RAIRO
ANALYSE NUMÉRIQUE

ODILE LEFEBVRE

Paramétrisation et approximation d'un problème non convexe ; application à un problème de gestion de portefeuille

RAIRO – Analyse numérique, tome 17, nº 3 (1983), p. 293-309.
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1983__17_3_293_0>

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 17, n° 3, 1983, p. 293 à 309)

PARAMÉTRISATION ET APPROXIMATION D'UN PROBLÈME NON CONVEXE ; APPLICATION A UN PROBLÈME DE GESTION DE PORTEFEUILLE (*)

par Odile LEFEBVRE [1]

Communiqué par J. CÉA

Résumé. — *Cet article étudie la paramétrisation d'un problème non convexe et non différentiable. On se place dans le cas où la paramétrisation revient à effectuer des coupes dans l'ensemble des contraintes de telle sorte que les restrictions de la fonction objective à ces coupes soient convexes.*

Le problème initial est ainsi ramené à une famille de problèmes convexes dépendant d'un paramètre. Une méthode, faisant intervenir un Lagrangien augmenté obtenu par perturbation, est ensuite étudiée pour résoudre chacun de ces problèmes.

Une application à l'étude d'un problème de gestion de portefeuille est donnée en conclusion.

Abstract. — *This paper studies the parametrisation of a nonconvex and nondifferentiable problem. One takes the case of the parametrisation amounting to carry out cuts in the set of constraints so that the restrictions of the objective function to these cuts are convex.*

The original problem is thus reduced to a family of convex problems depending on a parameter. A method, involving an augmented Lagrangian obtained by perturbation is then studied to solve each of these problems.

An application to the study of a porfolio selection problem is given as a conclusion.

1. INTRODUCTION

Le problème d'optimisation considéré est le suivant :

$$(P) \qquad \operatorname*{Inf}_{x \in K} \{ F(x) + s(g(x)) \}$$

où $F(x) = q(x, f(x)) + r(x, g(x))$
$K = \{ x \in C / f(x) + g(x) = 0 \}$
avec les hypothèses (H1) suivantes :

a) C est un ensemble fermé, non vide de $\mathbb{R}^n$, K est borné et connexe.

(*) Reçu en mai 1982.

[1] Laboratoire d'Analyse Numérique, U.E.R. M.I.P.C., Université de Dijon, 214, rue de Mirande, 21004 Dijon Cedex.

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis, 0399-0516/1983/293/$ 5.00

b) f et g sont des applications continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, s est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

c) q et r sont continues.

(P) est un problème ni convexe, ni différentiable. On peut remarquer que les fonctions f et g interviennent à la fois dans la fonction objective et dans les contraintes. La paramétrisation étudiée dans le paragraphe suivant va permettre de transformer (P).

Le plan de l'article sera le suivant :

2. PARAMÉTRISATION DU PROBLÈME (*P*)

2.1. Problème (*Q*) équivalent à (*P*)

Posons pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\Omega(\alpha) = \{ x \in C / f(x) = \alpha \}$$

$$\Gamma(\alpha) = K \cap \Omega(\alpha) = \{ x \in C / f(x) = - g(x) = \alpha \}$$

$$\varphi(x, \alpha) = q(x, \alpha) + r(x, - \alpha) .$$

LEMME 2.1 : 1) $\Gamma(\alpha) \neq \varnothing \Leftrightarrow \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ *où* $\alpha_1 = \operatorname*{Min}_{x \in K} f(x)$ *et* $\alpha_2 = \operatorname*{Max}_{x \in K} f(x)$

2) $K = \bigcup_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]} \Gamma(\alpha)$.

Démonstration : 1) D'après les hypothèses, K est compact, donc il existe $\overline{x}_1$ et $\overline{x}_2$ dans K tels que :

$$f(\overline{x}_1) = \operatorname*{Min}_{x \in K} f(x) \quad \text{et} \quad f(\overline{x}_2) = \operatorname*{Max}_{x \in K} f(x) .$$

• Soit $\alpha \in [f(\overline{x}_1), f(\overline{x}_2)]$ alors il existe $x \in K$ tel que $f(x) = \alpha$ car K est connexe et f est continue, donc $\Gamma(\alpha)$ est non vide.

• Soit α tel que $K \cap \Omega(\alpha) \neq \emptyset$ alors il existe $x \in K$ tel que $f(x) = \alpha$ donc $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$.

2) D'après ce qui précède $K = K \cap \left(\bigcup_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]} \Omega(\alpha) \right)$ d'où $K = \bigcup_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]} \Gamma(\alpha)$.

Considérons le problème suivant dépendant du paramètre α :

$$(Q_\alpha) \qquad \operatorname*{Inf}_{x \in \Gamma(\alpha)} \varphi(x, \alpha) = h(\alpha)$$

et (Q) le problème :

$$\operatorname*{Inf}_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]} \{ h(\alpha) + s(-\alpha) \} .$$

PROPOSITION 2.1 : 1) *Soit $\overline{x}$ une solution de (P) alors $f(\overline{x})$ est solution de (Q).*

2) *Soit $\overline{\alpha}$ une solution de (Q) alors toute solution de $(Q_{\overline{\alpha}})$ est solution de (P). Les problèmes (P) et (Q) seront dits équivalents.*

Démonstration : 1) Soit $\overline{x}$ une solution de (P), $\overline{x}$ existe (K compact, fonction objective continue).

Posons $\overline{\alpha} = f(\overline{x})$, donc $\overline{x} \in \Gamma(\overline{\alpha})$, $g(\overline{x}) = -\overline{\alpha}$ et

$$\varphi(\overline{x}, \overline{\alpha}) + s(-\overline{\alpha}) \leqslant F(x) + s(g(x)) \qquad \forall x \in K$$

d'où, en particulier :

$$\varphi(\overline{x}, \overline{\alpha}) + s(-\overline{\alpha}) \leqslant \varphi(x, \overline{\alpha}) + s(-\overline{\alpha}) \qquad \forall x \in \Gamma(\overline{\alpha})$$

donc $\overline{x}$ est solution de $(Q_{\overline{\alpha}})$: $h(\overline{\alpha}) = \varphi(\overline{x}, \overline{\alpha})$.

