

RAIRO

ANALYSE NUMÉRIQUE

PH. DESTUYNDER

Méthode d'éléments finis pour le modèle des plaques en flexion de Naghdi-Reissner

RAIRO – Analyse numérique, tome 15, n° 3 (1981), p. 201-230.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1981__15_3_201_0

© AFCET, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO – Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS POUR LE MODÈLE DES PLAQUES EN FLEXION DE NAGHDI-REISSNER (*)

par Ph. DESTUYNDER ⁽¹⁾

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — Nous définissons un schéma d'éléments finis pour le modèle des plaques en flexion de Naghdi-Reissner et nous en faisons l'étude asymptotique lorsque l'épaisseur tend vers zéro. Cela nous conduit à définir un schéma original pour l'opérateur biharmonique.

Abstract. — We define a finite element scheme for the Naghdi-Reissner model for plates in bending and we give an asymptotic analysis when the thickness tends to zero. As a consequence, we obtain a new scheme for the biharmonic operator.

1. INTRODUCTION

Nous considérons une plaque homogène isotrope, occupant dans l'espace \mathbb{R}^3 , le domaine Ω^ε où

$$\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[,$$

où $\bar{\omega}$ désigne la surface moyenne de cette plaque et 2ε son épaisseur supposée constante.

Dans un souci de simplification, nous ne considérons que des forces surfaciques normales, sur les forces supérieures et inférieures de la plaque, soit g_\pm^\pm . Posons :

$$\Gamma_\pm^\varepsilon = \omega \times \{ \pm \varepsilon \}$$

$$\Gamma_0^\varepsilon = \gamma \times]-\varepsilon, \varepsilon[$$

où γ désigne la frontière de ω .

(*) Reçu le 18 avril 1980.

(1) Centre de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique, Palaiseau, France.

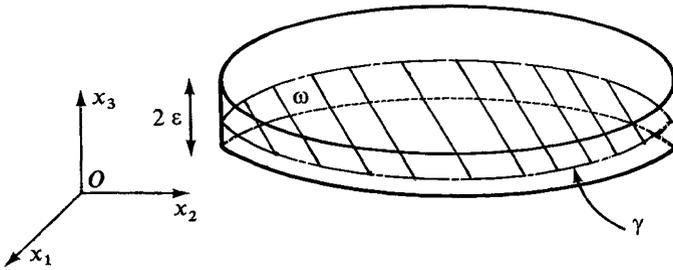


Figure 1.

Habituellement, on approche la solution du modèle tridimensionnel de l'élasticité linéaire de la façon suivante [1].

Le déplacement u_3 , suivant la direction dans l'épaisseur, est indépendant de la coordonnée x_3 , et est solution de l'équation suivante, où E et ν sont les coefficients de Young et de Poisson et où on pose

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 &= \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}; \\ \frac{2 E \varepsilon^3}{3(1 - \nu^2)} \Delta^2 u_3 &= g_3^+ + g_3^- \text{ sur } \omega, \\ u_3 &\in H_0^2(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Les déplacements horizontaux sont approchés par les expressions :

$$u_\alpha = -x_3 \partial_\alpha u_3, \alpha = 1, 2. \quad (2)$$

Enfin, les champs de contraintes sont approchés par les quantités :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{-E x_3}{1 - \nu^2} \{ (1 - \nu) \partial_{\alpha\beta} u_3 + \nu \Delta u_3 \delta_{\alpha\beta} \}, & \alpha, \beta = 1, 2, \\ \sigma_{\alpha 3} &= \frac{-E(\varepsilon^2 - x_3^2)}{2(1 - \nu^2)} \partial_\alpha \Delta u_3, & \alpha = 1, 2, \\ \sigma_{33} &= \frac{(g_3^+ + g_3^-)}{4} \frac{x_3(3\varepsilon^2 - x_3^2)}{\varepsilon^3} + \frac{g_3^+ - g_3^-}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

La résolution du système (1)-(2) se réduit donc à celle de l'opérateur biharmonique.

Dans [2], [3], nous avons estimé l'erreur dans l'approximation de la solution tridimensionnelle par celle du système (1)-(2)-(3).

De nombreux schémas numériques ont été proposés pour résoudre l'équation (1) : méthodes conformes [4], non conformes [5], hybrides et mixtes [6], [10], [11], [12]. Nous proposons ici une approche directe du modèle tridimensionnel par une méthode d'éléments finis prismatiques.

L'avantage est que nous considérons, dans ce cas, un problème d'ordre 2, alors que le problème (1) est d'ordre 4.

Partant du modèle élastique linéaire tridimensionnel, et grâce à la géométrie particulière (ouvert cylindrique), nous pouvons considérer séparément l'approximation en la coordonnée x_3 suivant l'épaisseur de la plaque, retrouvant ainsi le modèle bien connu de Naghdi-Reissner pour les plaques en flexion.

Ce modèle se formule ainsi :

Trouver $(u_\alpha, u_3) \in (H_0^1(\omega))^3$ tel que

$$\sum_{\beta=1,2} -\frac{2\varepsilon^2}{3} \partial_\beta \left\{ \gamma_{\alpha\beta}(u) + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma_{\mu\mu}(u) \delta_{\alpha\beta} \right\} + \partial_\alpha u_3 + u_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$-\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\Delta u_3 + \sum_{\alpha=1,2} \partial_\alpha u_\alpha \right) = \varepsilon^{-1}(g_3^+ + g_3^-). \tag{4}$$

Nous montrerons que ce modèle admet une solution unique et que, lorsque ε tend vers zéro, cette solution tend vers celle des équations (1)-(2). Nous donnons une estimation de la vitesse de convergence avec ε qui montre que pour ε petit, la solution du problème (4) est une bonne approximation de celle des équations (1)-(2).

Nous étudions ensuite l'approximation numérique du problème (4), tout d'abord pour des « plaques épaisses ». Dans ce cas, on peut choisir, pour résoudre (4), des éléments finis de taille ε , et on montre que les résultats sont théoriquement satisfaisants.

A ce stade, des méthodes de calcul similaires ont été proposées par différents auteurs [7], [8], [9]. Notre contribution se limite à l'obtention d'estimations d'erreur.

Dans le cas des plaques très minces, il devient impossible de choisir, pour résoudre (4), un maillage de l'ordre de ε , et les méthodes précédentes deviennent inopérantes à cause d'un mauvais conditionnement du système discrétisé. Celui-ci s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$(K_0 + \varepsilon^2 K_2) a = \varepsilon^{-1} G, \tag{5}$$

où a est le vecteur des inconnues.

Nous proposons alors un schéma original pour lequel le noyau de la matrice K_0 est connu explicitement (nullité de certains degrés de liberté, K_0 et K_2 désignant deux matrices symétriques).

Cherchant ensuite une solution de (5) sous la forme

$$a = \varepsilon^{-3} a_{-3} + \varepsilon^{-1} a_{-1} + \dots \text{etc.}, \tag{6}$$

nous obtenons, en reportant (6) dans (5) et en identifiant les termes de même puissance en ε :

$$K_0 a_{-3} = 0, \tag{7}$$

$$K_0 a_{-1} + K_2 a_{-3} = G, \text{ etc...} \tag{8}$$

L'équation (7) indique que

$$a_{-3} \in \text{Ker}(K_0). \tag{9}$$

L'équation (8) conduit à

$$\forall b \in \text{Ker}(K_0), (K_2 a_{-3}, b) = (G, b). \tag{10}$$

On montre alors que a_{-3} est parfaitement déterminé par (10) et que $\varepsilon^{-3} a_{-3}$ est une bonne approximation (en erreur relative) de a pour ε petit.

La matrice du système linéaire (10) s'obtient à partir de K_2 en éliminant les lignes et les colonnes correspondant aux degrés de liberté de $\text{Ker}(K_0)$.

Dans la suite, les indices latins varient de 1 à 3, et les indices grecs, de 1 à 2. Nous utilisons, en outre, la convention de sommation sur les indices répétés.

2. LE PROBLÈME SEMI-APPROCHÉ

Introduisons, tout d'abord, le problème tridimensionnel des plaques élastiques linéaires, à l'aide du principe d'Hellinger-Reissner.

Soit les espaces

$$\left. \begin{aligned} \underline{\Sigma}^\varepsilon &= \{ \tau = (\tau_{ij}) \in L^2(\Omega^\varepsilon)^9, \tau_{ij} = \tau_{ji} \}, \\ \underline{V}^\varepsilon &= \{ v = (v_i) \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3, v_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \} \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

et les formes bilinéaires et linéaires, définies pour des éléments σ, τ, v , arbitraires dans les espaces $\underline{\Sigma}^\varepsilon$ et $\underline{V}^\varepsilon$,

$$\left. \begin{aligned} a(\sigma, \tau) &= \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{pp} \delta_{ij} \right) \tau_{ij}, \\ B(\tau, u) &= - \int_{\Omega^\varepsilon} \tau_{ij} \partial_i u_j, \\ F(v) &= - \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_3^\pm v_3. \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

Le principe d'Hellinger-Reissner consiste à

$$\left. \begin{aligned} & \text{Trouver } (\sigma, u) \in \underline{\Sigma}^\varepsilon \times \underline{V}^\varepsilon \text{ tel que} \\ & \forall \tau \in \underline{\Sigma}^\varepsilon, a(\sigma, \tau) + B(\tau, u) = 0, \\ & \forall v \in \underline{V}^\varepsilon, B(\sigma, v) = F(v). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

L'existence et l'unicité d'une solution du système (14) est une conséquence classique de l'inégalité de Korn [13].

