RAIRO
ANALYSE NUMÉRIQUE

M. ATTEIA
C. FAGE
J. GACHES

Étude et convergence de fonctions «spline» complexes

RAIRO – Analyse numérique, tome 18, n° 3 (1984), p. 219-236.
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1984__18_3_219_0>

© AFCET, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO – Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 18, n° 3, 1984, p. 219 à 236)

ÉTUDE ET CONVERGENCE DE FONCTIONS « SPLINE » COMPLEXES (*)

par M. ATTEIA, C. FAGE, J. GACHES ([1])

Résumé. — *On établit dans cet article l'existence et l'unicité de fonctions « spline » complexes d'interpolation d'ordre m sur un ouvert Ω borné simplement connexe de $\mathbb{C}$. On caractérise ces fonctions à l'aide des noyaux d'Aronszajn-Bergman et on étudie leurs propriétés de convergence vers certaines fonctions holomorphes sur Ω.*

Enfin, on explicite une application de ces resultats aux fonctions harmoniques reelles sur Ω.

Abstract. — *We prove the existence and the uniqueness of a complex interpolating spline function of order m, on a simply connected, bounded open subset Ω in $\mathbb{C}$. Using the Aronszajn-Bergman kernels, we characterize these functions and study their convergence properties to some analytic functions on Ω.*

Finally, we give an application of these results to the harmonic real functions on Ω.

0. INTRODUCTION

Les fonctions « spline » réelles dont la théorie s'est très rapidement développée au cours de la dernière décennie, possèdent des propriétés de lissage remarquables mais leurs dérivées, à partir d'un certain rang, présentent des singularités.

Les fonctions « spline » d'interpolation sur un ouvert Ω borné, simplement connexe de $\mathbb{C}$ introduites par M. Atteia [1] ne présentent pas cet inconvénient. Leurs parties réelles, en particulier, sont des fonctions « spline » d'interpolation analytiques sur l'ouvert Ω considéré.

(*) Reçu en novembre 1982.
([1]) Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex.

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis, 0399-0516/84/03/219/18/$ 3.80
© AFCET Bordas-Dunod

Cet article a pour but de présenter les premières propriétés des fonctions « spline » complexes d'ordre m dont une étude plus complète sur certains points a été faite par C. Simpson-Fage [3] dans sa thèse.

Au paragraphe 1, l'existence et l'unicité de telles fonctions s'inscrit dans le cadre théorique classique.

Le paragraphe 2 met en évidence des propriétés de minimisation de la partie réelle harmonique de la fonction « spline », qui peuvent être exploitées pour des problèmes à données réelles.

Le paragraphe suivant étudie des sous-espaces hilbertiens de $\mathbb{C}^\Omega$ et leurs bases ; on donne une relation importante liant leurs noyaux reproduisants — d'Aronszajn-Bergman — à celui de $\mathscr{L}^2(\Omega)$.

L'expression de la fonction « spline » est obtenue à partir de cette étude, dans le paragraphe 4. Comme dans le cas réel, l'explicitation du noyau fournit celle de la « spline » ; on l'obtient ici, lorsque Ω est un disque, centré à l'origine pour une spline d'ordre 0 ou 1 (soit à partir de la relation entre les noyaux, soit à partir des bases de sous-espaces hilbertiens). Pour un ordre supérieur ou égal à 2, seule la décomposition en série est utilisable.

Enfin, le paragraphe 5 donne la convergence de la suite des fonctions « spline » d'ordre m, interpolant une fonction analytique donnée sur un ensemble de points, distribués sur une courbe Γ contenue dans Ω.

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$, simplement connexe, m et n deux entiers naturels ($n > m$), $\{ z_k = x_k + iy_k \}_{k=1,\dots,n}$, ($i^2 = -1$) un ensemble de n points *distincts* de Ω, $\{ \alpha_k \}_{k=1,\dots,n}$ un ensemble de n nombres complexes.

Notons $\mathscr{A}_m(\Omega)$, l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω telles que :

$$\int_\Omega \sum_{p=0}^{m} |f^{(p)}(z)|^2 \, d\omega_z < +\infty \quad (\text{où } z = x + iy, \, d\omega_z = dx\, dy) .$$

et $\mathscr{A}_0(\Omega) = \mathscr{L}^2(\Omega)$.

On désignera dans la suite par $\mathscr{X}$ l'espace $\mathbb{C}^\Omega$ muni de la topologie de la convergence simple, par $\mathscr{X}'$ son dual topologique et par $\langle .,. \rangle$ la dualité entre $\mathscr{X}$ et $\mathscr{X}'$.

On notera aussi $\mathscr{P}_k(\Omega)$ l'ensemble des polynômes complexes définis sur Ω qui sont de degré inférieur ou égal à k et par N_m, l'espace $\mathscr{P}_{m-1}(\Omega)$ muni de la topologie induite par celle de $\mathscr{X}$.

φ_m désignera l'homomorphisme canonique de $\mathscr{X}$ sur $\tilde{\mathscr{X}} = \mathscr{X}/N_m$.

On posera : $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega) = \varphi_m(\mathscr{A}_m(\Omega))$ et $\tilde{f} = \varphi_m(f)$ pour $f \in \mathscr{A}_m(\Omega)$.

