnellement asymptotiquement L^∞ -stable et L^2 -stable;

(ii) lorsque $\lambda = \lambda_0$ la solution zéro est inconditionnellement asymptotiquement L^2 -stable;

(iii) lorsque $\lambda > \lambda_0$ la solution zéro est L^2 -instable tandis que la solution positive est conditionnellement asymptotiquement L^∞ -stable relativement au sous-ensemble K des fonctions de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ minorées sur $\bar{\Omega}$ par une sous-solution non négative non nulle du problème (S).

Les autres solutions peuvent être stables ou instables.

Démonstration : (i) lorsque $\lambda < \lambda_0$: il résulte de Sattinger [8], qu'il existe des constantes $K > 0$ et $\sigma > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$:

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K e^{-\sigma t} \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)},$$

(ii) lorsque $\lambda = \lambda_0$:

En multipliant l'équation (E) par $u(t)$ et en intégrant par rapport à x dans Ω , nous avons

$$\left(u(t), \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{L^2(\Omega)} \leq 0,$$

car f est positive ou nulle sur \mathbb{R} et pour tout $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$:

$$(Av, v)_{L^2(\Omega)} \geq \lambda_0 |v|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Il en résulte que pour tout $t \geq 0$:

$$|u(t)|_{L^2(\Omega)} \leq |u_0|_{L^2(\Omega)}.$$

D'autre part, il existe une sur-solution ψ et une sous-solution φ de (S) telles que $\varphi \leq u_0 \leq \psi$; la seule solution de (S) étant zéro, il résulte de [7] que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega);$$

(iii) lorsque $\lambda > \lambda_0$:

pour montrer la L^∞ -stabilité ou la L^∞ -instabilité des solutions, on utilise le théorème de Lyapunov sur le principe de la stabilité linéarisée. Rappelons ce résultat dans le cadre du problème (S) :

THÉORÈME DE LYAPUNOV : Si u est une solution du problème (S) telle que les valeurs propres de l'opérateur linéaire $A - \lambda I + P'(u)I$ pour le problème de Dirichlet, soient strictement positives, alors u est L^∞ -stable.

Si par contre l'une des valeurs propres est négative, alors u est L^∞ -instable. cf. par exemple D. Sattinger [7].

Soit donc u la solution strictement positive de (S). Soit γ_0 la plus petite valeur propre de l'opérateur $A - \lambda I + P'(u)I$, et soit v_0 une fonction propre associée à γ_0 ; v_0 peut être choisie positive dans Ω . Nous avons donc

$$\begin{cases} A v_0 - \lambda v_0 + P'(u) v_0 = \gamma_0 v_0 & \text{dans } \Omega, \\ v_0 \in H_0^1(\Omega), & v_0 > 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Il en résulte, sachant que u est solution de (S), que

$$\gamma_0 \int_{\Omega} u v_0 dx = \int_{\Omega} [P'(u) - f(u)] u v_0 dx.$$

Les deux intégrales étant strictement positives, nous en déduisons que

$$\gamma_0 > 0,$$

et donc que la solution positive est L^∞ -stable.

Si u_0 appartient à K : il existe une sous-solution φ non identiquement nulle et une sur-solution ψ de (S) telles que

$$0 \leq \varphi \leq u_0 \leq \psi \quad \text{dans } \Omega.$$

La solution positive u étant la seule solution de (S) comprise entre φ et ψ , il en résulte (cf. [7]) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - u) = 0 \quad \text{dans } L^\infty(\Omega).$$

et donc que u est asymptotiquement L^∞ -stable.

L'opérateur linéaire associé à la solution zéro est $A - \lambda I$. Donc si $\lambda > \lambda_0$, l'une au moins des valeurs propres $\mu_n = \lambda_n - \lambda$ est négative.

L'instabilité de la solution zéro est en fait vérifiée dans $L^2(\Omega)$. Il suffit de revenir à la démonstration de [7].

II. CALCUL NUMÉRIQUE DES SOLUTIONS DE (S)

Nous nous intéressons maintenant au calcul numérique des solutions du problème (S), et plus précisément des solutions stables.