De plus, pour tout α de $[\alpha_1, \alpha_2]$ on a

$$h(\overline{\alpha}) + s(-\overline{\alpha}) \leqslant \operatorname*{Inf}_{x \in \Gamma(\alpha)} \varphi(x, \alpha) + s(-\alpha) = h(\alpha) + s(-\alpha) \quad (\text{car } \Gamma(\alpha) \subset K),$$

donc $\overline{\alpha}$ est solution de (Q).

2) Soit $\overline{\alpha}$ une solution de (Q) alors $\overline{\alpha} \in [\alpha_1, \alpha_2]$ et il existe $x_{\overline{\alpha}} \in C$ tel que :

$$\overline{\alpha} = f(x_{\overline{\alpha}}) = -g(x_{\overline{\alpha}}) \quad \text{et} \quad h(\overline{\alpha}) = F(x_{\overline{\alpha}})$$

car pour tout α, le problème (Q_α) a au moins une solution x_α ($\Gamma(\alpha)$ compact et φ continue).

D'où

$$F(x_{\bar{\alpha}}) + s(g(x_{\bar{\alpha}})) \leqslant h(\alpha) + s(-\alpha) \qquad \forall \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$$
$$\leqslant \varphi(x, \alpha) + s(-\alpha) = F(x) + s(g(x))$$
$$\forall x \in \Gamma(\alpha) \qquad \forall \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$$

donc $x_{\bar{\alpha}}$ est solution de $(P)\left(K = \bigcup_{\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]} \Gamma(\alpha)\right)$.

2.2. Transformation du problème (Q)

Considérons les hypothèses supplémentaires suivantes, dans le but de montrer que, pour certaines valeurs du paramètre α, le problème (Q_α) est équivalent à un problème convexe.

Hypothèses (H2) :

a) f est linéaire, g est convexe et $g(0) < 0$

b) C est un cône convexe de sommet 0

c) les ensembles $\Omega(1)$ et $\tilde{K} = \{ x \in C / f(x) + g(x) \leqslant 0 \}$ sont bornés

d) l'application $x \to \varphi(x, \alpha)$ est strictement convexe, l'application $(x, \alpha) \to \varphi(x, \alpha)$ est homogène de degré 0, l'application s est croissante.

Remarques : 1) $\tilde{K}$ est un convexe, compact, non vide.

2) $\Omega(1)$ est un convexe compact.

LEMME 2.2 : *Soit $x \in C$ alors il existe $\mu > 0$ unique tel que $\mu x \in K$.*

Démonstration : Soit $K' = \{ x \in \mathbb{R}^n / f(x) + g(x) \leqslant 0 \}$, K' est un convexe fermé tel que $0 \in \mathring{K}'$ et $K = C \cap Fr(K')$.

1) Soit $x \in C$ tel que $x \notin K'$, alors il existe $y \in Fr(K') \cap [0, x]$ unique donc il existe $\mu \in]0, 1]$ unique tel que $y = \mu x \in Fr(K')$ ($\mu \neq 0$ car $0 \notin Fr(K')$), $[0, \mu x] \subset K'$ et $]\mu x, x] \subset R^n \setminus K'$ de plus $\mu x \in C$ donc $\mu x \in K$ et $\lambda x \notin K$ si $\lambda \neq \mu$ [3].

2) Soit $x \in C$ tel que $x \in K'$, alors il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda x \notin K'$ (car $K' \cap C = \tilde{K}$ est borné), on se ramène au cas précédent.

LEMME 2.3 : 1) *Soit z^* la solution du problème convexe $\operatorname{Inf}_{x \in \Omega(1)} \varphi(x, 1)$ alors αz^* est la solution de $\operatorname{Inf}_{x \in \Omega(\alpha)} \varphi(x, \alpha)$.*

2) *Soit α^* tel que $\alpha^* z^* \in K$, alors $\alpha^* z^*$ est solution de $\operatorname{Inf}_{x \in K} F(x)$.*

Démonstration : 1) D'après les hypothèses (H2), z^* existe et

$$\varphi(\alpha z^*, \alpha) = \varphi(z^*, 1) \leqslant \varphi(z, 1) \qquad \forall z \in \Omega(1)$$

ou
$$\varphi(\alpha z^*, \alpha) \leqslant \varphi\left(\frac{x}{\alpha}, 1\right) = \varphi(x, \alpha) \qquad \forall x \in \Omega(\alpha) \quad (f \text{ linéaire})$$

donc αz^* est la solution de $\operatorname*{Inf}_{x \in \Omega(\alpha)} \varphi(x, \alpha)$ ($\alpha z^* \in \Omega(\alpha)$).

2) α^* existe d'après le lemme 2.2 et $\alpha^* z^* \in K \cap \Omega(\alpha^*)$ donc

$$f(\alpha^* z^*) = -g(\alpha^* z^*) = \alpha^*$$

et

$$F(\alpha^* z^*) = \varphi(\alpha^* z^*, \alpha^*) \leqslant \varphi\left(\frac{x}{f(x)}, 1\right) \qquad \forall x \in K$$

d'où

$$\begin{aligned} F(\alpha^* z^*) &\leqslant q(x, f(x)) + r(x, -f(x)) \qquad \forall x \in K \\ &\leqslant F(x) \qquad \forall x \in K \end{aligned}$$

donc $\alpha^* z^*$ est solution du problème $\operatorname*{Inf}_{x \in K} F(x)$.

PROPOSITION 2.2 : 1) *Soit* $\bar{x}$ *une solution de* (P) *telle que* $f(\bar{x}) = \bar{\alpha}$ *alors* $\bar{\alpha} \in [\alpha^*, \alpha_2]$ (α^* *défini dans le lemme* 2.3).