On notera : $\mathscr{C}_m = \{ f \in \mathscr{A}_m(\Omega) ; \, f(z_k) = \alpha_k, \, k = 1, \dots, n \}$; $\mathscr{C}_m$ est un hyperplan fermé de $\mathscr{X}$.

1. EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA FONCTION « SPLINE » COMPLEXE D'INTERPOLATION D'ORDRE m SUR Ω

On énoncera tout d'abord deux lemmes classiques :

LEMME 1.1 : *Quelle que soit $f \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, quel que soit $p \in \mathbb{N}$,*

$$\forall z \in \Omega, \quad |f^{(p)}(z)| \leqslant \frac{p\,!\sqrt{p+1}}{\sqrt{\pi}(R(z))^{p+1}} \left(\int_\Omega |f(z)|^2 \, d\omega_z \right)^{1/2}$$

où $R(z)$ est la borne supérieure des rayons des cercles de centre z contenus dans Ω.

LEMME 1.2 : *Quel que soit le compact K contenu dans Ω et quelle que soit $f \in \mathscr{L}^2(\Omega)$,*

$$\operatorname{Sup} \{ |f(z)| \, ; \, z \in K \} \leqslant A_K \left(\int_\Omega |f(z)|^2 \, d\omega_z \right)^{1/2}$$

où A_K est un nombre réel indépendant de $z \in K$ et de $f \in \mathscr{L}^2(\Omega)$.

De ces deux lemmes, on déduit que $\mathscr{L}^2(\Omega)$ est un sous-espace hilbertien de $\mathscr{X}$, quand on le munit du produit scalaire $(f, g) \to \int_\Omega f(z) . \overline{g(z)} \, d\omega_z$.

D'autre part, $\forall f, g \in \mathscr{A}_m(\Omega)$, $(\tilde{f}, \tilde{g}) \to ((\tilde{f} \mid \tilde{g}))_m = \int_\Omega f^{(m)}(z) . \overline{g^{(m)}(z)} \, d\omega_z$ définit un produit scalaire sur $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$.

Muni de ce produit scalaire, $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On notera $|||\,.\,|||_m$ la norme associée à $((.\quad.))_m$. De plus, on a immédiatement :

LEMME 1.3 : *Quel que soit $m \in \mathbb{N}^*$, l'application :*

$$\left| \begin{array}{l} \mathscr{A}_m(\Omega) \to \mathscr{L}^2(\Omega) \\ \quad f \mapsto f^{(m)} \end{array} \right. \quad \textit{est une surjection}.$$

Des lemmes 1.2 et 1.3, on déduit facilement que $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$ muni du produit scalaire $((.\,|\,.))_m$ est un sous-espace hilbertien de $\tilde{\mathscr{X}}$.

De plus, posons : $\tilde{\mathscr{C}}_m = \varphi_m(\mathscr{C}_m)$.

Comme $\mathscr{C}_m + N_m$ est fermé dans $\mathscr{X}$ et comme φ_m est l'homomorphisme canonique de $\mathscr{X}$ sur $\tilde{\mathscr{X}}$, $\tilde{\mathscr{C}}_m$ est une partie (convexe) fermée de $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$.

THÉORÈME 1.1 : *Quel que soit $m \in \mathbb{N}$, il existe une seule fonction « spline » complexe d'interpolation d'ordre m, que nous noterons σ_m, solution du problème :*

$$\operatorname{Min}\left\{ \int_\Omega |f^{(m)}(z)|^2 \, d\omega_z \, ; \, f \in \mathscr{C}_m \right\}.$$

Preuve : Puisque $\tilde{\mathscr{C}}_m$ est convexe fermé dans $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$, il existe un seul élément $\sigma_m \in \mathscr{A}_m(\Omega)$ tel que :

$$|||\, \tilde{\sigma}_m \,|||_m = \operatorname{Min}\{ |||\tilde{f}\,|||_m \, ; \tilde{f} \in \tilde{\mathscr{C}}_m \}$$

σ_m est le seul élément de $\mathscr{C}_m$ appartenant à la classe $\tilde{\sigma}_m$. ||

2. APPLICATION AUX FONCTIONS « SPLINE » RÉELLES HARMONIQUES A DEUX VARIABLES

LEMME 2.1 : *Quel que soit $m \in \mathbb{N}$, quelle que soit f, analytique sur Ω, on a :*

$$\forall z \in \Omega, \quad \left| \frac{d^m(z)}{dm^z} \right|^2 = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \left(\frac{\partial^m \mathscr{R}\mathrm{e}\, f(x, y)}{\partial x^{m-p} \, \partial y^p} \right)^2 .$$

Preuve : *Cf.* [3] et [5].

THÉORÈME 2.1 : *Quel que soit $m \in \mathbb{N}$, la partie réelle de la fonction « spline » complexe d'interpolation d'ordre m sur Ω est la fonction « spline » réelle harmonique à deux variables qui minimise l'intégrale :*

$$\int_\Omega \left[\sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \left(\frac{\partial^m g(x, y)}{\partial x^{m-p} \, \partial y^p} \right)^2 \right] dx \, dy$$

parmi toutes les fonctions g de l'espace de Sobolev réel $H^m(\Omega)$ qui sont harmoniques dans Ω et telles que :

$$g(x_k, y_k) = \mathscr{R}\mathrm{e}\,(\alpha_k), \qquad k = 1, \ldots, n .$$

Preuve : Soit $\mathscr{G}_m = \{ g \in H^m(\Omega) \, ; g(x_k, y_k) = \mathscr{R}\mathrm{e}\,(\alpha_k), k = 1, \ldots, n \}$; $\mathscr{R}\mathrm{e}\,(\sigma_m)$ est une fonction harmonique contenue dans $H^m(\Omega) \cap \mathscr{G}_m$.