Nous construisons une suite (u_n) d'éléments de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ obtenue par discrétisation en temps du problème d'évolution (E). Le schéma est le suivant :

Étant donné $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, on construit

$$u_{n+1} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

tel que

$$(E_n) \quad \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} + A u_{n+1} - \lambda u_{n+1} + f(u_n) u_{n+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

ce qui s'écrit de manière équivalente :

$$(E_n) \quad A u_{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} - \lambda + f(u_n) \right) u_{n+1} = \frac{u_n}{\Delta t}.$$

Nous avons la :

PROPOSITION 5 : *Étant donné $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $\Delta t > 0$ tel que $\Delta t(\lambda - \lambda_0) < 1$, il existe une suite (u_n) et une seule d'éléments de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ solution des équations (E_n) .*

Pour montrer ceci, il suffit de vérifier que si $u_n \in L^\infty(\Omega)$ la forme bilinéaire a :

$$a(u, v) = \left(\left(\left(\frac{1}{\Delta t} - \lambda + f(u_n) \right) I \right) u, v \right)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i, j=1}^m a_{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L^2(\Omega)},$$

définie et continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, est coercive sur $H_0^1(\Omega)$ dès que $\Delta t(\lambda - \lambda_0) < 1$.

Du point de vue régularité, on peut montrer que cette suite appartient à

$$W^{2, p}(\Omega) \cap W_0^{1, p}(\Omega) \quad \text{pour } p \in]1, +\infty[\quad \text{et } n \geq 1,$$

et donc à $C^{1, \alpha}(\overline{\Omega})$ pour $\alpha \in]0, 1[$.

Sous les hypothèses supplémentaires : u_0 est une sous-solution ou une sur-solution, ou f est lipchitzienne dans un voisinage de zéro, nous avons des résultats de monotonie de la suite (u_n) (cf. [1]).

Le premier résultat de convergence est le suivant :

THÉORÈME 1 : (a) lorsque $\lambda \leq \lambda_0$: étant donnée $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, soient $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ une sous-solution de (S) et $\psi \in L^\infty(\Omega)$ une sur-solution de (S) telles que $\varphi \leq u_0 \leq \psi$ dans Ω . On pose

$$M = \sup_{x \in \Omega} \psi(x) \quad \text{et} \quad M' = \inf_{x \in \Omega} \varphi(x).$$

Soit $\Delta t > 0$ tel que

$$\Delta t \sup_{x, x' \in [M', M]} x \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \leq 1,$$

alors la suite (u_n) converge vers zéro dans $W^{2,p}(\Omega)$ pour $p \in]1, \infty[$;

(b) lorsque $\lambda > \lambda_0$: étant donnée $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ minorée par une sous-solution φ non négative non nulle de (S); soit ψ une sur-solution de (S) telle que $u_0 \leq \psi$ dans Ω . On pose $M = \sup_{x \in \Omega} \psi(x)$. Soit $\Delta t > 0$ tel que

$$\Delta t (\lambda - \lambda_0) < 1 \quad \text{et} \quad \Delta t \sup_{x, x' \in [0, M]} x \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \leq 1,$$

alors la suite (u_n) converge vers la solution positive de (S) dans $W^{2,p}(\Omega)$ pour $p \in]1, +\infty[$.

REMARQUE 2 : Dans chacun des cas la limite est la solution positive ou nulle qui est stable.

REMARQUE 3 : Il existe toujours une sous-solution et une sur-solution de (S) encadrant u_0 ; il suffit de prendre des constantes suffisamment grandes.

On montre tout d'abord :

LEMME 2 : Sous les hypothèses du théorème 1 (a) ou (b) : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi \leq u_n \leq \psi \quad \text{dans } \Omega.$$

La démonstration se fait par récurrence sur n . On considère par exemple :

$$A(u_{n+1} - \psi) + \left(\frac{1}{\Delta t} - \lambda + f(u_n) \right) (u_{n+1} - \psi) \leq (u_n - \psi) \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{f(\psi) - f(u_n)}{\psi - u_n} \psi \right),$$

avec

$$u_{n+1} - \psi \leq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

et

$$- \left(\frac{1}{\Delta t} - \lambda + f(u_n) \right) < \lambda_0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Il résulte du principe du maximum que si $u_n \leq \psi$ dans Ω , alors $u_{n+1} \leq \psi$ dans Ω .

LEMME 3 : *Sous les hypothèses du théorème 1 (a) ou (b), la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers zéro dans $L^p(\Omega)$ pour $p \in]1, \infty[$.*

La démonstration est assez technique.