2) *Pour tout* α *de* $[\alpha^*, \alpha_2]$, (Q_α) *est équivalent au problème convexe* $(\tilde{Q}_\alpha)$ *défini par* $\operatorname*{Inf}_{x \in \tilde{\Gamma}(\alpha)} \varphi(x, \alpha) = \tilde{h}(\alpha)$ *où* $\tilde{\Gamma}(\alpha) = \{ x \in C / f(x) + g(x) \leqslant 0$ *et* $f(x) = \alpha \}$

3) $\forall \alpha \in [\alpha^*, \alpha_2]$, (Q_α) *a une solution unique.*

Démonstration : 1) Soit $\bar{x}$ une solution de (P) telle que $f(\bar{x}) = \bar{\alpha}$ alors

$$F(\bar{x}) + s(-\bar{\alpha}) \leqslant F(x) + s(g(x)) \qquad \forall x \in K$$

en particulier

$$\begin{aligned} F(\bar{x}) + s(-\bar{\alpha}) &\leqslant F(\alpha^* z^*) + s(-\alpha^*) \quad \text{car} \quad \alpha^* z^* \in K \\ &\leqslant F(x) + s(-\alpha^*) \quad \forall x \in K \quad \text{d'après le lemme 2.3}, \end{aligned}$$

d'où $s(-\bar{\alpha}) \leqslant s(-\alpha^*)$ et $\alpha^* \leqslant \bar{\alpha}$ car s est croissante.

D'autre part $f(\bar{x}) \in [\alpha_1, \alpha_2]$ d'après le lemme 2.1 donc $\bar{\alpha} \in [\alpha^*, \alpha_2]$.

2) Soit $\alpha \in [\alpha^*, \alpha_2]$.

a) Soit $\bar{y}$ la solution de $(\tilde{Q}_\alpha)$ qui est un problème strictement convexe donc a une solution unique, alors

$$\bar{y} \in \tilde{\Gamma}(\alpha) \quad \text{et} \quad \varphi(\bar{y}, \alpha) \leqslant \varphi(y, \alpha) \qquad \forall y \in \tilde{\Gamma}(\alpha).$$

Supposons que $\bar{y} \notin \Gamma(\alpha)$ alors $(f + g)(\bar{y}) < 0$.

Soit z^* l'élément défini dans le lemme 2.3 alors

$$(f + g)(\alpha z^*) \geqslant 0 \qquad (\alpha \geqslant \alpha^*)$$

donc il existe $\lambda \in [0, 1[$ tel que si $z = \lambda\bar{y} + (1 - \lambda)\alpha z^*$ on ait $(f + g)(z) = 0$ et $f(z) = \alpha$ donc $z \in \Gamma(\alpha)$;

- si $\lambda \neq 0$ alors

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{y}, \alpha) &< \lambda\varphi(\bar{y}, \alpha) + (1 - \lambda)\varphi(\alpha z^*, \alpha) \\ &< \varphi(\bar{y}, \alpha)\end{aligned}$$

d'où une contradiction donc $\bar{y} \in \Gamma(\alpha)$;

- si $\lambda = 0$ alors

$$\varphi(\bar{y}, \alpha) \leqslant \varphi(\alpha^* z^*, \alpha^*) \leqslant \varphi(\bar{y}, \alpha)$$

d'où $\alpha^* z^*$ est solution de $(\tilde{Q}_{\alpha^*})$ donc

$$\bar{y} = \alpha^* z^* \in \Gamma(\alpha^*).$$

Finalement $\bar{y}$ est solution de (Q_α).

b) Soit $\bar{y}$ une solution de (Q_α) alors $\bar{y} \in \Gamma(\alpha) \subset \tilde{\Gamma}(\alpha)$ et

$$\varphi(\bar{y}, \alpha) \leqslant \varphi(y, \alpha) \qquad \forall y \in \Gamma(\alpha).$$

Supposons qu'il existe y_0 tel que $y_0 \in \tilde{\Gamma}(\alpha)$, $y_0 \notin \Gamma(\alpha)$ et

$$\varphi(y_0, \alpha) < \varphi(\bar{y}, \alpha)$$

alors $(f + g)(y_0) < 0$ et $(f + g)(\alpha z^*) \geqslant 0$ donc il existe $\lambda \in [0, 1[$ tel que si $z = \lambda y_0 + (1 - \lambda)\alpha z^*$ on ait $(f + g)(z) = 0$ et $f(z) = \alpha$ donc $z \in \Gamma(\alpha)$;

- si $\lambda \neq 0$

$$\varphi(\bar{y}, \alpha) < \lambda\varphi(y_0, \alpha) + (1 - \lambda)\varphi(\alpha z^*, \alpha) \leqslant \varphi(\bar{y}, \alpha)$$

d'où une contradiction ;

• si $\lambda = 0$

$$\alpha = \alpha^* , \qquad \varphi(\bar{y}, \alpha^*) = \varphi(\alpha^* z^*, \alpha^*)$$

donc $\bar{y} = \alpha^* z^*$.

Dans les deux cas $\bar{y}$ est solution de $(\tilde{Q}_\alpha)$. Ainsi toutes les solutions de (Q_α) sont confondues et (Q_α) a une solution unique pour tout α de $[\alpha^*, \alpha_2]$.

Considérons le problème $(\tilde{Q})$ suivant :

$$\operatorname*{Inf}_{\alpha \in [\alpha^*, \alpha_2]} \{ \tilde{h}(\alpha) + s(-\alpha) \} .$$

PROPOSITION 2.3 : *Les problèmes (Q) et $(\tilde{Q})$ sont équivalents; donc les problèmes (P) et $(\tilde{Q})$ sont équivalents au sens de la proposition* 2.1.

Démonstration : Soit $\bar{\alpha}$ une solution de (Q) alors d'après les propositions 2.1 et 2.2 $\bar{\alpha} \in [\alpha^*, \alpha_2]$ donc

$$\begin{aligned}\operatorname*{Inf}_{\beta \in [\alpha_1, \alpha_2]} \{ h(\beta) + s(-\beta) \} &= \operatorname*{Inf}_{\beta \in [\alpha^*, \alpha_2]} \{ h(\beta) + s(-\beta) \} \\ &= \operatorname*{Inf}_{\beta \in [\alpha^*, \alpha_2]} \{ \tilde{h}(\beta) + s(-\beta) \} \quad \text{(proposition 2.2)} .\end{aligned}$$

Les problèmes (Q) et $(\tilde{Q})$ sont donc équivalents.