En effet, puisque $\sigma_m \in \mathscr{A}_m(\Omega)$, $\displaystyle\int_\Omega \sum_{m=0}^{m} |\sigma_m^{(p)}(z)|^2 \, d\omega_z < +\infty$ et donc, d'après le lemme précédent :

$$\int_\Omega \left[(\mathscr{R}\mathrm{e}\,(\sigma_m)(x, y))^2 + \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} \left(\frac{\partial^p \mathscr{R}\mathrm{e}\,(\sigma_m)(x, y)}{\partial x^{p-q} \, \partial y^q} \right)^2 \right] dx \, dy < +\infty .$$

Ainsi : $\forall p \in \{0, \ldots, m\}$, $\forall q \in \{0, \ldots, m\}$, $\dfrac{\partial^p \mathscr{R}e\,(\sigma_m)}{\partial x^{p-q}\,\partial y^q} \in L^2(\Omega)$.

Réciproquement, soit g une fonction harmonique sur Ω contenu dans $H^m(\Omega) \cap \mathscr{G}_m$. Alors : $\forall p \in \{0, \ldots, m\}$, $\forall q \in \{0, \ldots, m\}$, $\dfrac{\partial^p g}{\partial x^{p-q}\,\partial y^q} \in L^2(\Omega)$.

De plus, g est la partie réelle d'une fonction w, analytique sur Ω. Du lemme précédent, il résulte que quel que soit $p \in \{0, \ldots, m\}$:

$$\forall z \in \Omega\,, \quad \left|\frac{d^p w(z)}{dz^p}\right| = \frac{1}{4}\,\frac{1}{2^{p-1}} \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} \left(\frac{\partial^p g(x,y)}{\partial x^{p-q}\,\partial y^q}\right)^2$$

et donc que : $w \in \mathscr{A}_m(\Omega)$.

Ainsi, on a :

$$\int_\Omega |\sigma_m^{(m)}(z)|^2\, d\omega_z = \operatorname{Min}\left\{ \int_\Omega \left[\frac{1}{4}\,\frac{1}{2^{m-1}} \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \left(\frac{\partial^m g(x,y)}{\partial x^{m-p}\,\partial y^p}\right)^2\right] dx\,dy\,;\right.$$
$$\left. g \text{ harmonique sur } \Omega,\ g \in H^m(\Omega) \cap \mathscr{G}_m \right\}.$$

Et ainsi :

$$\int_\Omega \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \left(\frac{\partial^m(\mathscr{R}e\,(\sigma_m))\,(x,y)}{\partial x^{m-p}\,\partial y^p}\right)^2 dx\,dy =$$
$$= \operatorname{Min}\left\{ \int_\Omega \left[\frac{1}{4}\,\frac{1}{2^{m-1}} \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \left(\frac{\partial^m g(x,y)}{\partial x^{m-p}\,\partial y^p}\right)^2\right] dx\,dy\,;\right.$$
$$\left. g \text{ harmonique sur } \Omega,\ g \in H^m(\Omega) \cap \mathscr{G}_m \right\}. \quad \|$$

3. SUR LES SOUS-ESPACES HILBERTIENS DE $\mathbb{C}^\Omega$ ISOMORPHES A $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$

3.1. Les espaces $\mathscr{E}_m$ ($m \in \mathbb{N}$)

On désignera par $\mathscr{E}_m$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}_m(\Omega)$ isomorphe algébriquement à $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$ dans l'application $\psi_m = \varphi_{m|\mathscr{E}_m}$.

La forme sesquilinéaire : $(f, g) \to (f \mid g)_m = \displaystyle\int_\Omega f^{(m)}(z) . \overline{g^{(m)}(z)}\, d\omega_z$ définit sur $\mathscr{E}_m$ un produit scalaire [3]. On notera $\| \,.\, \|_m$ la norme associée à ce produit scalaire.

On a : $\forall f, g \in \mathscr{E}_m$, $(f \mid g)_m = (\psi_m(f) \mid \psi_m(g))_m$.

On en déduit facilement que $\mathscr{E}_m$ muni du produit scalaire $(. \mid .)_m$ est un espace de Hilbert qui est un *sous-espace hilbertien de* $\mathscr{X}$, c.-à-d. :

$$\forall z \in \Omega,\ \exists M(z) \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \forall f \in \mathscr{E}_m\,,\quad | f(z) | \leqslant M(z) \, \| f \|_m\,.$$

Alors, il existe $E_m \in \mathbb{C}^{\Omega \times \Omega}$ tel que :

(i) $\forall z \in \Omega$, $\forall f \in \mathscr{E}_m$, $f(z) = (f \mid E_m(., z))_m$;

(ii) $\forall z, t \in \Omega$, $E_m(t, z) = \overline{E_m(z, t)}$;

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, $\forall z_1, \ldots, z_n \in \Omega$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_k \, \overline{\alpha}_j \, E_m(z_k, z_j) \geqslant 0 \quad (\textit{cf.}\ [2] \text{ et } [7])\,.$$

E_m est appelé noyau reproduisant — d'Aronszajn-Bergman — de $\mathscr{E}_m$.