On multiplie l'équation (E_n) par $(u_{n+1} - u_n)$ et on intègre sur Ω . Il vient en notant $|\cdot|$ et (\cdot, \cdot) la norme et le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} |u_{n+1} - u_n|^2 + \frac{1}{2} (A u_{n+1}, u_{n+1}) - \frac{1}{2} (A u_n, u_n) \\ + \frac{1}{2} (A (u_{n+1} - u_n), u_{n+1} - u_n) \\ - \frac{\lambda}{2} |u_{n+1}|^2 + \frac{\lambda}{2} |u_n|^2 - \frac{\lambda}{2} |u_{n+1} - u_n|^2 \\ + \int_{\Omega} f(u_n) u_{n+1} (u_{n+1} - u_n) dx = 0. \end{aligned}$$

Pour transformer la dernière intégrale on considère une primitive F de P définie sur \mathbb{R} par $F(v) = \int_0^v P(s) ds$, et la fonction G définie sur $L^2(\Omega)$ par

$$G(y) = F(y) - F(u_n) - f(u_n) y \cdot (y - u_n).$$

Il résulte de la relation suivante, valable pour tout x de Ω :

$$G(u_{n+1}(x)) = G(u_n(x)) + \int_{u_n(x)}^{u_{n+1}(x)} G'(t) dt;$$

que

$$\begin{aligned} f(u_n(x)) u_{n+1}(x) (u_{n+1}(x) - u_n(x)) \geq F(u_{n+1}(x)) - F(u_n(x)) \\ - \left[\sup_{y, y' \in [M', M]} \left(y \frac{f(y) - f(y')}{y - y'} \right) - f(u_n(x)) \right] \frac{(u_{n+1}(x) - u_n(x))^2}{2}. \end{aligned}$$

En revenant à l'équation et en sommant les inégalités obtenues pour $n=0, \dots, N$, nous obtenons :

$$\left[\left(\frac{1}{\Delta t} - (\lambda - \lambda_0) \right) + \left(\frac{1}{\Delta t} - \sup_{y, y' \in [M', M]} y \frac{f(y) - f(y')}{y - y'} \right) \right] \times \sum_{n=0}^N |u_{n+1} - u_n|^2 \leq K,$$

où K est une constante indépendante de N et de Δt .

Il en résulte que la série de terme général $|u_{n+1} - u_n|^2$ est convergente et donc que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers zéro dans $L^2(\Omega)$.

La suite (u_n) étant bornée dans $L^\infty(\Omega)$, la convergence de la suite $(u_{n+1} - u_n)$ a lieu dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \in]1, \infty[$.

Démonstration du théorème 1 : Soit $p \in]1, \infty[$.

D'après le lemme 2, la suite (u_n) est bornée dans $L^\infty(\Omega)$. En revenant à l'équation (E_n) on vérifie qu'elle est bornée dans $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. On peut donc en extraire une sous-suite $(u_{n_k})_k$ qui converge faiblement vers un u dans $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

Le lemme 3 permet de passer à la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, lorsque k tend vers l'infini, dans l'équation

$$(E_{n_k-1}) \quad \frac{u_{n_k} - u_{n_k-1}}{\Delta t} + A u_{n_k} - \lambda u_{n_k} + f(u_{n_k-1}) u_{n_k} = 0.$$

Il en résulte que u vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} Au - \lambda u + P(u) = 0, \\ \text{avec } u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega). \end{array} \right.$$

Par conséquent :

si $\lambda \leq \lambda_0$: u est identique à zéro;

si $\lambda > \lambda_0$: u étant minorée comme toute la suite (u_{n_k}) par la fonction positive φ , u est la solution strictement positive de (S) .

On vérifie ensuite aisément dans chacun des cas, que par unicité de la limite, toute la suite (u_n) converge et que la convergence a lieu dans $W^{2,p}(\Omega)$ (et donc dans $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$).

Si le problème (S) vérifie une hypothèse supplémentaire sur le nombre de ses solutions, nous avons :

THÉORÈME 2 : Soient $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ une sous-solution de (S) et $\psi \in L^\infty(\Omega)$ une sur-solution de (S) telles que $\varphi \leq u_0 \leq \psi$ dans Ω . Soit $\Delta t > 0$ tel que

$$\Delta t(\lambda - \lambda_0) < 1 \quad \text{et} \quad \Delta t \sup_{x, x' \in [M', M]} x \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \leq 1$$

$$[\text{où } M = \sup_{x \in \Omega} \psi(x) \quad \text{et} \quad M' = \inf_{x \in \Omega} \varphi(x)],$$

alors si le problème (S) a au plus un nombre fini de solutions comprises entre φ et ψ , la suite (u_n) converge dans $W^{2,p}(\Omega)$ pour $1 < p < +\infty$, vers une solution de (S) qui est comprise entre φ et ψ .