Le problème (P) initial est ainsi ramené à une famille de problèmes convexes $(\tilde{Q}_\alpha)$ dépendant du paramètre α.

Considérons le problème (P') suivant :

$$\begin{cases} \operatorname*{Inf}_{x \in \tilde{K}} \{ q(x, f(x)) + r(x, -f(x)) + s(-f(x)) \} \\ f(x) \in [\alpha^*, \alpha_2] . \end{cases}$$

PROPOSITION 2.4 : *Les problèmes (P) et (P') sont équivalents.*

Démonstration : Montrons pour cela que (P') est équivalent à $(\tilde{Q})$ (au sens de la proposition 2.1).

1) Soit $\bar{x}$ une solution de (P') alors

$$\bar{x} \in C , \quad f(\bar{x}) + g(\bar{x}) \leqslant 0 , \quad f(\bar{x}) = \bar{\alpha} \in [\alpha^*, \alpha_2]$$

et

$$q(\bar{x}, \bar{\alpha}) + r(\bar{x}, -\bar{\alpha}) + s(-\bar{\alpha}) \leqslant q(x, f(x)) + r(x, -f(x)) + s(-f(x)) \qquad \forall x \in \tilde{K} , \quad f(x) \in [\alpha^*, \alpha_2]$$

en particulier, pour tout x de $\tilde{\Gamma}(\bar{\alpha})$ on a :

$$\varphi(\bar{x}, \bar{\alpha}) + s(-\bar{\alpha}) \leqslant \varphi(x, \bar{\alpha}) + s(-\bar{\alpha})$$

donc $\bar{x}$ est solution de $(\tilde{Q}_{\bar{\alpha}})$.

$$\begin{aligned} h(\bar{\alpha}) + s(-\bar{\alpha}) &\leqslant q(x, \alpha) + r(x, -\alpha) + s(-\alpha) \quad \forall x \in \tilde{\Gamma}(\alpha), \quad \alpha \in [\alpha^*, \alpha_2] \\ &\leqslant \operatorname*{Inf}_{x \in \tilde{\Gamma}(\alpha)} \varphi(x, \alpha) + s(-\alpha) \quad \forall \alpha \in [\alpha^*, \alpha_2] \\ &= h(\alpha) + s(-\alpha) \quad \forall \alpha \in [\alpha^*, \alpha_2] \end{aligned}$$

donc $\bar{\alpha}$ est solution de $(\tilde{Q})$.

2) Soit $\bar{\alpha}$ une solution de $(\tilde{Q})$, $\bar{\alpha} \in [\alpha^*, \alpha_2]$ soit $x_{\bar{\alpha}}$ la solution de $(Q_{\bar{\alpha}})$ alors

$$f(x_{\bar{\alpha}}) = -g(x_{\bar{\alpha}}) = \bar{\alpha},$$

$$q(x_{\bar{\alpha}}, f(x_{\bar{\alpha}})) + r(x_{\bar{\alpha}}, -f(x_{\bar{\alpha}})) + s(-f(x_{\bar{\alpha}})) \leqslant q(x, \alpha) + r(x, -\alpha) + s(-\alpha)$$
$$\forall x \in \tilde{\Gamma}(\alpha) \qquad \forall \alpha \in [\alpha^*, \alpha_2].$$

Mais $\{ x \in \tilde{K}/f(x) \in [\alpha^*, \alpha_2] \} = \bigcup_{\alpha \in [\alpha^*, \alpha_2]} [\tilde{K} \cap \Omega(\alpha)] = \bigcup_{\alpha \in [\alpha^*, \alpha_2]} \tilde{\Gamma}(\alpha)$. Donc $x_{\bar{\alpha}}$ est solution de (P').

Cette proposition a ainsi permis de montrer que (P) est équivalent à un problème dont l'ensemble des contraintes est convexe et où la restriction de la fonction objective à chaque hyperplan d'équation $f(x) = \alpha$ est convexe.

2.3. Propriétés de la fonction *h*

LEMME 2.4 : *La fonction h est croissante sur* $[\alpha^*, \alpha_2]$.

Démonstration : Soient α et β dans $[\alpha^*, \alpha_2]$ tels que $\alpha < \beta$ alors

$$\begin{aligned} h(\beta) = \operatorname*{Inf}_{x \in \tilde{\Gamma}(\beta)} \varphi(x, \beta) &= \operatorname*{Inf}_{x \in \tilde{\Gamma}(\beta)} \varphi\left(\frac{\alpha}{\beta} x, \alpha\right) \\ &= \operatorname*{Inf}_{y \in \frac{\alpha}{\beta}\tilde{\Gamma}(\beta)} \varphi(y, \alpha). \end{aligned}$$

Mais $0 < \alpha < \beta$ donc $\frac{\alpha}{\beta} \in]0, 1[$ et

$$\begin{aligned} (f + g)\left(\frac{\alpha}{\beta} x\right) &\leqslant \frac{\alpha}{\beta} f(x) + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) g(0) + \frac{\alpha}{\beta} g(x) \\ &\leqslant \frac{\alpha}{\beta} (f + g)(x) \qquad (g(0) < 0) \end{aligned}$$

d'où $\frac{\alpha}{\beta}\tilde{\Gamma}(\beta) \subset \tilde{\Gamma}(\alpha)$ et

$$h(\beta) \geqslant \operatorname*{Inf}_{x \in \tilde{\Gamma}(\alpha)} \varphi(x, \alpha) = h(\alpha).$$

La fonction h est donc croissante.

Soit :

$$\tilde{\Gamma}(\alpha) = \{ x \in C / f(x) + g(x) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \alpha \}$$

$\tilde{\Gamma}$ est une multi-application de $[\alpha^*, \alpha_2]$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$.

LEMME 2.5 : *La multi-application* $\tilde{\Gamma}$ *est semi-continue inférieurement et supérieurement sur* $[\alpha^*, \alpha_2]$.

Démonstration : 1) Montrons que $\tilde{\Gamma}$ est semi-continue inférieurement en $\beta \in [\alpha^*, \alpha_2]$.