De la proposition 2.4 de [8] et de la positivité du noyau E_m, on déduit que E_m est continu sur l'intérieur de Ω.

3.2. Sur certaines propriétés du noyau de $\mathscr{E}_m$

Soit E_m le noyau reproduisant de $\mathscr{E}_m$.

LEMME 3.1 : *Quelle que soit la fonctionnelle linéaire et continue sur* $\mathscr{E}_m$, *et quelle que soit* $f \in \mathscr{E}_m$, *on a* :

$$l(f) = \int_\Omega f^{(m)}(t) \, \overline{\frac{\partial^m}{\partial t^m} \, \overline{l(E_m(., t))}} \, d\omega_t\,.$$

Preuve : D'après le théorème de Riesz, il existe un seul élément $h \in \mathscr{E}_m$ tel que :

$$\forall f \in \mathscr{E}_m\,, \quad l(f) = (f \mid h)_m\,.$$

D'autre part :

$$\forall t \in \Omega\,, \quad h(t) = (h \mid E_m(., t))_m = \overline{(E_m(., t) \mid h)_m}$$

et donc : $h(t) = \overline{l(E_m(., t))}$.

On en déduit immédiatement la propriété annoncée. ||

THÉORÈME 3.1 : *Soit* L *le noyau reproduisant de* $\mathscr{E}_0 \subset \mathscr{L}^2(\Omega)$. *Alors* : $\forall m \in \mathbb{N}$, E_m *est caractérisé par* :

$$\forall t, z \in \Omega, \ \frac{\partial^{2m}}{\partial t^m \, \partial \overline{z}^m} E_m(t, z) = L(t, z)\,.$$

Preuve : On montre facilement que quel que soit $z \in \Omega$, l'application l_z qui à tout $f \in \mathscr{E}_m$ associe le complexe $f^{(m)}(z)$ est une fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathscr{E}_m$.

On applique le lemme précédent à l_z et quel que soit $f \in \mathscr{E}_m$, on a :

$$l_z(f) = f^{(m)}(z) = \int_\Omega f^{(m)}(t) \cdot \overline{\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left(\overline{\frac{\partial^m}{\partial z^m} E_m(z, t)}\right)} \, d\omega_t$$

c.-à-d. :

$$\forall z \in \Omega, \quad f^{(m)}(z) = \int_\Omega f^{(m)}(t) \cdot \overline{\frac{\partial^{2m}}{\partial t^m \, \partial \bar{z}^m} E_m(t, z)} \, d\omega_t .$$

Du lemme 1.3, on déduit que l'application qui à tout $f \in \mathscr{E}_m$ associe sa dérivée $f^{(m)}$ est une bijection de $\mathscr{E}_m$ sur $\mathscr{L}^2(\Omega)$.

Par conséquent, quel que soit $g \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, on a :

$$\forall z \in \Omega, \quad g(z) = \int_\Omega g(t) \cdot \overline{\frac{\partial^{2m} E_m(t, z)}{\partial t^m \, \partial \bar{z}^m}} \, d\omega_t .$$

Le noyau reproduisant de $\mathscr{L}^2(\Omega)$ étant unique, le théorème est démontré. ||

3.3. Bases dénombrables orthonormales de $\mathscr{E}_m$

PROPOSITION 3.1 : *Quel que soit $m \in \mathbb{N}$, $\mathscr{E}_m$ est un espace séparable, et si $(e_k^0)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base dénombrable orthonormale de $\mathscr{L}^2(\Omega)$, alors il existe une base dénombrable orthonormale unique $(e_k^m)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathscr{E}_m$ telle que, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, la dérivée d'ordre m de e_k^m soit e_k^0.*

Preuve : $\mathscr{L}^2(\Omega)$ est un espace séparable [6].

Soit $(e_k^0)_{k \in \mathbb{N}}$ l'une de ses bases dénombrable orthonormale.

Du lemme 1.3, on déduit que, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, il existe une unique fonction e_k^m de $\mathscr{E}_m$ telle que e_k^0 soit sa dérivée d'ordre m, et l'on a :

$$\forall k, j \in \mathbb{N} \quad (e_k^m \mid e_j^m)_m = (e_k^{m(m)} \mid e_j^{m(m)})_0 = (e_k^0 \mid e_j^0)_0 = \delta_{kj} .$$

De plus, si $f \in \mathscr{E}_m$ est telle que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $(f \mid e_k^m)_m = 0$, alors f vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N} , \quad (f^{(m)} \mid e_k^0)_0 = 0 .$$

Ainsi $f^{(m)}$ étant un élément de $\mathscr{L}^2(\Omega)$, on a $f^{(m)} \equiv 0$ et donc $f \equiv 0$.