Définissons les espaces d'approximation suivants :

$$\left. \begin{aligned} \underline{\Sigma}^{(1)} &= \{ \tau_{\alpha\beta}^{(1)} = x_3 \tau_{\alpha\beta}(x_1, x_2), \tau_{\alpha 3}^{(1)} = \tau_{\alpha 3}(x_1, x_2), \tau_{33}^{(1)} = 0, \\ & \qquad \qquad \qquad \tau_{\alpha\beta}, \tau_{\alpha 3} \in L^2(\omega), \tau_{12} = \tau_{21} \}, \\ \underline{V}^{(1)} &= \{ v_\alpha^{(1)} = x_3 v_\alpha(x_1, x_2), v_3^{(1)} = v_3(x_1, x_2), \text{ où } v_\alpha, v_3 \in H_0^1(\omega) \}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Le problème *semi-approché* consiste à

$$\left. \begin{aligned} & \text{Trouver } (\sigma^{(1)}, u^{(1)}) \in \underline{\Sigma}^{(1)} \times \underline{V}^{(1)} \text{ tel que} \\ & \forall \tau \in \underline{\Sigma}^{(1)}, a(\sigma^{(1)}, \tau) + B(\tau, u^{(1)}) = 0, \\ & \forall v \in \underline{V}^{(1)}, B(\sigma^{(1)}, v) = F(v). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Un simple calcul nous conduit au résultat suivant :

THÉORÈME 1 : *Si $(\sigma^{(1)}, u^{(1)})$ désigne une éventuelle solution de (16) et si nous posons*

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(1)} = x_3 \sigma_{\alpha\beta}; \sigma_{\alpha 3}^{(1)} = \sigma_{\alpha 3}; \sigma_{33}^{(1)} = 0; u_\alpha^{(1)} = x_3 u_\alpha; u_3^{(1)} = u_3;$$

alors l'élément $(\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha 3}, u_\alpha, u_3)$ de l'espace

$$(L^2(\omega))_s^4 \times (L^2(\omega))^2 \times (H^1(\omega))^2 \times H_0^1(\omega)$$

est l'unique solution du système d'équations variationnelles suivantes :

$$\forall \tau_{\alpha\beta} \in (L^2(\omega))_s^4, \frac{\varepsilon^2}{3} \int_\omega \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\mu\mu} \delta_{\alpha\beta} \right) \tau_{\alpha\beta} - \frac{\varepsilon^2}{3} \int_\omega \tau_{\alpha\beta} \partial_\alpha u_\beta = 0, \quad (17)$$

$$\forall \tau_{\alpha 3} \in (L^2(\omega))^4, \int_\omega \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{\alpha 3} \tau_{\alpha 3} - \int_\omega \tau_{\alpha 3} (\partial_\alpha u_3 + u_\alpha) = 0, \quad (18)$$

$$\forall v_\alpha \in (H_0^1(\omega))^2, \frac{\varepsilon^2}{3} \int_\omega \sigma_{\alpha\beta} \partial_\alpha v_\beta + \int_\omega \sigma_{\alpha 3} v_\alpha = 0, \quad (19)$$

$$\forall v_3 \in H_0^1(\omega), \int_\omega \sigma_{\alpha 3} \partial_\alpha v_3 = \varepsilon^{-1} \int_\omega \left(\frac{g_3^+ + g_3^-}{2} \right) v_3, \quad (20)$$

(nous avons posé

$$(L^2(\omega))_s^4 = \{ (\tau_{\alpha\beta}) \in (L^2(\omega))^4, \tau_{12} = \tau_{21} \}. \quad \blacksquare$$

Démonstration : L'obtention des équations (17), (18), (19) et (20) résulte d'un simple calcul. L'équation (17) conduit à

$$\frac{1+\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\mu\mu} \delta_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(u) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha),$$

soit, en inversant cette relation de comportement

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} \{ (1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(u) + \nu \gamma_{\mu\mu}(u) \delta_{\alpha\beta} \}. \quad (21)$$

L'équation (18) s'écrit encore

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\partial_\alpha u_3 + u_\alpha), \quad (22)$$

et en reportant (21)-(22) dans (19)-(20), nous obtenons que (u_α, u_3) , élément de l'espace $(H_0^1(\omega))^3$, doit être solution du système variationnel suivant :

$$\left. \begin{aligned} \forall v_\alpha \in (H_0^1(\omega))^2, \frac{\varepsilon^2}{3} \int_\omega \frac{E}{1-\nu^2} \{ (1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(u) + \nu \gamma_{\mu\mu}(u) \delta_{\alpha\beta} \} \gamma_{\alpha\beta}(v) + \\ + \int_\omega \frac{E}{2(1+\nu)} (\partial_\alpha u_3 + u_\alpha) v_\alpha = 0, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\forall v_3 \in H_0^1(\omega), \int_\omega \frac{E}{2(1+\nu)} (\partial_\alpha u_3 + u_\alpha) \partial_\alpha v_3 = \varepsilon^{-1} \int_\omega \left(\frac{g_3^+ + g_3^-}{2} \right) v_3. \quad (24)$$

Posons alors

$$U = (u_\alpha, u_3), V = (v_\alpha, v_3), \text{ éléments de l'espace } (H^1(\omega))^3,$$

et

$$\left. \begin{aligned} a(U, V) = \frac{\varepsilon^2}{3} \int_\omega \frac{E}{1-\nu^2} \{ (1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(u) + \nu \gamma_{\mu\mu}(u) \delta_{\alpha\beta} \} \gamma_{\alpha\beta}(v) + \\ + \int_\omega \frac{E}{2(1+\nu)} (\partial_\alpha u_3 + u_\alpha) (\partial_\alpha v_3 + v_\alpha), \\ F(V) = \varepsilon^{-1} \int_\omega \left(\frac{g_3^+ + g_3^-}{2} \right) v_3. \end{aligned} \right\}$$

Nous avons

$$a(U, U) \geq c \left\{ \varepsilon^2 \sum_{\alpha, \beta} \| \gamma_{\alpha\beta}(u) \|_{L^2(\omega)}^2 + \sum_{\alpha} \| \partial_{\alpha} u_3 + u_{\alpha} \|_{L^2(\omega)}^2 \right\},$$

et d'après l'inégalité de Korn bidimensionnelle [13] :

$$a(U, U) \geq c \left\{ \varepsilon^2 \sum_{\alpha=1,2} \| u_{\alpha} \|_{(H_0^1(\omega))_2}^2 + \| u_3 \|_{H_0^1(\omega)}^2 \right\}.$$

En appliquant le lemme de Lax-Milgram, on en déduit que l'équation

$$\forall V \in (H_0^1(\omega))^3, a(U, V) = F(V), \tag{25}$$

admet une solution unique U dans l'espace $(H_0^1(\omega))^3$. Or l'équation (25) est équivalente au système (23)-(24). Le théorème 1 est donc démontré. Le modèle (23)-(24) est connu sous le nom de « modèle de Naghdi ou de Reissner pour les plaques en flexion ». ■

3. DÉGÉNÉRESCENCE DU PROBLÈME SEMI-APPROCHÉ

Dans ce paragraphe, nous poserons, pour des éléments arbitraires $\sigma, \tau, u,$

$$\left. \begin{aligned} a_0(\sigma, \tau) &= \int_{\omega} \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_{\alpha 3} \tau_{\alpha 3}, \\ a_2(\sigma, \tau) &= \frac{1}{3} \int_{\omega} \left(\frac{1 + \nu}{E} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\mu\mu} \delta_{\alpha\beta} \right) \tau_{\alpha\beta}, \\ b_0(\tau, v) &= - \int_{\omega} (\partial_{\alpha} v_3 + v_{\alpha}) \tau_{\alpha 3}, \\ b_2(\tau, v) &= - \frac{1}{3} \int_{\omega} \tau_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} v_{\beta}, \\ F_{-1}(v) &= - \int_{\omega} \left(\frac{g_3^+ + g_3^-}{2} \right) v_3. \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

Le problème (17)-(20) s'écrit donc sous forme condensée :

$$\left. \begin{aligned} &\text{Trouver } (\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha 3}, u_i) \text{ dans l'espace } (L^2(\omega))_s^4 \times (L^2(\omega))^2 \times (H_0^1(\omega))^3 \text{ tel que} \\ &\forall \tau \in (L^2(\omega))_s^4 \times (L^2(\omega))^2, a_0(\sigma, \tau) + b_0(\tau, u) + \varepsilon^2 \{ a_2(\sigma, \tau) + b_2(\tau, u) \} = 0, \\ &\forall v \in (H_0^1(\omega))^3, b_0(\sigma, v) + \varepsilon^2 b_2(\sigma, v) = \varepsilon^{-1} F_{-1}(v). \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

Remarque 2 : Si nous posons $\varepsilon = 0$ dans les équations (27) avec second membre homogène, nous obtenons

$$\left. \begin{aligned} \forall \tau \in (L^2(\omega))_s^4 \times (L^2(\omega))^2, a_0(\sigma, \tau) + b_0(\tau, u) = 0, \\ \forall v \in (H_0^1(\omega))^3, b_0(\tau, v) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Or les équations (28) admettent une famille de solutions (σ, u) non triviales ; on vérifie directement que dans l'espace $(L^2(\omega))_s^4 \times (L^2(\omega))^2 \times (H_0^1(\omega))^3$, l'ensemble de ces solutions est

$$N_0 = \Lambda_0 \times V_0, \quad (29)$$

avec

$$\Lambda_0 = \left\{ \sigma = (\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha 3}) \mid \sigma_{\alpha\beta} \in (L^2(\omega))_s^4, \sigma_{\alpha 3} = 0 \right\}, \quad (30)$$

$$V_0 = \left\{ u = (u_\alpha, u_3) \mid u_\alpha = -\partial_\alpha u_3, u_3 \in H_0^2(\omega) \right\}. \quad (31)$$

Nous avons alors le

THÉORÈME 2 : *Le problème suivant :*

$$\left. \begin{aligned} \text{Trouver } (\sigma, u) \text{ élément de l'espace } N_0 \text{ tel que} \\ \forall \tau \in \Lambda_0, a_2(\sigma, \tau) + b_2(\tau, u) = X(\tau), \\ \forall v \in V_0, b_2(\sigma, v) = F(v), \end{aligned} \right\}$$

admet une solution unique si X (resp. F) est une forme linéaire continue sur Λ_0 (resp. V_0). ■

Démonstration : Nous avons d'abord

$$\forall \sigma \in \Lambda_0, a_2(\sigma, \sigma) = a_2(\sigma, \sigma) + a_0(\sigma, \sigma) \geq \alpha \|\sigma\|_{(L^2(\omega))_s^4 \times (L^2(\omega))^2}^2,$$

puis

$$\left. \begin{aligned} \forall v \in V_0, \sup_{\tau \in \Lambda_0} \frac{b_2(\tau, v)}{\|\tau\|_{(L^2(\omega))_s^4}} &\geq \sup_{\tau \in (L^2(\omega))_s^4 \times (L^2(\omega))^2} \frac{b_2(\tau, v) + b_0(\tau, v)}{\|\tau\|_{(L^2(\omega))_s^4 \times (L^2(\omega))^2}} \\ &\geq c \sum_{\alpha, \beta=1,2} \|\gamma_{\alpha\beta}(v)\|_{0,\omega} + \sum_{\alpha=1,2} \|v_\alpha + \partial_\alpha v_3\|_{0,\omega} \\ &\geq \sum_{\alpha=1,2} \|v_\alpha\|_{1,\omega} + \|v_3\|_{1,\omega}. \end{aligned} \right\}$$

Le théorème 2 résulte alors de celui de Brezzi [18]. ■

Nous posons alors a priori un développement formel de la solution (σ, u) du problème (27) :

$$(\sigma, u) = \varepsilon^{-3}(\sigma^{-3}, u^{-3}) + \varepsilon^{-1}(\sigma^{-1}, u^{-1}) + \dots \quad (32)$$

En reportant l'expression (32) dans (27) et en identifiant les termes de même puissance en ε , nous obtenons successivement, pour des éléments τ et v arbitraires,

$$\left. \begin{aligned} a_0(\sigma^{-3}, \tau) + b_0(\tau, u^{-3}) &= 0, \\ b_0(\sigma^{-3}, v) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0(\sigma^{-1}, \tau) + b_0(\tau, u^{-1}) + a_2(\sigma^{-3}, \tau) + b_2(\tau, u^{-3}) &= 0, \\ b_0(\sigma^{-1}, v) + b_2(\sigma^{-3}, v) &= F_{-1}(v); \text{ etc. .} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Les différents termes du développement (32) sont *apparemment* dépendants les uns des autres. On les calcule de la façon suivante : l'équation (33) conduit à choisir

$$\sigma^{-3} \in \Lambda_0, u^{-3} \in V_0. \quad (35)$$

Nous avons alors le

THÉORÈME 3 : *Le terme (σ^{-3}, u^{-3}) est l'unique solution du système suivant :*

$$\left. \begin{aligned} (\sigma^{-3}, u^{-3}) &\in \Lambda_0 \times V_0, \\ \forall \tau \in \Lambda_0, a_2(\sigma^{-3}, \tau) + b_2(\tau, u^{-3}) &= 0, \\ \forall v \in V_0, b_2(\sigma^{-3}, v) &= F_{-1}(v). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Démonstration : Elle découle directement des relations (35) et (34), ainsi que du théorème 2.