REMARQUE 4 : La limite de la suite (u_n) peut être ici une solution instable de (S) .

La démonstration du théorème 2 s'appuie sur le lemme suivant :

LEMME 4 : Soit (y_n) une suite appartenant à un espace métrique E et vérifiant :

- (i) de toute sous-suite de la suite (y_n) , on peut extraire une sous-suite convergente;
 - (ii) la suite (y_n) a un nombre fini de valeurs d'adhérence;
 - (iii) la suite $(d(y_{n+1}, y_n))$ tend vers zéro dans E lorsque $n \rightarrow \infty$,
- alors la suite (y_n) est convergente dans E .

La démonstration du lemme est immédiate.

Démonstration du théorème 2 : Elle reprend celle du théorème 1.

Les lemmes 2 et 3 restent valables sous les hypothèses ci-dessus. Il en résulte que de toute sous-suite extraite de la suite (u_n) on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers une solution de (S) . Cette solution étant bornée par φ et ψ , il résulte des hypothèses que la suite (u_n) a un nombre fini de valeurs d'adhérence.

Donc d'après le lemme 4, toute la suite (u_n) converge dans $L^2(\Omega)$ et sa limite u est une solution de (S) vérifiant : $\varphi \leq u \leq \psi$ dans Ω .

On vérifie ensuite aisément que la convergence a lieu dans $W^{2,p}(\Omega)$ pour $1 < p < +\infty$ (et donc dans $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$).

Nous avons un autre résultat de convergence vers les solutions L^∞ -stables :

THÉORÈME 3 : Soit u une solution du problème (S) telle que les valeurs propres de l'opérateur $A - \lambda I + P'(u)I$ défini de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, soient strictement positives; si $\Delta t > 0$ vérifie :

$$\Delta t(\lambda - \lambda_0) < 1 \quad \text{et} \quad \Delta t(P'(u) - f(u)) \leq 1 \quad \text{sur} \quad \overline{\Omega},$$

alors u est un point d'attraction dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ pour la méthode itérative définie par les équations (E_n) .

Remarque 5 : Il résulte du théorème de Lyapunov que u est une solution L^∞ -stable du problème (S) ; l'hypothèse faite sur u est vérifiée lorsque u est la solution positive ou la solution négative de (S) .

Pour montrer le théorème 3, on considère l'opérateur T défini de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans lui-même par

$$\forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad T(v) = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{\Delta t} I + A - \lambda I + f(v) I \right)^{-1} v,$$

dès que $\Delta t(\lambda - \lambda_0) < 1$.

L'équation (E_n) s'écrit alors :

$$u_{n+1} = T(u_n)$$

et u est un point fixe de T si et seulement si u est solution de (S) . On montre que T admet une dérivée de Fréchet $T'(u) \in \mathcal{L}(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, en tout point fixe u de T ; $T'(u)$ étant définie par

$$T'(u) = \left(A - \lambda I + \frac{1}{\Delta t} I + f(u)I \right)^{-1} \left(\frac{1}{\Delta t} I - P'(u)I + f(u)I \right).$$

De plus, sous les hypothèses du théorème 3, le rayon spectral $\rho(T'(u))$ est strictement inférieur à 1. En effet, soit μ une valeur propre non nulle de $T'(u)$. Il existe v non nul dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\left(A + \frac{1}{\Delta t} I - \lambda I + f(u)I \right)^{-1} \left(\frac{1}{\Delta t} I - P'(u)I + f(u)I \right) v = \mu v$$

donc tel que

$$(A - \lambda I + P'(u)I)v = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) \left(\frac{1}{\Delta t} I - P'(u)I + f(u)I \right) v.$$

Les valeurs propres de l'opérateur $(A - \lambda I + P'(u)I)$ étant strictement positives, il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$((A - \lambda I + P'(u)I)v, v)_{L^2(\Omega)} \geq \gamma |v|_{L^2(\Omega)}^2$$

et par conséquent

$$\left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\Delta t} - P'(u) + f(u) \right) v^2 dx \geq \gamma |v|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Il en résulte que

$$0 < \mu < 1,$$

or $T'(u)$ est un opérateur compact de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans lui-même, le point 1 ne peut pas être un point d'accumulation de son spectre, donc

$$\rho(T'(u)) < 1.$$

Il résulte alors du théorème d'Ostrowski (cf. Kitchen [3]) que u est un point d'attraction dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ pour la méthode itérative définie par les équations (E_n) , c'est-à-dire qu'il existe un voisinage S de u dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tel que si $u_0 \in S$, la suite (u_n) converge vers u dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Sous d'autres hypothèses sur Δt , on peut montrer que la suite (u_n) converge vers une solution L^∞ -instable de (S) . Plus précisément :