La famille $(e_k^m)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc une base dénombrable orthonormale de $\mathscr{E}_m$ et $\mathscr{E}_m$ est séparable. ||

COROLLAIRE 3.1 : *Quel que soit* $m \in \mathbb{N}$, *si* $(e_k^m)_{k \in \mathbb{N}}$ *est une base dénombrable orthonormale de* $\mathscr{E}_m$, *alors la famille des dérivées d'ordre m de* e_k^m, $(k \in \mathbb{N})$, *est une base orthonormale dénombrable de* $\mathscr{L}^2(\Omega)$ *et les noyaux reproduisants* E_m *de* $\mathscr{E}_m$ *et L de* $\mathscr{L}^2(\Omega)$ *se décomposent respectivement de la manière suivante :*

$$\forall t, z \in \Omega, \quad E_m(t, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{e_k^m(z)} . e_k^m(t)$$

et

$$L(t, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{e_k^{m(m)}(z)} . e_k^{m(m)}(t) .$$

Preuve immédiate : D'après la propriété des compositions des noyaux de sous-espaces hilbertiens dans une base orthonormale. ‖

4. EXPLICITATION DE LA FONCTION « SPLINE » COMPLEXE σ_m

4.1. Cas général

LEMME 4.1 : <u>*Caractérisation de* $\tilde{\mathscr{C}}_m$ *et de* $\psi_m^{-1}(\tilde{\mathscr{C}}_m)$.</u>

(i) *Il existe* $(n - m)$ *éléments* $\rho'_1, \dots, \rho'_{n-m} \in \mathscr{X}'$, *linéairement indépendants dans* $\mathscr{X}'$ *tels que* : $\forall p \in \{ 1, \dots, n - m \}$,

$$\rho'_p = \sum_{j=0}^{m} c_j^p \, \delta_{z_{p+j}}, \; c_j^p \in \mathbb{C} ; \quad \langle \rho'_p, 1 \rangle = \langle \rho'_p, z \rangle = \cdots = \langle \rho'_p, z^{m-1} \rangle = 0$$

(*où par abus de langage,* z^j *désigne l'application* : $z \to z^j$).

(ii) *Aux* $(n - m)$ *éléments* $\rho'_1, \dots, \rho'_{n-m} \in \mathscr{X}'$, *on peut associer, de manière unique,* $(n - m)$ *éléments* $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_{n-m} \in \tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$ *linéairement indépendants tels que :*

$$\forall p \in \{ 1, \dots, n - m \} , \forall f \in \mathscr{A}_m(\Omega) , \quad \langle \rho'_p, f \rangle = ((\tilde{\rho}_p \mid \tilde{f}))_m .$$

(iii) $\tilde{\mathscr{C}}_m = \{ \tilde{f} \in \tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega) ; \; ((\tilde{\rho}_p \mid \tilde{f}))_m = \beta_p, \; 1 \leqslant p \leqslant n - m \}$ *où*

$$\overline{\beta}_p = \sum_{j=0}^{m} c_j^m \, \alpha_{p+j}, \; 1 \leqslant p \leqslant n - m ;$$

$$\mathscr{D}_m = \psi_m^{-1}(\tilde{\mathscr{C}}_m) = \{ f \in \mathscr{E}_m ; (\rho_p \mid f)_m = \beta_p, 1 \leqslant p \leqslant n - m \}$$

où : $\rho_p = \psi_m^{-1}(\tilde{\rho}_p), 1 \leqslant p \leqslant n - m.$

Preuve :

(i) Immédiate.

(ii) $\forall p \in \{1, \ldots, (n-m)\}$, l'application : $\left| \begin{array}{l} \tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega) \to \mathbb{R} \\ \tilde{f} \mapsto \langle \rho'_p, f \rangle \end{array} \right.$ est une fonctionnelle linéaire et continue. Il existe donc un seul élément $\tilde{\rho}_p \in \tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$ tel que :

$$\forall f \in \mathscr{A}_m(\Omega), \quad \langle \rho'_p, f \rangle = ((\tilde{\rho}_p \mid \tilde{f}))_m .$$

De plus, $\tilde{\rho}_1, \ldots, \tilde{\rho}_{n-m}$ sont linéairement indépendants, comme on le vérifie immédiatement.

(iii) $\forall \tilde{f} \in \tilde{\mathscr{C}}_m$, $((\tilde{\rho}_p \mid \tilde{f}))_m = \beta_p = \overline{\left\langle \sum_{j=0}^{m} c_j^m \, \delta_{z_{p+j}}, f \right\rangle} = \sum_{j=0}^{m} \overline{c}_j^p \, \overline{\alpha}_{p+j}$. Inversement, si $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$ vérifie : $((\tilde{\rho}_p \mid \tilde{f}))_m = \beta_p$, $1 \leqslant p \leqslant n-m$, on montre facilement qu'il existe $f \in \mathscr{C}_m$ tel que : $\psi_m(f) = \tilde{f}$. ||

THÉORÈME 4.1 : *Soit $\mathscr{E}_m$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}_m(\Omega)$ isomorphe algébriquement et topologiquement à $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$ dans l'application ψ_m. E_m désignera le noyau de $\mathscr{E}_m$ qui est un sous-espace hilbertien de $\mathscr{X}$.*

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la fonction « spline » complexe σ_m peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_m = p_m + \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left[\sum_{j=0}^{m} \overline{c}_j^k \, E_m(\cdot, z_{k+j}) \right]$$

où :

* $p_m \in N_m$.