Le calcul de (σ^{-1}, u^{-1}) n'est pas toujours possible dans les espaces du problème (27) à cause des conditions aux limites sur γ , frontière de ω .

Explicitons, tout d'abord, les équations (36). Compte tenu des définitions des formes bilinéaires $a_2(., .)$ et $b_2(., .)$, données en (26), et de la caractérisation de $\Lambda_0 \times V_0$, donnée en (30)-(31), nous trouvons que (σ^{-3}, u^{-3}) est également solution du système suivant :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{-3} &= 0, \\ u_3^{-3} &\in H_0^2(\omega) \\ \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \Delta^2 u^{-3} &= g_3^+ + g_3^-, \\ u_\alpha^{-3} &= -\partial_\alpha u_3^{-3}, \\ \sigma_{\alpha\beta}^{-3} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \{ (1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(u^{-3}) + \nu \gamma_{\mu\mu}(u^{-3}) \delta_{\alpha\beta} \}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Nous retrouvons ainsi le modèle classique des plaques encastées pour les inconnues $(u_3, u_\alpha, \sigma_{\alpha\beta})$ que nous avons rappelé dans l'introduction (1)-(2)-(3).

Notre objectif est de montrer que la solution $(\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha 3}, u_\alpha, u_3)$ des équations (17)-(20) est convenablement *approchée en erreur relative par le premier terme* (σ^{-3}, u^{-3}) du développement asymptotique formel (32).

En utilisant les résultats de régularité de l'opérateur biharmonique [14], [15], [16] sur ω , nous avons le

THÉORÈME 4 : *Sous l'hypothèse $g_3^\pm \in L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$ et si γ est de classe \mathcal{C}^3 , nous avons*

$$u_3^{-3} \in H_0^2(\omega) \cap H^3(\omega) \quad \text{et} \quad \sigma_{\alpha\beta}^{-3} \in H^1(\omega),$$

où u_3^{-3} et $\sigma_{\alpha\beta}^{-3}$ sont définis en (37). ■

Nous avons ensuite l'estimation d'erreur suivante :

THÉORÈME 5 : *Sous les hypothèses du théorème 4, il existe une constante c , indépendante de ε , telle que*

$$\left. \begin{aligned} & \| \sigma_{\alpha\beta} - \varepsilon^{-3} \sigma_{\alpha\beta}^{-3} \|_{0,\omega} + \varepsilon^{-1} \| \sigma_{\alpha 3} \|_{0,\omega} \leq c\varepsilon^{-2} \\ & \| u_\alpha - \varepsilon^{-3} u_\alpha^{-3} \|_{1,\omega} + \| u_3 - \varepsilon^{-3} u_3^{-3} \|_{1,\omega} \leq c\varepsilon^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

(ces estimations d'erreur prennent un sens en valeur relative). ■

Démonstration : D'après la définition de (σ, u) et (σ^{-3}, u^{-3}) , nous avons, en utilisant les équations (27) et (36) qui définissent ces termes pour des éléments τ, v , arbitraires, dans les espaces du problème (27) :

$$\left. \begin{aligned} & a_0\left(\sigma - \frac{\sigma^{-3}}{\varepsilon^3}, \tau\right) + b_0\left(\tau, u - \frac{u^{-3}}{\varepsilon^3}\right) \\ & \quad + \varepsilon^2 \left\{ a_2\left(\sigma - \frac{\sigma^{-3}}{\varepsilon^3}, \tau\right) + b_2\left(\tau, u - \frac{u^{-3}}{\varepsilon^3}\right) \right\} \\ & \quad = -\varepsilon^{-1} \{ a_2(\sigma^{-3}, \tau) + b_2(\tau, u^{-3}) \} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} & b_0\left(\sigma - \frac{\sigma^{-3}}{\varepsilon^3}, v\right) + \varepsilon^2 b_2\left(\sigma - \frac{\sigma^{-3}}{\varepsilon^3}, v\right) = -\varepsilon^{-1} b_2(\sigma^{-3}, v) + F_{-1}(v) \\ & \quad = \frac{1}{3\varepsilon} \int_\omega \sigma_{\alpha\beta}^{-3} \partial_\alpha v_\beta - \varepsilon^{-1} \int_\omega \frac{(g_3^+ + g_3^-)}{2} v_3 \\ & \quad = -\varepsilon^{-1} \int_\omega \sigma_{\alpha 3}^{-1} v_\alpha - \varepsilon^{-1} \int_\omega \frac{(g_3^+ + g_3^-)}{2} v_3, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

où nous avons posé

$$\sigma_{\alpha 3}^{-1} = \frac{1}{3} \partial_{\beta} \sigma_{\alpha \beta}^{-3}. \tag{41}$$

D'après le théorème 4, $\sigma_{\alpha 3}^{-1}$ est élément de l'espace $L^2(\omega)$.

Remarquons maintenant que

$$\int_{\omega} \sigma_{\alpha 3}^{-1} \partial_{\alpha} v_3 = \frac{1}{3} \int_{\omega} \partial_{\beta} \sigma_{\alpha 3}^{-1} \partial_{\alpha} v_3 = \int_{\omega} \left(-\frac{1}{3} \partial_{\alpha \beta} \sigma_{\alpha \beta}^{-3} \right) v_3 = \int_{\omega} \frac{(g_3^+ + g_3^-)}{2} v_3.$$

Le second membre de (40) s'écrit donc

$$- \varepsilon \left\{ \int_{\omega} \sigma_{\alpha 3}^{-1} v_{\alpha} + \int_{\omega} \sigma_{\alpha 3}^{-1} \partial_{\alpha} v_3 \right\}.$$

Choissant $\tau = \sigma - \frac{\sigma^{-3}}{\varepsilon^3}$ et $v = u - \frac{u^{-3}}{\varepsilon^3}$ dans (39)-(40), nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta=1,2} \varepsilon^2 \left\| \sigma_{\alpha \beta} - \frac{\sigma_{\alpha \beta}^{-3}}{\varepsilon^3} \right\|_{0, \omega}^2 + \sum_{\alpha=1,2} \left\| \sigma_{\alpha 3} \right\|_{0, \omega}^2 &\leq \\ &\leq \varepsilon^{-1} \left\| \sigma_{\alpha 3}^{-1} \right\|_{0, \omega} \left\| \left(u_{\alpha} - \frac{u_{\alpha}^{-3}}{\varepsilon^3} \right) + \partial_{\alpha} u_3 - \frac{\partial_{\alpha} u_3^{-3}}{\varepsilon^3} \right\|_{0, \omega} \end{aligned}$$

Mais, en revenant à l'égalité (39), nous déduisons

$$\left\| \partial_{\alpha} u_3 - \frac{\partial_{\alpha} u_3^{-3}}{\varepsilon^3} + \left(u_{\alpha} - \frac{u_{\alpha}^{-3}}{\varepsilon^3} \right) \right\|_{0, \omega} \leq c \left\| \sigma_{\alpha 3} \right\|_{0, \omega} \tag{42}$$

et de ces deux dernières estimations, nous déduisons

$$\sum_{\alpha=1,2} \varepsilon \left\| \sigma_{\alpha \beta} - \frac{\sigma_{\alpha \beta}^{-3}}{\varepsilon^3} \right\|_{0, \omega} + \left\| \sigma_{\alpha 3} \right\|_{0, \omega} \leq \frac{c}{\varepsilon}. \tag{43}$$

Par ailleurs, de

$$\frac{1}{3} \int_{\omega} \partial_{\alpha} \left(u_{\alpha} - \frac{u_{\alpha}^{-3}}{\varepsilon^3} \right) \tau_{\alpha \beta} = \frac{1}{3} \int_{\omega} \frac{1 + \nu}{E} \left(\sigma_{\alpha \beta} - \frac{\sigma_{\alpha \beta}^{-3}}{\varepsilon^3} \right) \tau_{\alpha \beta} - \frac{\nu}{E} \left(\sigma_{\mu \mu} - \frac{\sigma_{\mu \mu}^{-3}}{\varepsilon^3} \right) \tau_{\mu \mu},$$

nous déduisons

$$\left\| u_{\alpha} - \frac{u_{\alpha}^{-3}}{\varepsilon^3} \right\|_{0, \omega} \leq c \left\| \sigma_{\alpha \beta} - \frac{\sigma_{\alpha \beta}^{-3}}{\varepsilon^3} \right\|_{0, \omega} \leq \frac{c}{\varepsilon^2}, \tag{44}$$

et finalement, de (42) et (44), nous déduisons

$$\left\| u_3 - \frac{u_3^{-3}}{\varepsilon^3} \right\|_{1,\omega} \leq \frac{c}{\varepsilon^2}, \quad (45)$$

ce qui achève la démonstration du théorème 5. ■

Nous allons déduire du théorème 5 et des équations (23)-(24) des estimations a priori sur la solution de ces équations.