Nous utiliserons la propriété donnée par Huard dans [5]. La démonstration est alors plus simple que celle que nous avons donnée dans [6].

Soit $\{ \beta_n \}$ une suite telle que

$$\begin{cases} \beta_n \in [\alpha^*, \alpha_2] \quad \forall n \\ \text{et} \\ \beta_n \to \beta \quad \text{quand} \quad n \to +\infty \end{cases}$$

soit $x_0 \in \tilde{\Gamma}(\beta)$.

Définissons une suite $\{ x_n \}$ de la manière suivante :

- si $\beta_n \leqslant \beta \quad x_n = \frac{\beta_n}{\beta} x_0$
- si $\beta_n > \beta \quad x_n = \lambda_n b + (1 - \lambda_n) x_0$ où $\lambda_n = \frac{\beta_n - \beta}{\alpha_2 - \beta}$ et $b \in K$ tel que

$\alpha_2 = \operatorname*{Max}_{x \in K} f(x) = f(b)$ (b existe d'après la démonstration du lemme 2.1).

Alors $\{ x_n \}$ converge vers x_0 quand n tend vers l'infini ; montrons que $x_n \in \tilde{\Gamma}(\beta_n) \quad \forall n$.

a) Soit n tel que $\beta_n \leqslant \beta$ alors $x_n \in \tilde{K}$ car par hypothèse $0 \in \tilde{K}$, $x_0 \in \tilde{K}$ et $\tilde{K}$ est convexe, de plus

$$f(x_n) = \frac{\beta_n}{\beta} f(x_0) = \beta_n \quad \text{donc} \quad x_n \in \tilde{\Gamma}(\beta_n).$$

b) Soit n tel que $\beta_n > \beta$ alors $\beta \neq \alpha_2$ et $\lambda_n = \frac{\beta_n - \beta}{\alpha_2 - \beta} \in]0, 1]$ donc $x_n \in \tilde{K}$

$$f(x_n) = \lambda_n[f(b) - f(x_0)] + f(x_0) = \beta_n \quad \text{donc} \quad x_n \in \tilde{\Gamma}(\beta_n).$$

La multiplication $\tilde{\Gamma}$ est donc semi-continue inférieurement en $\beta \in [\alpha^*, \alpha_2]$, [1, 4, 5, 7].

2) $\tilde{\Gamma}$ est semi-continue supérieurement en $\beta \in [\alpha^*, \alpha_2]$ en effet; [1, 4, 5, 7] :

a) $\tilde{\Gamma}$ est uniformément bornée près de β car $\bigcup_{\alpha \in [\alpha^*, \alpha_2]} \tilde{\Gamma}(\alpha) \subset \tilde{K}$ borné (hypothèse H2).

b)$\tilde{\Gamma}$ est fermée en β car $\tilde{\Gamma}(\beta) = \Omega(\beta) \cap \tilde{K}$ où Ω est une multi-application fermée en β et $\tilde{K}$ est un ensemble fermé.

LEMME 2.6 : *La fonction h est continue sur* $[\alpha^*, \alpha_2]$.

Démonstration : h est continue en $\beta \in [\alpha^*, \alpha_2]$ car [4] :

- $\tilde{\Gamma}$ est semi-continue inférieurement et supérieurement en β.
- $\tilde{\Gamma}(\beta)$ est compact dans $\mathbb{R}^n$.
- φ est continue sur $\tilde{\Gamma}(\beta) \times \{\beta\}$.

Remarque : L'application $\alpha \to x_\alpha$ est continue sur $[\alpha^*, \alpha_2]$.

3. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME

3.1. Discrétisation de (*Q*)

Le problème (*Q*) est de la forme :

$$\operatorname*{Inf}_{\alpha \in [\alpha^*, \alpha_2]} [h(\alpha) + s(-\alpha)] = \operatorname*{Inf}_{\alpha \in [\alpha^*, \alpha_2]} \left[\operatorname*{Inf}_{x \in \tilde{\Gamma}(\alpha)} \varphi(x, \alpha) + s(-\alpha) \right].$$

En général, la fonction h n'est pas convexe, nous utilisons pour résoudre (*Q*) une méthode de discrétisation.

Pour p fixé, posons

$$\theta_p = \frac{\alpha_2 - \alpha^*}{p} \quad \text{et} \quad \beta_j = \alpha^* + j\theta_p \qquad 0 \leqslant j \leqslant p .$$

Nous déterminons alors, par une méthode exposée dans le paragraphe suivant, les valeurs de h en un nombre fini de points. Soit $\bar{\beta}_p$ défini par :

$$h(\bar{\beta}_p) + s(-\bar{\beta}_p) = \operatorname*{Min}_{0 \leqslant j \leqslant p} [h(\beta_j) + s(-\beta_j)] .$$

PROPOSITION 3.1 : *La fonction s est supposée lipschitzienne de constante a. Soit* $\bar{\alpha}$ *une solution de* (*Q*), *alors*

$$h(\bar{\alpha}) + s(-\bar{\alpha}) \leqslant h(\bar{\beta}_p) + s(-\bar{\beta}_p) \leqslant h(\bar{\alpha}) + s(-\bar{\alpha}) + a\theta_p .$$

Et toute valeur d'adhérence de la suite $\{\bar{\beta}_p\}$ *est solution de* (*Q*).