** $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m})$ *est solution unique du système linéaire* :

$$\sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left(\sum_{j=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} \overline{c}_j^k \, c_l^p \, E_m(z_{p+l}, z_{k+j}) \right) = \sum_{l=0}^{m} c_l^p \, \alpha_{p+l}, \; p = 1, \ldots, n-m .$$

*** *Quel que soit $k \in \{1, \ldots, n-m\}$, les constantes $c_0^k, \ldots, c_m^k$ vérifient les m équations homogènes* :

$$\sum_{l=0}^{m} c_l^k (z_{k+j})^q = 0, \quad q = 0, \ldots, m-1 .$$

Preuve : Des hypothèses, il résulte que $\mathscr{D}_m$ est une partie convexe fermée de $\mathscr{E}_m$ car $\tilde{\mathscr{E}}_m$ est une partie convexe fermée de $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$.

Soit s_m la projection de l'origine de $\mathscr{E}_m$ sur $\mathscr{D}_m$.

On a alors :

$$\| s_m \|_m = \text{Min} \{ \| f \|_m ; \quad f \in \mathcal{D}_m \} = ||| \tilde{s}_m |||_m = \text{Min} \{ ||| \tilde{f} |||_m ; \quad \tilde{f} \in \tilde{\mathcal{C}}_m \}$$

et $\sigma_m = p_m + s_m$ où $p_m \in N_m$ puisque :

$$\int_{\Omega} | \sigma_m^{(m)}(z) |^2 \, d\omega_z = \| S_m \|_m^2 .$$

Notons que σ_m *ne dépend pas du choix de l'espace* $\mathcal{E}_m$.

Comme s_m est la projection de l'origine sur l'hyperplan fermé $\mathcal{D}_m$ déterminé par les équations : $(\rho_p \mid s_m)_m = \beta_p$, $1 \leqslant p \leqslant n - m$, on a classiquement :

$$s_m = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \, \rho_k , \quad \lambda_k \in \mathbb{C}, \, 1 \leqslant k \leqslant n - m .$$

Or, $\forall z \in \Omega$, $\forall p \in \{ 1, ..., (n - m) \}$,

$$\begin{aligned} \rho_p(z) &= \langle \rho_p, \delta_z \rangle = (\rho_p \mid E_m(\cdot, z))_m = \overline{\langle \rho_p', E_m(\cdot, z) \rangle} \\ &= \sum_{j=0}^{m} \bar{c}_j^p . \overline{E_m(z_{p+j}, z)} = \sum_{j=0}^{m} \bar{c}_j^p . E_m(z, z_{p+j}) . \end{aligned}$$

Ainsi : $s_m = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \, \rho_k = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left(\sum_{j=0}^{m} \bar{c}_j^k . E_m(\cdot, z_{j+k}) \right)$. D'autre part :

$$\begin{aligned} (\rho_p \mid \sigma_m)_m = (\rho_p \mid s_m)_m &= \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k (\rho_p \mid \rho_k)_m = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \, \overline{\langle \rho_p', \rho_k \rangle} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left(\overline{\left\langle \sum_{j=0}^{m} c_j^p \, \delta_{z_{p+j}}, \rho_k \right\rangle} \right) = \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left(\sum_{j=0}^{m} \bar{c}_j^p \, \bar{\rho}_k(z_{p+j}) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left(\sum_{j=0}^{m} \bar{c}_j^p \overline{\left(\sum_{l=0}^{m} \bar{c}_l^k \, E_m(z_{p+j}, z_{k+l}) \right)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-m} \lambda_k \left(\sum_{j=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} \bar{c}_j^p \, c_k^l \, E_m(z_{k+l}, z_{p+j}) \right) \end{aligned}$$

d'où la propriété $**$.

La propriété $***$ est immédiate car :

$$\forall k \in \{ 1, ..., (n - m) \} , \quad \langle \rho_k', 1 \rangle = \langle \rho_k', z \rangle = \cdots = \langle \rho_k', z^{m-1} \rangle = 0 . \quad \|$$

4.2. Cas où Ω est un disque de $\mathbb{C}$

Dans ce paragraphe, Ω est un disque de $\mathbb{C}$, centré à l'origine et de rayon R. On mettra en évidence des sous-espaces hilbertiens particuliers de $\mathscr{X}$, notés ici $\mathscr{H}_m(\Omega)$, dont on pourra expliciter une base orthonormale ainsi que leur noyau reproduisant.

4.2.1. *Explicitation du noyau reproduisant*

PROPOSITION 4.1 : *Le noyau reproduisant H_m de $\mathscr{H}_m(\Omega)$, espace de fonctions de $\mathscr{A}_m(\Omega)$ qui s'annulent en m points $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \Omega$ distincts est tel que :*

$$\forall t, z \in \Omega , \quad H_m(t, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{\psi_k^m(z)} . \psi_k^m(t)$$

avec

$$\forall z \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N} , \quad \psi_k^m(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k+1}\,(k+2)\ldots(k+m)\,R^{k+1}}\, z^{k+m} + p_k^m(z)$$

où p_k^m est le polynôme de N_m vérifiant :

$$p_k^m(\xi_j) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k+1}\,(k+2)\ldots(k+m)\,R^{k+1}} \quad \xi_j^{k+m} , \quad j = 1, \ldots, m .$$

Preuve : La famille $(\psi_k^0)_{k \in \mathbb{N}}$ défini par :

$$\forall z \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N} ,\, \quad \psi_k^0(z) = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{\pi}} \frac{z^k}{R^{k+1}}$$

est une base dénombrable de $\mathscr{L}^2(\Omega)$ (*cf.* [7]).