THÉORÈME 6 : *Sous l'hypothèse que g_3^\pm est élément de l'espace $L^2(\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon)$ et si γ est de classe \mathcal{C}^2 , il existe une constante c , indépendante de ε , telle que :*

$$\| u_\alpha \|_{2,\omega} + \| u_3 \|_{2,\omega} \leq c\varepsilon^{-3}. \quad (46)_1$$

Si, en outre, g_3^\pm est élément de l'espace $H^1(\omega)$ et si la frontière γ est de classe \mathcal{C}^3 , il existe une constante c , également indépendante de ε , et telle que :

$$\| u_3 \|_{3,\omega} \leq c\varepsilon^{-3}. \quad \blacksquare \quad (46)_2$$

Démonstration : En utilisant l'inégalité triangulaire et les inégalités (38), nous obtenons

$$\| u_\alpha \|_{1,\omega} + \| u_3 \|_{1,\omega} \leq \frac{c}{\varepsilon^3}. \quad (47)$$

L'équation (21) s'interprète de la façon suivante :

$$\left. \begin{aligned} u_\alpha &\in (H_0^1(\omega))^2, \\ -\frac{\varepsilon^2 E}{3(1-\nu^2)} \partial_\beta \{ (1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(u) + \nu \gamma_{\mu\mu}(u) \delta_{\alpha\beta} \} &= -\sigma_{\alpha 3}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

L'opérateur qui intervient au premier membre de l'égalité (48) est celui de l'élasticité bidimensionnelle. Pour les conditions aux limites de Dirichlet, nous avons, d'après les résultats de régularité (cf. Nečas [15])

$$\varepsilon^2 \sum_{\alpha=1,2} \| u_\alpha \|_{2,\omega} \leq \sum_{\alpha=1,2} \| \sigma_{\alpha 3} \|_{0,\omega}$$

et compte tenu du théorème 5, nous obtenons

$$\sum_{\alpha=1,2} \| u_\alpha \|_{2,\omega} \leq c\varepsilon^{-3}. \quad (49)$$

L'équation (24) conduit à l'égalité suivante :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{E}{2(1+\nu)} \Delta u_3 &= \varepsilon^{-1} \left(\frac{g_3^+ + g_3^-}{2} \right) + \frac{E}{2(1+\nu)} \partial_\alpha u_\alpha, \\ u_3 &\in \dot{H}_0^1(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

En utilisant les résultats de régularité du Laplacien sur un ouvert régulier (cf. Nečas [15]), nous obtenons, dès que g_3^\pm est élément de l'espace $L^2(\omega)$,

$$\|u_3\|_{2,\omega} \leq \varepsilon^{-1} \|g_3^+ + g_3^-\|_{0,\omega} + \sum_{\alpha=1,2} \|u_\alpha\|_{1,\omega} \leq c\varepsilon^{-3}.$$

Si, en outre, g_3^\pm est élément de l'espace $H^1(\omega)$, et en utilisant l'estimation (49), nous obtenons

$$\|u_3\|_{3,\omega} \leq c\varepsilon^{-3}.$$

Ceci termine la démonstration du théorème 6. ■

Les estimations obtenues au théorème 6 vont nous permettre d'estimer l'erreur dans les méthodes d'éléments finis que nous allons décrire pour approcher la solution du problème (23)-(24).

4. DISCRÉTISATION DU PROBLÈME SEMI-APPROCHÉ

Nous supposons, dans cette section, que l'ouvert ω est un polygone. Nous considérons une famille de triangulations régulières de ω , dont un élément est noté \mathcal{T}^h , le paramètre h désignant le plus grand côté des éléments de cette triangulation [17].

A chacune de ces triangulations, nous associons l'espace de fonctions polynomiales par morceaux :

$$V_k^h = \{ v^h \in \mathcal{C}^0(\bar{\omega}) \cap H_0^1(\omega); v^h|_K \in P_k, \forall K \in \mathcal{T}^h \}, \quad (51)$$

(où P_k désigne l'ensemble des polynômes de degré k).

Dans ce paragraphe, nous choisissons \mathcal{T}^h et $\mathcal{T}^{h'}$, deux triangulations de ω , telles que $\mathcal{T}^{h'}$ soit une sous-triangulation de \mathcal{T}^h .

On leur associe les espaces de fonctions V_k^h et $V_{k'}^{h'}$, avec $k' \geq k$. On a donc l'inclusion :

$$V_k^h \subset V_{k'}^{h'}.$$

On définit le problème approché, associé au problème (23)-(24), de la façon suivante :

Trouver $(u_\alpha^h, u_3^h) \in (V_k^h)^2 \times V_k^h$ tel que

$$\left. \begin{aligned} \forall v_\alpha \in (V_k^h)^2, \frac{\varepsilon^2}{3} \int_\omega \frac{E}{1+\nu} \left\{ \gamma_{\alpha\beta}(u^h) + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma_{\mu\mu}(u^h) \delta_{\alpha\beta} \right\} \gamma_{\alpha\beta}(v) + \\ + \int_\omega \frac{E}{2(1+\nu)} (\partial_\alpha u_3^h + u_\alpha^h) v_\alpha = 0; \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

$$\forall v_3 \in V_k^h, \int_\omega \frac{E}{2(1+\nu)} (\partial_\alpha u_3^h + u_\alpha^h) \partial_\alpha v_3 = \varepsilon^{-1} \int_\omega \left(\frac{g_3 + g_3}{2} \right) v_3. \quad (53)$$

THÉORÈME 7 : *Les équations (52) (53) admettent une solution unique.* ■

Démonstration : Nous avons défini le problème approché (52)-(53) à l'aide d'espaces d'approximations conformes à partir du problème (23)-(24), qui est un problème elliptique standard. L'existence et l'unicité d'une solution au problème approché en découlent de manière classique. ■

Concernant l'estimation d'erreur, nous avons le

THÉORÈME 8 : *Si (u_α^h, u_3^h) , (resp. (u_α^1, u_3^0)) désigne la solution du problème approché (52)-(53) (resp. (23)-(24)), alors il existe une constante c , indépendante de ε et de h , telle que*

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1,2} \{ \varepsilon \| u_\alpha - u_\alpha^h \|_{1,\omega} + \| \partial_\alpha (u_3 - u_3^h) + u_\alpha - u_\alpha^h \|_{0,\omega} \} \leq \\ & \leq c \inf_{(v_\alpha, v_3) \in (V_k^h)^2 \times V_k^h} \left\{ \sum_{\alpha=1,2} \left(\varepsilon \| u_\alpha - v_\alpha \|_{1,\omega} + \| u_\alpha - v_\alpha \|_{0,\omega} \right) + \| u_3 - v_3 \|_{1,\omega} \right\}. \end{aligned} \quad \blacksquare \quad (54)$$

Démonstration : Nous avons :

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1,2} \{ \varepsilon^2 \| u_\alpha - u_\alpha^h \|_{1,\omega}^2 + \| \partial_\alpha (u_3 - u_3^h) + u_\alpha - u_\alpha^h \|_{0,\omega}^2 \} \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon^2 E}{3(1+\nu)} \int_\omega \gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\alpha\beta}(u - u^h) + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma_{\mu\mu}(u) \gamma_{\mu\mu}(u - u^h) \\ & \quad - \frac{\varepsilon^2 E}{3(1+\nu)} \int_\omega \gamma_{\alpha\beta}(u^h) \gamma_{\alpha\beta}(v^h - u^h) + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma_{\mu\mu}(u^h) \gamma_{\mu\mu}(v^h - u^h) \\ & \quad + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_\omega (\partial_\alpha u_3 + u_\alpha) (\partial_\alpha (u_3 - u_3^h) + u_\alpha - u_\alpha^h) \\ & \quad - \frac{E}{2(1+\nu)} \int_\omega (\partial_\alpha u_3^h + u_\alpha^h) (\partial_\alpha (u_3^h - u_3^h) + u_\alpha^h - u_\alpha^h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{\omega} (\partial_{\alpha} u_3^{h'} + u_{\alpha}^h) (\partial_{\alpha} (v_3^h - u_3) + v_{\alpha}^h - u_{\alpha}) \\
 & + \frac{\varepsilon^2 E}{3(1+\nu)} \int_{\omega} \gamma_{\alpha\beta}(u^h) \gamma_{\alpha\beta}(v^h - u) + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma_{\mu\mu}(u^h) \gamma_{\mu\mu}(v^h - u) \\
 = & \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{\omega} (\partial_{\alpha} (u_3^{h'} - u_3) + u_{\alpha}^h - u_{\alpha}) (\partial_{\alpha} (v_3^h - u_3) + v_{\alpha}^h - u_{\alpha}) \\
 & + \frac{\varepsilon^2 E}{3(1+\nu)} \int_{\omega} \gamma_{\alpha\beta}(u - u^h) \gamma_{\alpha\beta}(u - v^h) + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma_{\mu\mu}(u - u^h) \gamma_{\mu\mu}(u - v^h) \\
 \leq & c\varepsilon^2 \| u_{\alpha} - u_{\alpha}^h \|_{1,\omega} \| u_{\alpha} - v_{\alpha}^h \|_{1,\omega} \\
 & + \| \partial_{\alpha} (u_3^{h'} - u_3) + u_{\alpha}^h - u_{\alpha} \|_{0,\omega} \| u_3 - v_3^h \|_{1,\omega} + \| u_{\alpha} - v_{\alpha}^h \|_{0,\omega}
 \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème 8. ■

En faisant appel aux résultats d'interpolation dans les espaces de Hilbert (cf. Ciarlet-Raviart [17]), ainsi qu'aux estimations (46) et (54), données respectivement aux théorèmes 6 et 8, nous déduisons les majorations d'erreur suivantes.

THÉORÈME 9 : *La densité de force g_3^{\pm} est élément de l'espace $L^2(\Gamma_+^{\varepsilon} \cup \Gamma_-^{\varepsilon})$, et si nous choisissons, dans (52)-(53), $k = k' = 1$, alors il existe une constante c , indépendante de ε , de h et de h' , telle que*

$$\left. \begin{aligned}
 & \sum_{\alpha=1,2} \left\{ \varepsilon \| u_{\alpha} - u_{\alpha}^h \|_{1,\omega} + \| \partial_{\alpha} (u_3 - u_3^h) + u_{\alpha} - u_{\alpha}^h \|_{0,\omega} \leq c\varepsilon^{-3}(\varepsilon h + h^2 + h') \right\}, \\
 & \| u_3 - u_3^h \|_{1,\omega} \leq c\varepsilon^{-3} \left(h^2 + \frac{h^3}{\varepsilon} + \frac{hh'}{\varepsilon} \right), \\
 & \sum_{\alpha=1,2} \varepsilon \| u_{\alpha} - u_{\alpha}^h \|_{0,\omega} \leq c\varepsilon^{-3}(\varepsilon h^2 + h^3 + hh'). \quad \blacksquare
 \end{aligned} \right\} \tag{55}$$

THÉORÈME 10 : *La densité de force g_3^{\pm} est élément de l'espace $H^1(\Gamma_+^{\varepsilon} \cup \Gamma_-^{\varepsilon})$, et si nous choisissons, dans (52)-(53), $k = 1, k' = 2$, alors il existe une constante c , indépendante de ε , de h et de h' , telle que*

$$\left. \begin{aligned}
 & \sum_{\alpha=1,2} \left\{ \varepsilon \| u_{\alpha} - u_{\alpha}^h \|_{1,\omega} + \| \partial_{\alpha} (u_3 - u_3^h) + u_{\alpha} - u_{\alpha}^h \|_{0,\omega} \leq c\varepsilon^{-3}(\varepsilon h + h^2 + h'^2) \right\}, \\
 & \| u_3 - u_3^h \|_{1,\omega} \leq c\varepsilon^{-3} \left(h^2 + \frac{h^3}{\varepsilon} + \frac{h'^2 h}{\varepsilon} \right), \\
 & \sum_{\alpha=1,2} \varepsilon \| u_{\alpha} - u_{\alpha}^h \|_{0,\omega} \leq c\varepsilon^{-3}(\varepsilon h^2 + h^3 + h'^2 h). \quad \blacksquare
 \end{aligned} \right\} \tag{56}$$

Les estimations en normes $L^2(\omega)$ sur $u_\alpha - u_\alpha^h$ sont déduites des autres par le procédé d'Aubin-Nitsche [4]. On en déduit celle sur $u_3 - u_3^h$ en norme $H^1(\omega)$.