THÉORÈME 4 : Si λ n'est pas une valeur propre de A et si Δt vérifie :

$$\Delta t > \frac{2}{\lambda - \lambda_i} \quad (i \in \mathbb{N}) \quad \text{et} \quad \Delta t > \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))},$$

alors 0 est un point d'attraction dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ pour la méthode itérative définie par les équations (E_n) .

Remarque 5 : Nous ne sommes plus ici sous l'hypothèse $\Delta t(\lambda - \lambda_0) < 1$ qui assurerait existence et unicité de la suite (u_n) , mais l'hypothèse

$$\Delta t > \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))}$$

permet de choisir un voisinage V de 0 dans $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tel que si $v \in V$, l'opérateur

$$T(v) = \frac{1}{\Delta t} \left(A - \lambda I + \frac{1}{\Delta t} I + f(v)I \right)^{-1} v,$$

soit bien défini. En effet, λ n'étant pas une valeur propre de A , l'opérateur $A - \lambda I$ est un isomorphisme de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$. Si de plus

$$\left\| \left(\frac{1}{\Delta t} + f(v) \right) I \right\|_{\mathcal{L}(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))} < \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))},$$

l'opérateur $A - \lambda I + ((1/\Delta t) + f(v))I$ est aussi un isomorphisme de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$, or

$$\left\| \left(\frac{1}{\Delta t} + f(v) \right) I \right\|_{\mathcal{L}(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))} \leq \frac{1}{\Delta t} + \|f(v)\|_{L^\infty(\Omega)}$$

et donc si

$$\frac{1}{\Delta t} + \|f(v)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))},$$

l'opérateur T est bien défini. Nous prendrons donc pour V :

$$V = \left\{ v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \|f(v)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))}^{-1} - \frac{1}{\Delta t} \right\}.$$

La dérivée de Fréchet de T en 0 existe aussi, et nous avons

$$T'(0) = (\Delta t A - \lambda \Delta t I + I)^{-1},$$

c'est un opérateur compact de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans lui-même.

Si μ_i ($i \in \mathbb{N}$) sont ses valeurs propres, nous avons

$$\rho(T'(0)) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\mu_i| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{1 - \Delta t(\lambda - \lambda_i)} \right| < 1.$$

On applique ensuite le théorème d'Ostrowski.

III. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

(a) Le premier problème traité est le suivant :

$$\left. \begin{aligned} -u'' - \lambda u + u|u| &= 0 \text{ dans }]0, 1[, \\ u &\in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1). \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Le schéma donné par les équations (E_n) est obtenu par discrétisation en temps du problème d'évolution associé à (3.1). Nous utilisons ici de plus une méthode de différences finies pour la discrétisation en espace.

La condition initiale choisie pour le schéma est $u_0(x) = 20x(1-x)$ dans $[0, 1]$. Lorsque $\lambda > \lambda_0$, u_0 est minorée sur $[0, 1]$ par les sous-solutions positives de (3.1) définies par $\varphi(x) = c \sin \pi x$ où $c \in]0, \inf\{2; \sqrt{\lambda - \lambda_0}\}]$.

Nous faisons varier Δt pour différentes valeurs de λ .

Lorsque $\lambda = 0$ ($\lambda < \lambda_0 = \pi^2$) : la méthode converge vers la solution identique à zéro; la convergence est d'autant plus rapide que Δt est grand.

Si $\Delta t = 10$, u_{20} est de l'ordre de 10^{-40} .

Lorsque $\lambda > \lambda_0$, nous avons le tableau suivant :

λ	Δt	Comportement de la suite (u_n)
10	0,3	Convergence très lente vers la solution positive
	5	Convergence en 4 itérations vers la solution positive
	7	Convergence en 20 itérations vers la solution positive
	9	Instabilités
	15	Convergence vers zéro
40	0,01	Convergence très lente vers la solution positive
	0,03	Convergence en 7 itérations vers la solution positive
	0,04	Convergence en 9 itérations vers la solution négative
	0,07	Divergence
	0,5	Convergence vers zéro

Remarquons que lorsque $\lambda = 10$: $1/(\lambda - \lambda_0) \simeq 7$; et lorsque $\lambda = 40$: $1/(\lambda - \lambda_0) \simeq 0,03$

Les graphiques 4 et 5 donnent quelques itérés dans le cas où $\lambda = 10$, $\Delta t = 5$ et dans le cas où $\lambda = 40$, $\Delta t = 0,03$.