D'après la proposition 3.1, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, il existe un seul élément $\psi_k^m \in \mathscr{H}_m(\Omega)$ tel que

$$\forall z \in \Omega , \quad \frac{d^m \psi_k^m(z)}{dz^m} = \psi_k^0(z) .$$

Alors

$$\forall z \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N} , \quad \psi_k^m(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{k+1}} \frac{z^{k+m}}{(k+2)\ldots(k+m)\,R^{k+1}} + p_k^m(z)$$

où $p_k^m \in \mathbb{N}_m$ est entièrement déterminé par le fait que $\psi_k^m(\xi_j) = 0, j = 1, \ldots, m$. Le résultat annoncé s'en déduit immédiatement. ||

D'après la proposition précédente, le noyau H_m s'exprime sous forme de série ; il n'y a que dans le cas où $m = 0$ et $m = 1$ que l'on va pouvoir donner une expression du noyau au moyen de fonctions élémentaires.

PROPOSITION 4.2 : *Le noyau reproduisant L de* $\mathscr{L}^2(\Omega)$ $(m = 0)$ *est défini par :*

$$\forall t, z \in \Omega \quad L(t, z) = \frac{1}{\pi R^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{t\bar{z}}{R^2}\right)^2}.$$

Preuve : Il suffit de vérifier que

$$\forall t, z \in \Omega, \quad L(t, z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_k^0(z)\, \psi_k^0(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{N}} (k + 1) \frac{\bar{z}^k . t^k}{R^{2k+2}}$$
$$= \frac{1}{\pi R^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{t\bar{z}}{R^2}\right)^2}.$$

PROPOSITION 4.2*bis* : *Le noyau reproduisant* H_1 *de*

$$\mathscr{H}_1(\Omega) = \{ f \in \mathscr{A}_1(\Omega) ; f(\xi_1) = 0, \xi_1 \in \Omega \}$$

est défini par :

$$\forall t, z \in \Omega, \quad H(t, z) = -\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Log}\left(1 - \frac{t\bar{z}}{R^2}\right) - \operatorname{Log}\left(1 - \frac{t\bar{\xi}_1}{R^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \operatorname{Log}\left(1 - \frac{\xi_1 \bar{z}}{R^2}\right) + \operatorname{Log}\left(1 - \frac{\xi_1 \bar{\xi}_1}{R^2}\right)\right].$$

Preuve : On sait que : $\forall t, z \in \Omega$, $\dfrac{\partial^2 H_1(t, z)}{\partial t\, \partial \bar{z}} = L(t, z)$.

Après intégration, on trouve :

$$H_1(t, z) = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Log} \bar{z} - \operatorname{Log}\left(1 - \frac{t\bar{z}}{R^2}\right)\right] + a(\bar{z}) + b(t).$$

Pour déterminer a et b, on utilisera le fait que H_1 est hermitienne et que $\forall z \in \Omega$, $H_1(\xi_1, z) = 0$. ||

Remarquons que cette méthode ne peut s'étendre aux cas $m \geqslant 2$; en effet, dans le cas $m = 2$ par exemple, on aboutit au calcul d'une primitive de $\dfrac{\operatorname{Log}(1 + x)}{x}$.

4.2.2. *Explicitation de* σ_m

D'après le théorème 4.1, la connaissance explicite du noyau E_m permet de déterminer entièrement σ_m. Un choix commode de E_m est de prendre ici le noyau d'un espace $\mathscr{H}_m(\Omega)$ défini précédemment, les m points $\xi_1, \ldots, \xi_m$ étant alors *choisis parmi l'ensemble des points d'interpolation*, soit $z_1, \ldots, z_m$ par exemple.

Le polynôme p_m figurant dans l'expression de σ_m est entièrement déterminé par le fait que

$$\sigma_m(z_k) = p_m(z_k) = \alpha_k \qquad k = 1, \ldots, m .$$

(On a en effet $\forall z \in \Omega \quad E_m(z_k, z) = H_m(z_k, z) = 0 \quad k = 1, \ldots, m.$)

5. CONVERGENCE

PROPOSITION 5.1 : *Soient* $\xi_1, \ldots, \xi_m$, *m points distincts de* Ω,

$$\mathscr{H}_m(\Omega) = \{ f \in \mathscr{A}_m(\Omega) ; f(\xi_j) = 0, 1 \leqslant j \leqslant m \} ,$$

et $\mathscr{E}_m$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{A}_m(\Omega)$ *isomorphe algébriquement à* $\tilde{\mathscr{A}}_m(\Omega)$ *dans l'application* : $\psi_m = \varphi_{m \mid \mathscr{E}_m}$. *On suppose que* $\mathscr{H}_m(\Omega)$ *et* $\mathscr{E}_m$ *sont munis du produit scalaire* :

$$(f, g) \to (f \mid g)_m = \int_\Omega f^{(m)}(z) . \overline{g^{(m)}(z)} \, d\omega_z .$$