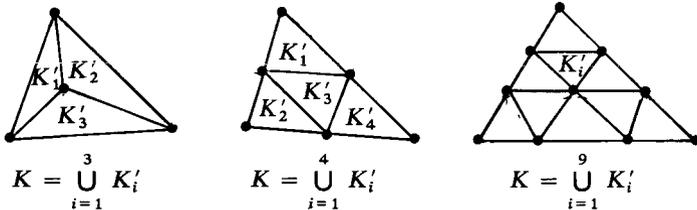
Remarque 3 : Les estimations (55) et (56) ne prennent un sens qu'en valeur relative. En effet, le second membre est multiplié par le facteur ε^{-3} , qui provient de la majoration de la norme de la solution des équations (23)-(24). En exprimant les estimations (55)-(56) en valeur relative, ce facteur disparaît (cf. théorème 5).

5. REMARQUES SUR LE CHOIX DES TRIANGULATIONS \mathcal{T}^h ET $\mathcal{T}^{h'}$

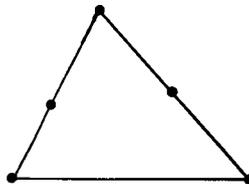
Dans l'hypothèse où les densités surfaciques de forces g_3^\pm sont dans l'espace $L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$, alors l'estimation (55) du théorème 9 suggère de choisir ε , h et $\sqrt{h'}$ du même ordre de grandeur.

Afin que le nombre d'éléments ne soit pas prohibitif, on veille à ce que l'épaisseur ε ne soit pas trop petite. Cela correspond au cas des plaques épaisses. Dans le cas contraire (ε très petit), on choisira h et $\sqrt{h'}$ du même ordre de grandeur, mais plus grand que ε ; malheureusement, les essais numériques [7], [8], prouvent que le problème discret associé est très mal conditionné. Nous serons amenés dans ce cas à modifier le schéma d'approximation.

Des éléments qui satisfont à l'inégalité $h' < h$ sont, par exemple, u_α^h est une fonction P_1 sur l'élément K , tandis que $u_3^{h'}$ est une fonction P_1 sur chaque sous-triangle K'_i .



Dans l'hypothèse où les densités de forces surfaciques g_3^\pm sont des éléments de l'espace $H^1(\Gamma_+^e \cup \Gamma_-^e)$, l'estimation (56) du théorème 10 suggère de choisir cette fois h , h' et ε , du même ordre de grandeur. Ceci n'est possible pratiquement que si la plaque est épaisse. Un tel schéma s'obtient à l'aide de l'élément suivant :



u_α^h est une fonction p_1 sur le triangle K , tandis que u_3^h est p_2 . Dans le cas où ε est nettement plus petit que h , ici encore, le problème discret (52)-(53) est très mal conditionné et nous étudierons, au paragraphe 6, des variantes à apporter au schéma d'approximation pour éviter cette difficulté.

6. LE CAS DES PLAQUES MINCES

Nous considérons, dans ce paragraphe, le cas où l'épaisseur de la plaque 2ε est très petite. Dans ce cas, il peut être prohibitif de choisir h ou h' de l'ordre de ε (trop de degrés de liberté). En théorie, les estimations d'erreur données aux théorèmes 9 et 10 sont toujours valables. Mais le conditionnement du système linéaire associé aux équations (52)-(53) est très mauvais. Cet inconvénient a été signalé dans différents travaux : Hughes [8], Zienkiewicz [7]. Nous proposons donc, pour ce type de plaques, une modification du schéma d'approximation du problème (23)-(24) qui va nous permettre de faire une analyse asymptotique du problème discret par rapport au petit paramètre ε , permettant une résolution aisée du système discrétisé.

Pour chaque triangulation \mathcal{T}^h de l'ouvert ω , nous définissons l'espace de fonctions polynomiales par morceaux suivants :

$$X_k^h = \{ \tau^h \in L^2(\omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\omega}); \tau^h|_K \in P^k, \forall K \in \mathcal{T}^h \} . \tag{57}$$

On notera que les fonctions de X_k^h sont continues aux interfaces des éléments, mais, contrairement aux éléments de V_k^h , ne s'annulent pas sur la frontière de ω .

Reprenons maintenant les équations (18)-(20), où on élimine $\sigma_{\alpha\beta}$ à l'aide de l'équation (21). Nous obtenons ainsi que $(\sigma_{\alpha 3}, u_\alpha, u_3)$ est caractérisé comme l'unique solution dans l'espace $(L^2(\omega))^2 \times (H_0^1(\omega))^3$ du système suivant :

$$\forall \tau_{\alpha 3} \in (L^2(\omega))^2, \int_{\omega} \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{\alpha 3} \tau_{\alpha 3} - \int_{\omega} \tau_{\alpha 3} (\partial_\alpha u_3 + u_\alpha) = 0, \tag{58}$$

$$\forall v_\alpha \in (H_0^1(\omega))^2, \frac{\varepsilon^2}{3} \int_{\omega} \frac{E}{1+\nu} \left\{ \gamma_{\alpha\beta}(u) + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma_{\mu\mu}(u) \delta_{\alpha\beta} \right\} \times \gamma_{\alpha\beta}(v) + \int_{\omega} \sigma_{\alpha 3} v_\alpha = 0, \tag{59}$$

$$\forall v_3 \in H_0^1(\omega), \int_{\omega} \sigma_{\alpha 3} \partial_\alpha v_3 = \varepsilon^{-1} \int_{\omega} \left(\frac{g_3^+ + g_3^-}{2} \right) v_3. \tag{60}$$

Nous associons à ce système le problème approché :

Trouver $(\sigma_{\alpha 3}^h, u_\alpha^h, u_3^h) \in (X_1^h)^2 \times (V_1^h)^2 \times V_1^h$ tel que

$$\forall \tau_{\alpha 3} \in (X_1^h)^2, \int_{\omega} \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{\alpha 3}^h \tau_{\alpha 3} - \int_{\omega} \tau_{\alpha 3} (\partial_\alpha u_3^h + u_\alpha^h) = 0, \quad (61)$$

$$\forall v_\alpha \in (V_1^h)^2, \frac{\varepsilon^2}{3} \int_{\omega} \frac{E}{1+\nu} \left\{ \gamma_{\alpha\beta}(u^h) + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma_{\mu\mu}(u^h) \delta_{\alpha\beta} \right\} \times \\ \times \gamma_{\alpha\beta}(v) + \int_{\omega} \sigma_{\alpha 3}^h v_\alpha = 0, \quad (62)$$

$$\forall v_3 \in V_1^h, \int_{\omega} \sigma_{\alpha 3}^h \partial_\alpha v_3 = \varepsilon^{-1} \int_{\omega} \left(\frac{g_3^+ + g_3^-}{2} \right) v_3. \quad (63)$$

Le choix des triangulations \mathcal{T}^h et $\mathcal{T}^{h'}$ sera précisé dans la suite. Nous aurons cette fois $V_1^{h'} \subset V_1^h$, contrairement à la situation du paragraphe précédent.

Remarque 4 : La différence essentielle entre les problèmes approchés (52)-(53) et (61)-(62)-(63) se situe au niveau du choix des espaces d'approximation pour la contrainte de cisaillement transverse $\sigma_{\alpha 3}$. Dans le cas du problème (52)-(53), l'équation de comportement

$$\sigma_{\alpha 3}^h = \frac{E}{2(1+\nu)} (\partial_\alpha u_3^h + u_\alpha^h), \quad (64)$$

est exactement vérifiée. Cela reviendrait à remplacer l'espace X_1^h dans la définition du problème approché (61)-(62)-(63), par l'espace

$$Z_1^h = \{ \tau^h \in L^2(\omega); \tau^h|_K \in P^1, \forall K \in \mathcal{T}^h \},$$

et à choisir $h' = h$. Puisque nous avons l'inclusion

$$X_1^h \subset Z_1^h,$$

on dit que l'on a « assoupli » la loi de comportement en remplaçant (64) par (61) (élément plus souple).

Dans ce qui suit, nous sommes conduit à faire une hypothèse sur la triangulation de ω . Nous vérifierons que cette hypothèse est satisfaite pour une triangulation particulière.

HYPOTHÈSE H1 : Soit \mathcal{T}^h (respectivement $\mathcal{T}^{h'}$) une triangulation de ω et X_1^h (respectivement $V_1^{h'}$) l'espace défini en (57) (respectivement en (51)). Nous ferons l'hypothèse qu'il existe une constante c , indépendante de h et h' , telle que

$$\forall V^{h'} \in V_1^{h'}, \sup_{\tau_{\alpha 3}^h \in (X_1^h)^2} \frac{\int_{\omega} \tau_{\alpha 3}^h \partial_\alpha v^{h'}}{\| \tau_{\alpha 3}^h \|_{0,\omega}} \geq c \| v^{h'} \|_{1,\omega}. \quad (H1)$$

Ce type d'inégalité est connu sous le nom d'« inégalités de Brezzi » [18]. Des situations similaires sont données dans [19], [20]. Il conviendra évidemment de choisir \mathcal{G}^h et $\mathcal{G}^{h'}$ convenablement pour satisfaire (H1).

Montrons, tout d'abord, que le problème (61)-(62)-(63) est bien posé sous l'hypothèse (H1).