Démonstration : Soit $\alpha \in [\alpha^*, \alpha_2[$, alors il existe j tel que $\alpha \in [\beta_j, \beta_{j+1}[$ donc

$$\alpha = \mu\beta_j + (1 - \mu)\beta_{j+1} \quad \text{où} \quad \mu \in]0, 1] \quad \text{et} \quad 0 \leqslant j < p .$$

Par définition de $\overline{\beta}_p$ et sachant que h est croissante sur $[\alpha^*, \alpha_2]$, on obtient pour tout α de $[\beta_j, \beta_{j+1}[$:

$$h(\overline{\beta}_p)+s(-\overline{\beta}_p) \leqslant h(\beta_j)+s(-\beta_j) \leqslant h(\alpha)+s(-\alpha)+[s(-\beta_j)-s(-\alpha)] \qquad \forall j .$$

De plus s est croissante et lipschitzienne, par hypothèse donc

$$s(-\beta_j) - s(-\alpha) \leqslant a(1 - \mu)\,\theta_p \leqslant a\theta_p .$$

Soit $\overline{\alpha}$ une solution de (Q), alors

$$h(\overline{\alpha}) + s(-\overline{\alpha}) \leqslant h(\overline{\beta}_p) + s(-\overline{\beta}_p) \leqslant h(\overline{\alpha}) + s(-\overline{\alpha}) + a\theta_p$$

(si $\overline{\alpha} = \alpha_2$ les inégalités sont évidentes.)

D'autre part, quand $p \to +\infty$, $\theta_p \to 0$ donc

$$\lim_{p \to +\infty} [h(\overline{\beta}_p) + s(-\overline{\beta}_p)] = h(\overline{\alpha}) + s(-\overline{\alpha}) .$$

La suite $\{\overline{\beta}_p\}$ étant bornée, elle admet une valeur d'adhérence $\overline{\beta}$ dans $[\alpha^*, \alpha_2]$. D'après le lemme 2.6, h est continue, s est continue par hypothèse donc

$$h(\overline{\beta}) + s(-\overline{\beta}) = h(\overline{\alpha}) + s(-\overline{\alpha})$$

et $\overline{\beta}$ est solution de (Q) ; on en déduit, d'après la proposition 2.1 que $x_{\overline{\beta}}$ est solution de (P).

3.2. Méthode de résolution des problèmes intermédiaires

Le problème $(\tilde{Q}_\alpha)$ est de la forme :

$$\begin{cases} \operatorname*{Inf}_{x \in C} \varphi(x, \alpha) & \\ g_1(x) \leqslant 0 & \text{où} \quad g_1(x) = f(x) + g(x) \\ g_2(x, \alpha) = 0 & \qquad\;\; g_2(x, \alpha) = f(x) - \alpha . \end{cases}$$

On fait les hypothèses supplémentaires suivantes :

(H3) *a*) $\forall \alpha \in]\alpha^*, \alpha_2[$, $\exists \overline{z} \in \overset{\circ}{C}$ tel que $g_1(\overline{z}) < 0$ et $g_2(\overline{z}, \alpha) = 0$.

b) g est lipschitzienne de constante M et $\lim_{\|x\| \to +\infty} g(x) = +\infty$.

c) $x \to \varphi(x, \alpha)$ est fortement convexe, Gateaux dérivable de gradient noté $\nabla_x \varphi$.

Soient $S = \{ \Lambda = (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 / \mu \geqslant 0 \}$

$$\begin{array}{ll} G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 & \\ (x, \alpha) & (g_1(x), g_2(x, \alpha)) = G(x, \alpha) . \end{array}$$

Le Lagrangien classique est défini par :

$$\begin{aligned} L(\alpha ; x, \Lambda) &= \varphi(x, \alpha) + \mu g_1(x) + \nu g_2(x, \alpha) \\ &= \varphi(x, \alpha) + (\Lambda, G(x, \alpha)) . \end{aligned}$$

La méthode d'Uzawa utilisée pour résoudre $(\tilde{Q}_\alpha)$ dans un cas particulier (problème de gestion de portefeuille) n'ayant pas donné de résultats satisfaisants, nous avons introduit une modification du Lagrangien qui nous a permis d'améliorer notablement les résultats numériques.

Cette modification a été obtenue en perturbant convenablement le problème $(\tilde{Q}_\alpha)$:

$$\begin{cases} \operatorname*{Inf}_{x \in C} \varphi(x, \alpha) & \\ g_1(x) \leqslant -p & \text{où} \quad (p, q) \in \mathbb{R}^2 . \\ g_2(x, \alpha) = -q & \end{cases}$$

Le Lagrangien $\mathscr{L}(\alpha ; x, \Lambda, \tau)$ de $(\tilde{Q}_\alpha)$, relativement aux perturbations considérées, est défini à partir de la fonction Φ de perturbation donnée par [2] :

$$\Phi(x ; p, q) = \varphi(x, \alpha) + \chi(x, p) + \chi(x, q) + \tau(p - q)^2$$

où τ est un paramètre positif donné :

$$\chi(x, p) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad g_1(x) \leqslant -p \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \qquad \chi(x, q) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad g_2(x, \alpha) = -q \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $\mathscr{L}(\alpha ; x, \Lambda, \tau) = -(\Phi_x)^* (\mu, \nu)$ où $(\Phi_x)^*$ est la polaire de l'application $(p, q) \to \Phi(x ; p, q)$:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(\alpha ; x, \Lambda, \tau) &= - \sup_{p,q} \{ p\mu + q\nu - \Phi(x ; p, q) \} \\ &= \varphi(x, \alpha) + \mu g_1(x) + \nu g_2(x, \alpha) \\ &\qquad + \operatorname*{Inf}_{p \geqslant 0} \{ p\mu + \tau(p + g_1(x) - g_2(x, \alpha))^2 \} . \end{aligned}$$

On pose $g_3(x, \alpha) = g_1(x) - g_2(x, \alpha)$:

$$\mathscr{L}(\alpha ; x, \Lambda, \tau) = \varphi(x, \alpha) + \mu g_1(x) + \nu g_2(x, \alpha) + \mu\left[-\frac{\mu}{2\tau} - g_3(x, \alpha)\right]^+ + \tau\left\{g_3(x, \alpha) + \left[-\frac{\mu}{2\tau} - g_3(x, \alpha)\right]^+\right\}^2$$

$$= L(\alpha ; x, \Lambda) + \psi(\alpha ; x, \Lambda, \tau) .$$

Ce Lagrangien apparaît donc comme un Lagrangien « augmenté », que l'on utilise pour résoudre par dualité $(\tilde{Q}_\alpha)$.

Il est distinct du Lagrangien augmenté de Rockafellar [10].

Description de l'algorithme de résolution de $(\tilde{Q}_\alpha)$.