(b) Deuxième problème traité :

$$\left. \begin{aligned} -u'' - \lambda u + u\sqrt{|u|} &= 0 \text{ dans }]0, 1[, \\ u &\in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1). \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

La discrétisation en espace utilisée est la même que celle du 1^{er} problème.

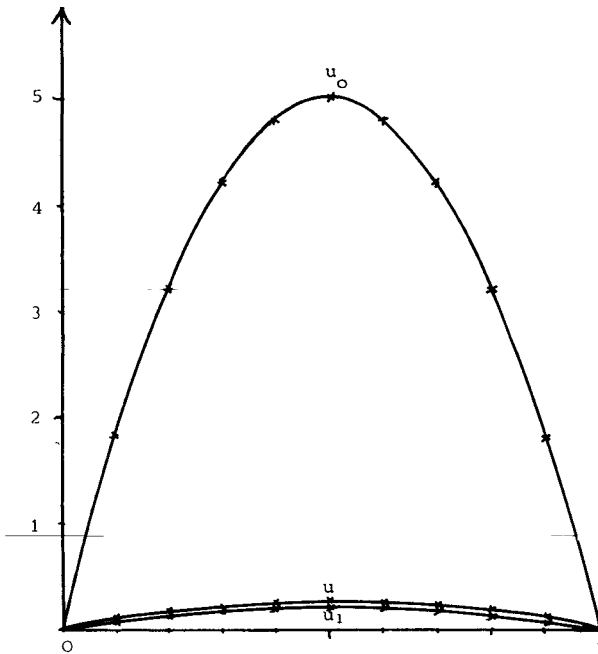


Figure 4. — Problème (3.1), quelques itérés lorsque $\lambda = 10$, $\Delta t = 5$.

Avec la même condition initiale u_0 , les résultats sont analogues aux précédents.

(c) *Recherche de solutions du problème (S) qui changent de signe dans Ω* : Nous savons que de telles solutions ne peuvent exister que pour $\lambda > \lambda_0$ et que les branches de bifurcation apparaissent aux points $(0, \lambda)$ où λ est une valeur propre de $-\Delta$. Nous avons étudié le problème (3.1) pour λ voisin de la 2^e puis de la 3^e valeur propre de $-\Delta$, soit $\lambda = 4\pi^2$ et $\lambda = 9\pi^2$.

Au point $(0, 4\pi^2)$ apparaît une solution \hat{u} négative sur $]0, 1/2[$, nulle en $1/2$, et positive sur $]1/2, 1[$; $-\hat{u}$ est aussi solution de (3.1); ce sont des solutions instables.

Lorsque $\lambda = 40$ et que u_0 change de signe au point 0,6, nous obtenons :

Δt	Comportement de la suite (u_n)
0,05... .	Convergence vers la solution positive
0,5... .	Convergence en 5 itérations vers la solution \hat{u}
1,5... .	Divergence
2,5... .	Convergence vers zéro

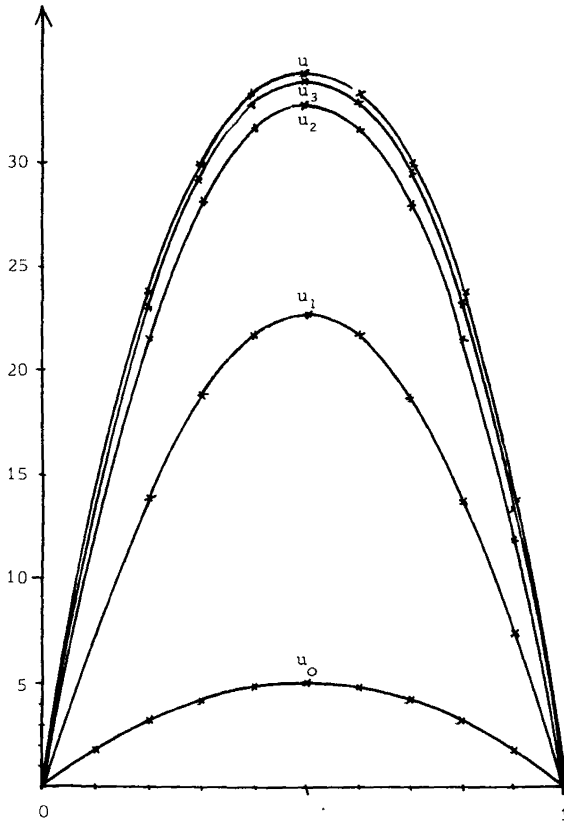


Figure 5. — Problème (3.1), quelques itérés lorsque $\lambda=40$, $\Delta t=0,03$.