THÉORÈME 11 : *Sous l'hypothèse (H1), les équations (61)-(62)-(63) déterminent $(\sigma_{\alpha 3}^h, u_\alpha^h, u_3^h)$ de manière unique dans l'espace $(X_1^h)^2 \times (V_1^h)^2 \times V_1^h$. ■*

Démonstration : Puisque (61)-(62)-(63) est en fait un problème linéaire en dimension finie, ayant autant d'équations que d'inconnues, il suffit de vérifier que le système homogène admet comme unique solution la solution triviale. Choisisant $\tau_{\alpha 3} = \sigma_{\alpha 3}^h$ dans (61), $v_\alpha = u_\alpha^h$, dans (62), et $v_3 = u_3^h$ dans (63), nous obtenons

$$\int_{\omega} \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{\alpha 3}^h \sigma_{\alpha 3}^h + \frac{\varepsilon^2}{3} \int_{\omega} \frac{E}{1+\nu} \left\{ \gamma_{\alpha\beta}(u^h) \gamma_{\alpha\beta}(u^h) + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma_{\mu\mu}(u^h) \gamma_{\mu\mu}(u^h) \right\} = 0,$$

et cette égalité implique

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^h &= 0, \alpha = 1, 2, \\ u_\alpha^h &= 0, \alpha = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Revenons alors à l'équation (61) qui, compte tenu de (65), s'écrit :

$$\forall \tau_{\alpha 3} \in X_1^h, \int_{\omega} \tau_{\alpha 3} \partial_\alpha u_3^h = 0,$$

ce qui d'après l'hypothèse (H1) entraîne

$$u_3^h = 0. \quad \blacksquare$$

Nous montrerons au paragraphe 7 que la solution $(\sigma_{\alpha 3}^h, u_\alpha^h, u_3^h)$ du système (61)-(62)-(63) peut s'écrire par analogie avec les résultats du paragraphe 3 :

$$(\sigma_{\alpha 3}^h, u_\alpha^h, u_3^h) = \varepsilon^{-3} (0, (u_\alpha^h)^{-3}, (u_3^h)^{-3}) + \text{etc...}$$

avec

$$\sum_{\alpha=1,2} \left\{ \|\sigma_{\alpha 3}^h\|_{0,\omega} + \left\| u_\alpha^h - \frac{(u_\alpha^h)^{-3}}{\varepsilon^3} \right\|_{1,\omega} + \left\| u_3^h - \frac{(u_3^h)^{-3}}{\varepsilon^3} \right\|_{1,\omega} \right\} \leq c\varepsilon^{-1}. \quad (66)$$

Nous utiliserons ce résultat pour démontrer le

THÉORÈME 12 : *Si les densités de forces surfaciques g_3^\pm sont des éléments de l'espace $L^2(\Gamma_+^e \cup \Gamma_-^e)$, et si $(\sigma_{\alpha 3}^h, u_\alpha^h, u_3^h)$ (respectivement $(\sigma_{\alpha 3}, u_\alpha, u_3)$) désigne*

la solution des équations (61)-(62)-(63) (respectivement (58)-(59)-(60)), alors il existe une constante c , indépendante de ε , de h et de h' , telle que

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\alpha=1,2} \| u_\alpha - u_\alpha^h \|_{1,\omega} &\leq c\varepsilon^{-3} h, \\ \sum_{\alpha=1,2} \| \partial_\alpha u_3 + u_\alpha^h \|_{0,\omega} &\leq c\varepsilon^{-3}(\varepsilon^2 + h^2). \end{aligned} \right\} \quad (67)_1$$

En outre, si l'hypothèse (H1) est vérifiée, nous avons

$$\| u_3 - u_3^h \|_{1,\omega} \leq c\varepsilon^{-3} h'. \quad \blacksquare \quad (67)_2$$

Remarque 5 : Le facteur ε^{-3} qui intervient au second membre des estimations (67) disparaît si l'on considère des estimations d'erreur relative, car les composantes u_α et u_3 de la solution du système (58)-(59)-(60) se comportent comme ε^{-3} en norme $H^1(\omega)$.

Démonstration : Nous poserons, pour les besoins de cette preuve, pour des éléments arbitraires τ, σ, u, v :

$$\left. \begin{aligned} a(u, v) &= \frac{1}{3} \int_\omega \frac{E}{1 + \nu} \left\{ \gamma_{\alpha\beta}(u) + \frac{\nu}{1 - \nu} \gamma_{\mu\mu}(u) \delta_{\alpha\beta} \right\} \gamma_{\alpha\beta}(v), \\ c(\sigma, v) &= \int_\omega \sigma_{\alpha 3} v_\alpha, \\ d(\sigma, v) &= \int_\omega \sigma_{\alpha 3} \partial_\alpha v_3, \\ b(\sigma, \tau) &= \int_\omega \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_{\alpha 3} \tau_{\alpha 3}. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Le problème (58)-(59)-(60) s'écrit sous la forme suivante, pour des éléments τ, v , arbitraires :

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon^2 a(u, v) + c(\sigma, v) &= 0, \\ d(\sigma, v) &= \varepsilon^{-1} \int_\omega \left(\frac{g_3^+ + g_3^-}{2} \right) v_3, \\ b(\sigma, \tau) &= c(\tau, u) + d(\tau, u), \end{aligned} \right.$$

et le problème approché (61)-(62)-(63) s'écrit, pour des éléments τ^h, v^h , arbitraires, choisis dans les espaces d'approximation,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^2 a(u^h, v^h) + c(\sigma^h, v^h) = 0, \\ d(\sigma^h, v^h) = \varepsilon^{-1} \int_{\omega} \left(\frac{g_3^+ + g_3^-}{2} \right) v_3^h, \\ b(\sigma^h, \tau^h) = c(\tau^h, u^h) + d(\tau^h, u^h). \end{array} \right.$$

Nous avons, tout d'abord,

$$\left\{ \begin{array}{l} E = c \sum_{\alpha=1,2} \{ \varepsilon^2 \| u_{\alpha} - u_{\alpha}^h \|_{1,\omega}^2 \} \\ \leq \varepsilon^2 a(u - u^h, u - u^h) \\ = \varepsilon^2 a(u, u - u^h) - \varepsilon^2 a(u^h, u - u^h) \\ = -c(\sigma, u - u^h) + c(\sigma^h, v^h - u^h) - \varepsilon^2 a(u^h, u - v^h) \\ = -c(\sigma, u - v^h) + c(\sigma - \sigma^h, u^h - v^h) - \varepsilon^2 a(u^h, u - v^h) \\ = \varepsilon^2 a(u - u^h, u - v^h) + c(\sigma - \sigma^h, u^h - v^h) \\ \leq c\varepsilon^2 \sum_{\alpha=1,2} \| u_{\alpha} - u_{\alpha}^h \|_{1,\omega} \| u_{\alpha} - v_{\alpha}^h \|_{1,\omega} + \\ \quad + c \sum_{\alpha=1,2} \| \sigma_{\alpha 3} - \sigma_{\alpha 3}^h \|_{0,\omega} (\| u_{\alpha} - v_{\alpha}^h \|_{0,\omega} + \| u_{\alpha}^h - u_{\alpha} \|_{0,\omega}). \end{array} \right.$$

Compte-tenu des estimations (38) et (66), nous en déduisons que, pour tout élément v_{α}^h de l'espace $V_{1,\omega}^h$, nous avons

$$\left. \begin{array}{l} c\varepsilon^2 \sum_{\alpha=1,2} \| u_{\alpha} - u_{\alpha}^h \|_{1,\omega}^2 \leq \inf_{v_{\alpha}^h \in (V_{1,\omega}^h)^2} \\ \quad \varepsilon^{-1} \sum_{\alpha=1,2} \{ \| u_{\alpha} - v_{\alpha}^h \|_{0,\omega} + \varepsilon^2 \| u_{\alpha} - v_{\alpha}^h \|_{1,\omega}^2 \} \\ \quad + c\varepsilon^{-1} \sum_{\alpha=1,2} \| u_{\alpha} - u_{\alpha}^h \|_{0,\omega}. \end{array} \right\} \quad (69)$$

Mais, en utilisant la technique de Nitsche [4], nous obtenons

$$\sum_{\alpha=1,2} \| u_{\alpha} - u_{\alpha}^h \|_{0,\omega} \leq \sum_{\alpha=1,2} h \| u_{\alpha} - u_{\alpha}^h \|_{1,\omega}.$$

En combinant cette dernière estimation, l'inégalité (69), les résultats d'interpolation dans les espaces de Sobolev [17], et le théorème 6, nous déduisons

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha=1,2} \| u_{\alpha} - u_{\alpha}^h \|_{1,\omega} \leq c\varepsilon^{-3} h, \\ \sum_{\alpha=1,2} \| u_{\alpha} - u_{\alpha}^h \|_{0,\omega} \leq c\varepsilon^{-3} h^2. \end{array} \right.$$

Puisque

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{E}{2(1 + \nu)} (\partial_{\alpha} u_3 + u_{\alpha}),$$

et que

$$\| \sigma_{\alpha 3} \|_{0, \omega} \leq \frac{c}{\varepsilon},$$

nous en déduisons aussi

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\alpha=1,2} \| \partial_{\alpha} u_3 + u_{\alpha}^h \|_{0, \omega} &\leq \sum_{\alpha=1,2} \{ \| \partial_{\alpha} u_3 + u_{\alpha} \|_{0, \omega} + \| u_{\alpha} - u_{\alpha}^h \|_{0, \omega} \} \\ &\leq c\varepsilon^{-3}(\varepsilon^2 + h^2). \end{aligned} \right\} (70)$$

Introduisons maintenant l'interpolé $r^{h'} u_3$ de u_3 dans l'espace $V_1^{h'}$. Nous avons, en utilisant l'hypothèse (H1) :

$$\left. \begin{aligned} \| u_3 - u_3^h \|_{1, \omega} &\leq \| u_3 - r^{h'} u_3 \|_{1, \omega} + \| r^{h'} u_3 - u_3^h \|_{1, \omega} \\ &\leq c\varepsilon^{-3} h' + \sup_{\tau_{\alpha 3}^h \in (\tilde{X}_1^h)^2} \frac{d(\tau^h, r^{h'} u_3 - u_3^h)}{\sum_{\alpha=1,2} \| \tau_{\alpha 3}^h \|_{0, \omega}} \\ &\leq c\varepsilon^{-3} h' + \sup_{\tau_{\alpha 3}^h \in (\tilde{X}_1^h)^2} \frac{d(\tau^h, r^{h'} u_3 - u_3)}{\sum_{\alpha=1,2} \| \tau_{\alpha 3}^h \|_{0, \omega}} + \\ &\quad + \sup_{\tau_{\alpha 3}^h \in (\tilde{X}_1^h)^2} \frac{d(\tau^h, u_3 - u_3^h)}{\sum_{\alpha=1,2} \| \tau_{\alpha 3}^h \|_{0, \omega}} \\ &\leq c\varepsilon^{-3} h' + \sup_{\tau_{\alpha 3}^h \in (\tilde{X}_1^h)^2} \frac{(b(\sigma - \sigma^h, \tau^h) + c(\tau^h, u^h - u))}{\sum_{\alpha=1,2} \| \tau_{\alpha 3}^h \|_{0, \omega}} \\ &\leq c(\varepsilon^{-3} h' + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-3} h^2) \\ &\leq c\varepsilon^{-3} h'. \end{aligned} \right\} (71)$$

Ceci termine la démonstration du théorème 12. ■

Remarque 6 : L'hypothèse (H1) n'est utilisée que pour obtenir l'estimation d'erreur (67). Si cette hypothèse n'est pas satisfaite, ou est trop complexe à vérifier, il n'en demeure pas moins que les estimations sur $u_{\alpha} - u_{\alpha}^h$ et $\partial_{\alpha} u_3 + u_{\alpha}^h$ restent valables. C'est le cas, par exemple, si on choisit \mathcal{T}^h et $\mathcal{T}^{h'}$ identiques.