① Soit $\Lambda^0 = (\mu^0, \nu^0) \in S$ donné, ainsi que $\tau_0 > 0$.

② Λ^p et τ^p étant déterminés, y^p est défini comme étant solution du problème :

$$\operatorname*{Inf}_{x \in C} \mathscr{L}(\alpha ; x, \Lambda^p, \tau^p) .$$

③ Λ^{p+1} est alors défini par :

$$\mu^{p+1} = [\mu^p + \rho g_1(y^p)]^+ \quad \text{et} \quad \nu^{p+1} = \nu^p + \rho g_2(y^p, \alpha)$$
$$\tau^{p+1} = w.\tau^p$$

où w et ρ sont des constantes positives fixées.

PROPOSITION 3.2 : 1) *Il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\| G(x, \alpha) - G(y, \alpha) \| \leqslant \delta \| x - y \| \qquad \forall x, \forall y .$$

2) *Pour tout* p, y^p *existe.*

3) *La suite* $\{ y^p \}$ *converge vers la solution* x_α *du problème* $(\tilde{Q}_\alpha)$ *pour* ρ *vérifiant* $0 < \rho < \frac{\gamma}{\delta^2}$.

Démonstration : 1)

$$\| G(x, \alpha) - G(y, \alpha) \|^2 = | g_1(x) - g_1(y) |^2 + | g_2(x, \alpha) - g_2(y, \alpha) |^2 \leqslant$$
$$\leqslant (| f(x-y) | + | g(x) - g(y) |)^2 + | f(x-y) |^2 \leqslant [(\| f \|^2 + M)^2 + M^2] \| x-y \|^2$$

donc $$\delta^2 = (\| f \|^2 + M)^2 + M^2 .$$

2) Soit

$$\begin{aligned} l(x) &= \mathscr{L}(\alpha\,; x, \Lambda, \tau) \quad \text{où} \quad \Lambda \in S \quad \text{et} \quad \tau > 0 \\ &= L(\alpha\,; x, \Lambda) + \psi(\alpha\,; x, \Lambda, \tau) \end{aligned}$$

où

$$\psi(\alpha\,; x, \Lambda, \tau) = \mu\left[-\frac{\mu}{2\tau} - g_3(x, \alpha)\right]^+ + \tau\left(g_3(x, \alpha) + \left[\frac{-\mu}{2\tau} - g_3(x, \alpha)\right]^+\right)^2 \geqslant 0$$

- l est continue sur C,
- $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} l(x) = +\infty$ car $\varphi(x, \alpha)$ est fortement convexe par rapport à x,

f est linéaire et $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} g(x) = +\infty$ ($\mu \geqslant 0$ et $\tau > 0$).
Le problème $\operatorname*{Inf}\limits_{x \in C} l(x)$ admet donc une solution pour tout $\Lambda \in S$ et $\tau > 0$.
De plus on peut remarquer que l est convexe car l'application

$$\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{est convexe [2]}.$$

3) y^p solution du problème $\operatorname*{Inf}\limits_{x \in C} \mathscr{L}(\alpha\,; x, \Lambda^p, \tau^p)$ vérifie

$$\begin{aligned} \varphi(x, \alpha) - \varphi(y^p, \alpha) + \mu^p[g_1(x) - g_1(y^p)] + \nu^p[g_2(x, \alpha) - g_2(y^p, \alpha)] \\ + \psi(\alpha\,; x, \Lambda^p, \tau^p) - \psi(\alpha\,; y^p, \Lambda^p, \tau^p) \geqslant 0 \qquad \forall x \in C\,. \quad (1) \end{aligned}$$

Soit $(x_\alpha, \Lambda_\alpha)$ un point selle de $L(\alpha\,; x, \Lambda)$ sur $C \times S$, ce point existe [9] et x_α est solution de (Q_α) donc

$$g_1(x_\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad g_2(x_\alpha, \alpha) = 0 \quad \text{donc} \quad g_3(x_\alpha, \alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(\alpha\,; x_\alpha, \Lambda^p, \tau^p) = 0$$
$$\text{car} \quad \mu^p \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \tau^p > 0 \quad \text{d'où} \quad \psi(\alpha\,; x, \Lambda^p, \tau^p) - \psi(\alpha\,; x_\alpha, \Lambda^p, \tau^p) \geqslant 0 \qquad \forall x \in C\,. \quad (2)$$

De plus g_1 et g_2 étant convexes par rapport à x, φ étant convexe et Gateaux dérivable par rapport à x, $(x_\alpha, \Lambda_\alpha)$ vérifie

$$(\nabla_x \varphi(x_\alpha, \alpha), x - x_\alpha) + \mu_\alpha[g_1(x) - g_1(x_\alpha)] + \nu_\alpha[g_2(x, \alpha) - g_2(x_\alpha, \alpha)] \geqslant 0 \qquad \forall x \in C\,. \quad (3)$$

On ajoute membre à membre les inégalités (2) et (3), on remplace x par y^p dans l'inégalité obtenue, x par x_α dans (1) et on ajoute membre à membre :

$$\begin{aligned} \varphi(x_\alpha, \alpha) - \varphi(y^p, \alpha) + (\nabla_x \varphi(x_\alpha, \alpha), y^p - x_\alpha) + (\mu_\alpha - \mu^p)\,[g_1(y^p) - g_1(x_\alpha)] \\ + (\nu_\alpha - \nu^p)\,[g_2(y^p, \alpha) - g_2(x_\alpha, \alpha)] \geqslant 0\,. \qquad (4) \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H3) c), il existe $\gamma > 0$ telle que

$$\varphi(y^p, \alpha) - \varphi(x_\alpha, \alpha) - (\nabla_x \varphi(x_\alpha, \alpha), y^p - x_\alpha) \geqslant \frac{\gamma}{2} \| y^p - x_\alpha \|^2 .$$

En ajoutant cette inégalité à l'inégalité (4), on obtient :

$$(\Lambda_\alpha - \Lambda^p, G(y^p, \alpha) - G(x_\alpha, \alpha)) \geqslant \frac{\gamma}{2} \| y^p - x_\alpha \|^2 .$$