Au point $(0,9\pi^2)$ apparaît une solution \tilde{u} qui est négative sur $]0, 1/3[$ et $]2/3, 1[$, positive sur $]1/3, 2/3[$ et nulle en $x=1/3$ et $x=2/3$.

Partant d'un u_0 qui change une fois de signe sur $]0, 1[$ s'annulant au point 0,6, nous avons lorsque $\lambda=90$ (cf. fig. 6).

$\Delta t=0,01\dots\dots$	Convergence vers la solution positive
$\Delta t=0,03\dots\dots$	Convergence vers \tilde{u}
$\Delta t=0,1\dots\dots$	Convergence vers \tilde{u}
$\Delta t=0,5\dots\dots$	Convergence vers zéro

(d) Exemple où l'opérateur A admet des valeurs propres multiples :
 Considérons le problème (3.1) dans un carré, c'est-à-dire :

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u - \lambda u + u|u| &= 0 \text{ dans } \Omega =]0, 1[\times]0, 1[\\ u &\in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

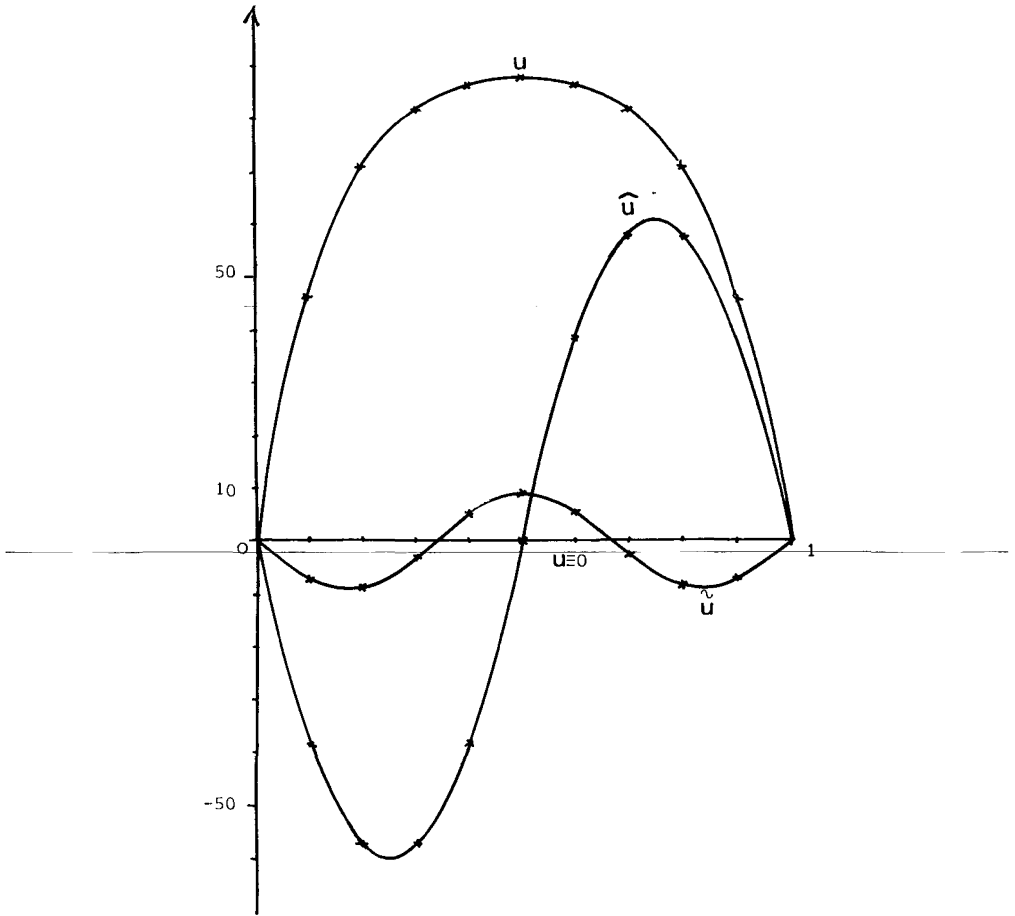


Figure 6. — Solutions calculées du problème (3.1) lorsque $\lambda = 90$.