Donnons un exemple où l'hypothèse (H1) est satisfaite :

Soit $\mathcal{T}^{h'}$ une triangulation de ω à laquelle est associée l'espace $V_1^{h'}$. La triangulation \mathcal{T}^h à laquelle sont associés les espaces V_1^h et X_1^h , est obtenue à partir

de \mathcal{T}^h , en divisant les triangles de \mathcal{T}^h en 3 triangles, comme le montre la figure suivante :



Pour tout élément $v_3 \in V_1^h$, v_3 est affine sur T' et $\partial_\alpha v_3$ est constant sur T' .

En choisissant $\tau_{\alpha 3} = w_s \partial_\alpha v_3$, où w_s désigne la fonction de base de l'espace V_1^h associée au sommet s (voir figure), nous obtenons :

$$\left\{ \begin{aligned} \sup_{\tau_{\alpha 3} \in (X_1^h)^2} \frac{\int_\omega \tau_{\alpha 3} \partial_\alpha v_3}{\|\tau_{\alpha 3}\|_{(X_1^h)^2}} &\geq c \left(\sum_{T' \in \mathcal{T}^h} (\partial_\alpha v_3)^2 \frac{\text{mes}(T')}{3} \right)^{1/2} \\ &\geq c \|v_3\|_{1,\omega} \end{aligned} \right.$$

ce qui vérifie l'hypothèse (H1).

D'autres exemples sont donnés dans Glowinski-Pironneau [20] et Ber-covier-Pironneau [19].

7. ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DU MODÈLE DISCRET POUR LES PLAQUES MINCES

Nous désignerons par w_i les fonctions de base associées aux sommets des triangulations \mathcal{T}^h et $\mathcal{T}^{h'}$ (\mathcal{T}^h étant ici une sous-triangulation de $\mathcal{T}^{h'}$).

L'ensemble des indices des sommets associés aux degrés de liberté de V_1^h est noté I , celui des sommets associés aux degrés de liberté de $V_1^{h'}$, I' , avec

$$I' \subset I;$$

et celui des sommets auxquels sont associés des degrés de liberté de X_1^h , est noté J ; nous avons à cause des degrés de liberté frontière de l'espace X_1^h :

$$I \subset J.$$

Désignons par A la matrice 21×21 , associée à la forme bilinéaire sur $(V_1^h)^2 \times (V_1^h)^2$, définie par

$$a(u, v) = \frac{E}{3(1 + \nu)} \int_\omega \gamma_{\alpha\beta}(u) \gamma_{\alpha\beta}(v) + \frac{\nu}{1 - \nu} \gamma_{\mu\mu}(u) \gamma_{\mu\mu}(v); \tag{72}$$

puis, désignons par B la matrice $2J \times 2J$, associée à la forme bilinéaire sur $(X_1^h)^2 \times (X_1^h)^2$, définie par

$$b(\sigma, \tau) = \frac{2(1 + \nu)}{E} \int_{\omega} \sigma_{\alpha 3} \tau_{\alpha 3}; \tag{73}$$

enfin, nous désignons par C et D les matrices de dimensions $2J \times 2I$ et $2J \times I'$, associées aux formes bilinéaires sur $(X_1^h)^2 \times (V_1^h)^2$ et $(X_1^h)^2 \times (V_1^h)$, définies respectivement par :

$$c(\sigma, v) = \int_{\omega} \sigma_{\alpha 3} v_{\alpha},$$

et

$$d(\sigma, v) = \int_{\omega} \sigma_{\alpha 3} \partial_{\alpha} v_3.$$

Les vecteurs des degrés de liberté de u_{α}^h, u_3^h et $\sigma_{\alpha 3}^h$ sont notés U_{α}, U_3 et $\Sigma_{\alpha 3}$. Le système linéaire (61)-(62)-(63) s'écrit alors

$$\left. \begin{aligned} B \Sigma_{\alpha 3} &= \bar{C} U_{\alpha} + \bar{D} U_3, \\ \varepsilon^2 A U_{\alpha} + C \Sigma_{\alpha 3} &= 0, \\ D \Sigma_{\alpha 3} &= \varepsilon^{-1} G. \end{aligned} \right\} \tag{74}$$

Nous en déduisons

$$\Sigma_{\alpha 3} = B^{-1} \bar{C} U_{\alpha} + B^{-1} \bar{D} U_3; \tag{75}$$

$$U_{\alpha} = -(\varepsilon^2 A + C B^{-1} \bar{C})^{-1} C B^{-1} \bar{D} U_3; \tag{76}$$

$$[D B^{-1} \bar{D} - D B^{-1} \bar{C} (\varepsilon^2 A + C B^{-1} \bar{C})^{-1} C B^{-1} \bar{D}] U_3 = \varepsilon^{-1} G. \tag{77}$$

Les matrices B et C sont des matrices de produits scalaires dans $L^2(\omega)$. On peut les remplacer par des matrices dites « condensées » (« Lumped » en anglais), obtenues en utilisant la formule de quadrature portant sur les sommets des triangles. De telles matrices sont diagonales et on pourrait montrer que l'erreur ainsi produite ne détériore pas l'estimation du théorème 12.

En effectuant une partition des degrés de liberté de J entre ceux de I qui correspondent aux sommets intérieurs et ceux de la frontière de ω , nous écrivons au coefficient $2(1 + \nu)/E$ près :

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \end{array} \right) \updownarrow \begin{matrix} 2J \\ 2I \end{matrix} \tag{78}$$

$$C = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline \xrightarrow{2J} & \end{array} \right) \updownarrow 2I \tag{79}$$

$$D = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & D_2 \\ \hline \xrightarrow{2I} & \\ \xrightarrow{2J} & \end{array} \right) \updownarrow I' . \tag{80}$$

Nous avons ainsi :

$$CB^{-1} \bar{C} = (B_1 \mid 0) \begin{pmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & B_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} = B_1$$

$$CB^{-1} \bar{D} = (B_1 \mid 0) \begin{pmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & B_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \end{pmatrix} = D_1$$

$$DB^{-1} \bar{C} = (D_1 \mid D_2) \begin{pmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & B_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} = D_1$$

$$DB^{-1} \bar{D} = (D_1 \mid D_2) \begin{pmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & B_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \end{pmatrix} = D_1 B_1^{-1} \bar{D}_1 + D_2 B_2^{-1} \bar{D}_2 .$$

L'équation (77) est alors équivalente à

$$[D_1 B_1^{-1} \bar{D}_1 + D_2 B_2^{-1} \bar{D}_2 - D_1 B_1^{-1} (\varepsilon^2 AB_1^{-1} + I)^{-1} D_1] U_3 = \varepsilon^{-1} G ,$$

mais en observant que pour ε petit :

$$(\varepsilon^2 AB_1^{-1} + I)^{-1} = I - \varepsilon^2 AB_1^{-1} + \varepsilon^4 (AB_1^{-1})^2 + \dots \text{etc.}$$

nous avons

$$[D_2 B_2^{-1} \bar{D}_2 + \varepsilon^2 D_1 B_1^{-1} AB_1^{-1} \bar{D}_1 + \dots] U_3 = G . \tag{81}$$

La matrice $D_2 B_2^{-1} \bar{D}_2$, qui est symétrique, est seulement positive et admet un noyau Y_0 , défini par

$$Y_0 = \{ V_3 \in \mathbb{R}^l, \bar{D}_2 V_3 = 0 \} .$$

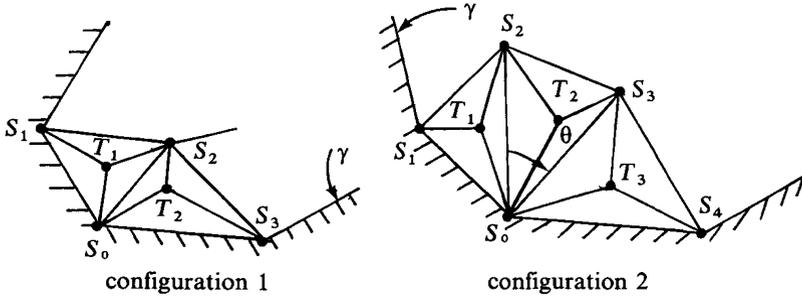
Nous supposons que chaque sommet de $\mathcal{C}^{h'}$ qui est sur la frontière de ω , n'a pas plus de 2 sommets voisins intérieurs à ω dans $\mathcal{C}^{h'}$. Soit un élément $u_3^{h'}$ de $V_1^{h'}$, dont le vecteur des degrés de liberté est V_3 et vérifiant

$$\bar{D}_2 V_3 = 0 .$$

En revenant à la définition de D_2 donnée en (80), nous avons, pour toute fonction $\tau_{\alpha 3}$ de l'espace $(X_1^h)^2$, nulle aux sommets intérieurs de \mathcal{C}^h ,

$$\int_{\omega} \tau_{\alpha 3}^h \partial_{\alpha} v_3^{h'} = 0 . \tag{82}$$

Considérons un sommet S_0 de \mathcal{T}^h de la frontière de ω . D'après l'hypothèse faite sur la triangulation, nous avons l'une des deux configurations suivantes :



Désignons par w_{s_0} la fonction de base dans l'espace X_1^h associée au degré de liberté S_0 , et posons

$$(\tau_{\alpha 3}^h)^1 = \overrightarrow{S_0 S_2} w_{s_0},$$

puis

$$(\tau_{\alpha 3}^h)^2 = \overrightarrow{S_0 S_3} w_{s_0},$$

pour la seconde configuration. L'identité (82) conduit, pour la première configuration, à

$$\int_{\omega} (\tau_{\alpha 3}^h)^1 \partial_{\alpha} u_3^{h'} = \left(\int_{T_1 \cup T_2} w_{s_0} \right) u_3^{h'}(S_2)$$

d'où

$$u_3^{h'}(S_2) = 0;$$

et, pour la seconde configuration,

$$0 = \int_{\omega} (\tau_{\alpha 3}^h)^1 \partial_{\alpha} u_3^{h'} = \left(\int_{T_1 \cup T_2} w_{s_0} \right) u_3^{h'}(S_2) + \left(\int_{T_3 \cup T_2} w_{s_0} \right) \cos \theta u_3^{h'}(S_3),$$

$$0 = \int_{\omega} (\tau_{\alpha 3}^h)^2 \partial_{\alpha} u_3^{h'} = \left(\int_{T_1 \cup T_2} w_{s_0} \right) \cos \theta u_3^{h'}(S_2) + \left(\int_{T_2 \cup T_3} w_{s_0} \right) u_3^{h'}(S_3),$$

d'où

$$u_3^{h'}(S_2) = u_3^{h'}(S_3) = 0.$$

(Dans le cas où les triangulations \mathcal{T}^h et $\mathcal{T}^{h'}$ sont identiques, les résultats sont les mêmes.)