D'autre part $L(\alpha; x_\alpha, \Lambda) \leqslant L(\alpha; x_\alpha, \Lambda_\alpha)$ $\forall \Lambda \in S$
donc $\Lambda_\alpha = P_s(\Lambda_\alpha + \rho G(x_\alpha, \alpha))$ $\forall \rho \geqslant 0$ (P_s : opérateur de projection sur S)
et par définition : $\Lambda^{p+1} = P_s(\Lambda^p + \rho G(y^p, \alpha))$ d'où

$$\begin{aligned} \| \Lambda^{p+1} - \Lambda_\alpha \|^2 \leqslant \| \Lambda^p - \Lambda_\alpha \|^2 + \rho^2 \| G(y^p, \alpha) - G(x_\alpha, \alpha) \|^2 + \\ + 2 \rho(\Lambda^p - \Lambda_\alpha, G(y^p, \alpha) - G(x_\alpha, \alpha)) \\ \leqslant \| \Lambda^p - \Lambda_\alpha \|^2 + \rho^2 \delta^2 \| y^p - x_\alpha \|^2 - \rho\gamma \| y^p - x_\alpha \|^2 . \end{aligned}$$

On choisit ρ tel que $\rho(\gamma - \rho\delta^2)$ soit positif $\left(0 < \rho < \frac{\gamma}{\delta^2}\right)$ alors

$$\sum_{q=0}^{p} \| y^p - x_\alpha \|^2 \leqslant \frac{\| \Lambda^0 - \Lambda_\alpha \|^2}{\rho(\gamma - \rho\delta^2)} \qquad \forall p$$

donc la série converge, et la suite $\{ y^p \}$ converge vers la solution x_α du problème (Q_α) quand $p \to +\infty$.

4. APPLICATION A UN PROBLÈME DE GESTION DE PORTEFEUILLE

4.1. Formulation du problème

On considère un problème de révision de portefeuille sur deux périodes : un investisseur ayant déterminé dans une première période un portefeuille optimal (c'est-à-dire les sommes à investir dans n titres de manière à maximiser sa fonction d'utilité) cherche à le réviser dans une 2^e^ période car les cours des différents titres ont changé.

Les frais nécessaires pour ajuster le portefeuille existant sont supposés proportionnels aux montants des transactions, ils sont donc de la forme :

$$c \sum_{i=1}^{n} | x_i - b_i |$$

où $0 < c < 1$ et b_i représente la valeur dans la 2^e^ période de la somme investie dans le titre i au cours de la 1re période. x_i représente la somme à investir dans le titre i dans la 2e période.

La somme totale qu'il est possible d'investir dans la 2e période est donc :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} b_i - c \sum_{i=1}^{n} | x_i - b_i | .$$

Le problème est alors de maximiser l'utilité tout en minimisant les frais de transactions, c'est-à-dire maximiser

$$\left\{ \frac{\sum_i e_i x_i}{\sum x_i} - \lambda \frac{\sum_{i,j} \sigma_{ij} x_i x_j}{(\sum x_i)^2} - c \sum_i | x_i - b_i | \right.$$

sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_i \geqslant 0 & i = 1, \dots, n \\ \sum_i x_i = \sum_i b_i - c \sum_i | x_i - b_i | . & \end{array} \right.$$

Ce problème n'est ni convexe, ni différentiable. Reprenant les notations des paragraphes précédents, on obtient :

$F(x) = \lambda \dfrac{(\sigma x, x)}{\left(\sum_i x_i\right)^2} - \dfrac{(e, x)}{\sum_i x_i}$ où σ est une matrice symétrique définie positive,

$$f(x) = \sum_i x_i \qquad g(x) = c \sum_i | x_i - b_i | - \sum_i b_i$$

$$C = \{ x \in \mathbb{R}^n / x_i \geqslant 0 \quad \forall i \}$$

$$K = \left\{ x \in C \middle/ \sum_i x_i + c \sum | x_i - b_i | - \sum_i b_i = 0 \right\}$$

$q(x, \alpha) = \lambda \dfrac{(\sigma x, x)}{\alpha^2} - \dfrac{(e, x)}{\alpha}$ fonction quadratique par rapport à x.

Les hypothèses (H1), (H2), (H3) sont vérifiées.

4.2. Résolution numérique

Pour déterminer y^p défini dans l'algorithme de résolution de (Q_α), on utilise une méthode de relaxation. A chaque étape, on doit minimiser une fonction d'une variable et on peut calculer explicitement la solution.

Pour déterminer z^* défini dans le lemme 2.3 on utilise la méthode du gradient avec projection. La projection sur $\Omega(1)$ est effectuée à l'aide de l'algorithme très performant de C. Michelot [8].

Pour des résultats complémentaires sur l'étude du problème et les essais numériques nous renvoyons à notre thèse de 3e cycle [6].

REFERENCES

[1] A. AUSLENDER, *Optimisation,* Méthodes numériques (Masson 1976).

[2] I. EKELAND et R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels* (Dunod 1974).

[3] J.-C. FIOROT et P. HUARD, *Une approche théorique du problème de linéarisation en programmation mathématique convexe* (Séminaire d'Analyse Numérique 1974-75, Tome 1, Publication du Laboratoire de Lille, 1975).

[4] W. HOGAN, *Point to set maps in mathematical programming* (W.M.S.I. Feb. 1971, University of California).

[5] P. HUARD, *Optimisation dans* $\mathbb{R}^n$, Cours polycopié de DEA. Laboratoire de Lille, 1972.

[6] O. LEFEBVRE, Thèse de 3e cycle, Dijon, 1980.

[7] R. MEYER, *The validity of a family of optimization methods,* SIAM J. Control, Vol. 8, n° 1, février 1970.

[8] C. MICHELOT, *Projection d'un point de* $\mathbb{R}^n$ *sur un polyèdre,* Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique, Dijon, 1980.

[9] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis,* Princeton University Press, 1970.

[10] R. T. ROCKAFELLAR, *Augmented Lagrange multiplier functions and duality in non convex programming,* SIAM J. Control, Vol. 12, n° 2, mai 1974.