La proposition 2 donne un certain nombre de solutions de ce problème. Au point $(0,2\pi^2)$ apparaissent une solution positive et une solution négative; au point $(0,5\pi^2)$ ($5\pi^2$ est une valeur propre double de $-\Delta$) apparaissent des solutions représentées par

$$\begin{matrix} 1 \\ \hline + & - \\ \hline 0 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} - & + \\ \hline \end{matrix}, \quad \begin{matrix} + \\ \hline - \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} - \\ \hline + \end{matrix}$$

au point $(0,8\pi^2)$ apparaissent les solutions

$$\begin{matrix} + & - \\ \hline - & + \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} - & + \\ \hline + & - \end{matrix}$$

et ainsi de suite...

Comme dans les exemples précédents, si u_0 est positif dans Ω , et si $\lambda > \lambda_0 = 2\pi^2$, la suite (u_n) converge vers la solution positive de (3.3) lorsque $\Delta t < 1/(\lambda - \lambda_0)$, et vers la solution zéro lorsque Δt est plus grand.

Si maintenant u_0 est négatif dans le carré $\Omega' =]0,3; 0,7[\times]0,3; 0,7[$, et positif dans $\Omega \setminus \Omega'$, nous avons les résultats suivants :

lorsque $\lambda = 80$

$\Delta t = 0,01 \dots \dots$	Convergence vers la solution positive	
$\Delta t = 0,04 \dots \dots$	Convergence vers la solution	$\begin{array}{ c } \hline + \\ \hline - \\ \hline \end{array}$
$\Delta t = 0,2 \dots \dots$	Convergence vers la solution	$\begin{array}{ c c } \hline + & - \\ \hline - & + \\ \hline \end{array}$
$\Delta t = 0,3 \dots \dots$	Convergence vers la solution	$\begin{array}{ c c } \hline - & + \\ \hline + & - \\ \hline \end{array}$
$\Delta t = 0,8 \dots \dots$	Convergence vers zéro	

lorsque $\lambda = 180$

$\Delta t = 0,005 \dots \dots$	Convergence vers la solution positive	
$\Delta t = 0,04 \dots \dots$	Convergence vers la solution	$\begin{array}{ c } \hline + \\ \hline - \\ \hline + \\ \hline - \\ \hline \end{array}$
$\Delta t = 0,1 \dots \dots$	Convergence vers la solution	$\begin{array}{ c c } \hline + & - & + \\ \hline - & + & - \\ \hline + & - & + \\ \hline \end{array}$
$\Delta t = 0,2 \dots \dots$	Convergence vers la solution	$\begin{array}{ c c c } \hline + & - & + & - \\ \hline - & + & - & + \\ \hline \end{array}$
$\Delta t = 0,5 \dots \dots$	Convergence vers zéro	

Je tiens à remercier F. Mignot pour les critiques et suggestions qu'il m'a apportées, ainsi que J.-P. Puel pour les discussions que nous avons eues sur ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. BOLLEY, *Étude numérique d'un problème de bifurcation*, Thèse de 3^e cycle, Rennes, 1977.
2. P. GRISVARD, *Behavior of the Solutions of an Elliptic Boundary Value Problem in a Polygonal or Polyhedral Domain*, Num. Sol. of Partial Diff. Eq. III, 1976.
3. J. KITCHEN, *Concerning the Convergence of Iterates to Fixed Points*, Studia Math., Vol. 27, 1966, p. 247-249.
4. P. H. RABINOWITZ, *On Bifurcation From Infinity*, J. of Diff. Eq., vol. 14, 1973, p. 462-475.
5. P. H. RABINOWITZ, *Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems*, J. Funct. Anal., vol. 7, 1971, p. 487-513.
6. D. SATTINGER, *Stability of Bifurcating Solutions by Leray-Schauder Degree*, Arch. R.M.A.-43, 1971, p. 154-166.
7. D. SATTINGER, *Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems*, Indiana Univ. Math. J., vol. 21, n° 11, 1972.
8. D. SATTINGER, *Topics in Stability and Bifurcation Theory*, Lecture Notes, n° 309, Springer-Verlag.
9. I. STAKGOLD et L. E. PAYNE, *Nonlinear Problems in Nuclear Reactor Analysis*, Lecture Notes, n° 322, Springer-Verlag.