Le noyau Y_0 de \bar{D}_2 est donc constitué des vecteurs V_3 qui ont une composante nulle aux sommets voisins de la frontière de ω . Posons alors

$$U_3 = \varepsilon^{-3} U_3^{-3} + \varepsilon^{-1} U_3^{-1} + \dots \text{ etc. ;}$$

en reportant cette expression dans l'équation (81) et en identifiant les termes de même puissance en ε dans l'expression résultante, nous obtenons

$$D_2 B_2^{-1} \bar{D}_2 U_3^{-3} = 0, \tag{83}$$

$$D_3 B_3^{-1} \bar{D}_2 U_3^{-1} + D_1 B_1^{-1} A B_1^{-1} \bar{D}_1 U_3^{-3} = G, \text{ etc.} \tag{84}$$

L'égalité (83) entraîne que U_3^{-3} est élément de l'espace

$$Y_0 = \text{Ker}(\bar{D}_2),$$

et en multipliant à gauche l'équation (84) par un élément de Y_0 , on obtient

$$\forall V_3 \in Y_0, \bar{V}_3 D_1 B_1^{-1} A B_1^{-1} \bar{D}_1 U_3^{-3} = \bar{V}_3 G. \tag{85}$$

La matrice K associée au système linéaire (85) s'obtient à partir de $D_1 B_1^{-1} A B_1^{-1} \bar{D}_1$, en éliminant les lignes et les colonnes correspondant aux degrés de liberté de V_3 qui sont nuls dans Y_0 . Cette matrice est symétrique et définie positive sur Y_0 . En effet,

$$\forall V_3 \in Y_0, \bar{V}_3 D_1 B_1^{-1} A B_1^{-1} \bar{D}_1 V_3 \geq c \| \bar{D}_1 V_3 \|^2 \geq 0, \tag{86}$$

car A et B_1 sont des matrices définies positives. Mais, en revenant à la définition de Y_0 , on a

$$\forall V_3 \in Y_0, \bar{D}_1 V_3 = (\bar{D}_1 + \bar{D}_2)(V_3) = \bar{D} V_3,$$

et d'après l'hypothèse (H1),

$$\bar{D} V_3 = 0 \Rightarrow V_3 = 0,$$

ce qui prouve bien, avec (84), que la matrice K est définie positive.

C'est un exercice classique de calcul matriciel que de montrer que l'on a, au sens des normes de vecteurs, l'estimation d'erreur relative suivante :

$$\left\| \frac{U_3^{-3}}{\varepsilon^3} - U_3 \right\| \leq c\varepsilon^2 \| U_3 \|.$$

Les vecteurs U_α et Σ_{α_3} sont alors approchés par les quantités suivantes (expressions (75) et (76)) :

$$\begin{aligned} U_\alpha &\simeq -\varepsilon^{-3} B_1^{-1} \bar{D}_1 U_3^{-3} \\ \Sigma_{\alpha_3} &\simeq 0. \end{aligned}$$

Remarque 7 : La dimension du système linéaire à résoudre (équation (85)) est inférieure au nombre de sommets internes de la triangulation $\mathcal{T}^{h'}$. La matrice associée à ce système est définie positive et on peut donc utiliser une méthode directe de résolution. Les résultats numériques [21] montrent que cette méthode fournit un « solver » compétitif pour le biharmonique. Nous reviendrons sur l'aspect numérique de cette méthode dans [21].

8. CONCLUSIONS

Considérons l'équation biharmonique

$$\left. \begin{aligned} u_3^0 &\in H_0^2(\omega) \\ \frac{2 E \varepsilon^2}{3(1 - \nu^2)} \Delta u_3^0 &= g_3^+ + g_3^- \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Nous avons montré, au paragraphe 3, que u_3^0 est bien approché par la solution u_3 du modèle de Naghdi-Reissner :

$$\left. \begin{aligned} (u_\alpha, u_3) &\in (H_0^1(\omega))^3, \\ -\frac{2}{3} \varepsilon^2 \partial_\beta \{ (1 - \nu) \gamma_{\alpha\beta}(u) + \nu \gamma_{\mu\mu}(u) \delta_{\alpha\beta} \} + \partial_\alpha u_3 + u_\alpha &= 0, \\ -\frac{E}{1 + \nu} (\Delta u_3 + \partial_\alpha u_\alpha) &= \varepsilon^{-1} (g_3^+ + g_3^-). \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Les estimations d'erreur sont données au théorème 5 :

$$\left. \begin{aligned} \| u_3^0 - u_3 \|_{1,\omega} &\leq c\varepsilon \| u_3^0 \|_{1,\omega} \\ \| \partial_{\alpha\beta} u_3^0 + \gamma_{\alpha\beta}(u) \|_{0,\omega} &\leq c\varepsilon \| u_3^0 \|_{1,\omega} \end{aligned} \right\}$$

Au paragraphe 6, nous proposons un schéma d'approximation du problème (87), tel que, si $u_3^{h'}$ et u_α^h désignent les solutions de ce problème approché (équations (61)-(62)-(63)), les estimations d'erreur suivantes ont lieu (théorème 12) :

$$\left. \begin{aligned} \| u_3 - u_3^{h'} \|_{1,\omega} &\leq ch' \| u_3^0 \|_{1,\omega} \\ \| \partial_\alpha u_3 + u_\alpha^h \|_{0,\omega} &\leq c(\varepsilon^2 + h^2) \| u_3^0 \|_{1,\omega} \\ \| u_\alpha - u_\alpha^h \|_{1,\omega} &\leq ch \| u_3^0 \|_{1,\omega} \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

En regroupant (86)-(87)-(88), nous obtenons ainsi

$$\left. \begin{aligned} \| u_3^0 - u_3^{h'} \|_{1,\omega} &\leq c(h' + \varepsilon) \| u_3^0 \|_{1,\omega} \\ \| \partial_\alpha u_3^0 + u_\alpha^h \|_{0,\omega} &\leq c(\varepsilon + h^2) \| u_3^0 \|_{1,\omega} \\ \| \partial_{\alpha\beta} u_3^0 + \gamma_{\alpha\beta}(u^h) \|_{0,\omega} &\leq c(\varepsilon + h) \| u_3^0 \|_{1,\omega} \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Enfin, nous avons montré, au paragraphe 7, que la résolution du système (61)-(62)-(63) se ramenait à celle d'un système linéaire associé à une matrice définie positive dont la dimension est inférieure au nombre de sommets internes de la triangulation.

Je tiens à remercier O. Pironneau pour ses remarques et suggestions concernant l'Hypothèse (H 1).

RÉFÉRENCES

- [1] P. G. CIARLET, Ph. DESTUYNDER, *A justification of the two dimensional linear plate model*, J. de Mécanique, 18, n° 2 (1979), 315-344.
- [2] Ph. DESTUYNDER, *Analyse du comportement de la solution tridimensionnelle des plaques lorsque l'épaisseur tend vers zéro*, C. R. Acad. Sci. Paris, série A, T. 290 (14 janvier 1980), 119-122.
- [3] Ph. DESTUYNDER, *Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques*, Thèse, Univ. de Paris VI, 1980.
- [4] P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North Holland, Amsterdam and New York, 1978.
- [5] P. LASCAUX, P. LESAIN, *Eléments finis non conformes pour le problème de la flexion des plaques minces*, RAIRO, Anal. Numér., R-19-53 (1975).
- [6] F. BREZZI, *Sur la méthode des éléments finis hybrides pour le problème biharmonique*, Numer. Math., 24 (1975), 103-131.
- [7] O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method*, McGraw Hill, 3rd ed., 1975.
- [8] T. J. R. HUGHES, R. L. TAYLOR, W. KANAHNUCHULCHAI, *A simple efficient finite element for plate bending*, Int. J. Numer. Meth. Eng., 11 (1977), 1529-43.
- [9] I. FRIED, *Shear in C⁰ and C¹ plate bending elements*, Int. J. Solids and Structures, 9 (1973), 449-460.
- [10] R. GLOWINSKI, O. PIRONNEAU, *Sur la résolution numérique du problème de Dirichlet pour l'opération biharmonique par une méthode quasi-directe*, C. R. Acad. Sci. Paris, série A, T. 282 (1976), 223-226.
- [11] R. GLOWINSKI, O. PIRONNEAU, *Sur la résolution numérique du problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique par la méthode du gradient conjugué. Applications*, C. R. Acad. Sci. Paris, série A, T. 282 (1976), 1315-1318.
- [12] R. GLOWINSKI, O. PIRONNEAU, *Sur la résolution via une approximation par éléments finis mixtes du problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique par une méthode « quasi-directe » et diverses méthodes itératives*, Rapport Laboria n° 187, IRIA-LABORIA, Le Chesnay, 1976.

- [13] G. DUVAUT, J. L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [14] V. A. KONDRATIEV, *Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trudsy Moscov. Mat. Obsc., 16 (1967) 209-292.
- [15] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.
- [16] J. L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes*, T. 1, Dunod, Paris, 1968.
- [17] P. G. CIARLET, P. A. RAVIART, *General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods*, Arch. Rat. Mech. Anal., 46 (1972), 177-199.
- [18] F. BREZZI, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers*, RAIRO, R2 (1974), 129-151.
- [19] M. BERCOVIER, O. PIRONNEAU, *Estimations d'erreur pour la résolution du problème de Stokes en éléments finis conformes de Lagrange*, C. R. Acad. Sci. Paris, série A, T. 285 (1977), 1085-1087.
- [20] R. GLOWINSKI, O. PIRONNEAU, *On a mixed finite element approximation of the Stokes problem (1) : Convergence of the approximate solutions*, Numer. Math., 33, n° 4 (1979), 397-424.
- [21] M. AMARA, Ph. DESTUYNDER, *Rapport Interne du Centre de Mathématiques Appliquées*, Ecole Polytechnique.