$\mathscr{H}_m(\Omega)$ *et* $\mathscr{E}_m$ *sont deux sous-espaces hilbertiens de* $\mathscr{X}$ *dont les noyaux respectifs* H_m *et* E_m *sont liés par la relation suivante* :

$$\forall t, z \in \Omega , \quad H_m(t, z) = E_m(t, z) - \sum_{j=1}^{m} \overline{l_j}(z) \, E_m(t, \xi_j) - \sum_{j=1}^{m} l_j(t) \, \overline{E_m(z, \xi_j)} + \\ + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} l_j(t) \, \overline{l_k(z)} \, E_m(\xi_j, \xi_k) .$$

où l_j *désigne le polynôme de Lagrange de* N_m *tel que* : $l_j(\xi_k) = \delta_{jk}$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

Preuve : On sait que $\mathscr{A}_m(\Omega)$ est somme directe (algébrique et topologique) des espaces $\mathscr{H}_m(\Omega)$ et N_m de même que $\mathscr{E}_m$ et N_m. Ainsi :

$$\forall f \in \mathscr{A}_m(\Omega) , \quad f = h + p = e + q , h \in \mathscr{H}_m(\Omega), e \in \mathscr{E}_m, p, q \in N_m .$$

D'autre part : $p = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j) \, l_j$ car $\forall j \in \{ 1, \ldots, m \}$, $h(\xi_j) = 0$.

Donc : $p = \sum_{j=1}^{m} e(\xi_j)\, l_j + \sum_{j=1}^{m} q(\xi_j)\, l_j = \sum_{j=1}^{m} e(\xi_j)\, l_j + q$.

Or, $\forall z \in \Omega$, $h(z) = (f \mid H_m(., z))_m$ et $e(z) = (f \mid E_m(., z))_m$.

On en déduit que :

$$\forall z \in \Omega, \quad f(z) = \left(f \mid H_m(., z) + \sum_{j=1}^{m} \overline{l_j(z)}\, E_m(., \xi_j)\right)_m + q(z) =$$
$$= (f \mid E_m(., z))_m + q(z).$$

D'où :

$$\forall f \in \mathscr{A}_m(\Omega), \forall z \in \Omega, \quad \left(f \mid E_m(., z) - \left[H_m(., z) + \sum_{j=1}^{m} \overline{l}_j(z)\, E_m(., \xi_j)\right]\right)_m = 0.$$

Comme l'application $\left| \begin{array}{l} \mathscr{A}_m(\Omega) \to \mathscr{L}^2(\Omega) \\ f \mapsto f^{(m)} \end{array}\right.$ est surjective, on a :

$$\forall z \in \Omega, \quad E_m^{(m)}(., z) = H_m^{(m)}(., z) + \sum_{j=1}^{m} \overline{l_j(z)}\, E_m^{(m)}(., \xi_j).$$

En intégrant, on obtient :

$$E_m(., z) = H_m(., z) + \sum_{j=1}^{m} \overline{l_j(z)}\, E_m(., \xi_j) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k(z)\, l_k$$

avec : $\forall k \; \{1, ..., m\}$, $E_m(\xi_k, z) = \sum_{j=1}^{m} \overline{l_j(z)}\, E_m(\xi_k, \xi_j) + \alpha_k(z)$, d'où le résultat annoncé. ||

THÉORÈME 5.1 : *Soient Γ une courbe rectifiable contenue dans un compact de Ω et $w \in \mathscr{A}_m(\Omega)$.*

Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par Z^n un ensemble de n points distincts de Γ que nous noterons $z_1^n, ..., z_n^n$ et par $\sigma(n)$ la « spline » d'interpolation de w aux points de Z^n.

Si $\lim_{n \to \infty} (\operatorname{Sup}_{z \in \Gamma} (\operatorname{Inf}_{1 \leqslant j \leqslant n} | z - z_j^n |)) = 0$, *alors* : $\lim_{n \to \infty} \| \sigma(n) - w \|_m = 0$

$\left(\textit{où} : \forall f \in \mathscr{A}_m(\Omega), \| f \|_m^2 = \int_\Omega | f^{(m)}(z) |^2 \, d\omega_z\right)$.

Preuve : Notons $\sigma(n)$ la « spline » qui interpole w aux points de la subdivision Z^n.

* Soient $t_1, ..., t_m$, m points distincts de Γ et

$$\mathscr{K}_m = \{ f \in \mathscr{A}_m(\Omega) ; f(t_j) = 0, 1 \leqslant j \leqslant m \}.$$

$\mathcal{K}_m$ muni du produit scalaire :

$$(f, g) \to (f \mid g)_m = \int_\Omega f^{(m)}(z).\overline{g^{(m)}(z)}\, d\omega_z$$

est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{X}$.

Notons K_m son noyau. On a les décompositions suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma(n) = \tau(n) + q(n), \quad \tau(n) \in \mathcal{K}_m, \quad q(n) \in N_m \quad \text{et} \quad w = v + q,$$
$$v \in \mathcal{K}_m, \quad q \in N_m .$$

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \| \tau(n) \|_m = \| \sigma(n) \|_m \leqslant \| w \|_m = \| v \|_m$.

La suite $\tau(n)$ étant bornée dans $\mathcal{K}_m$, on peut en extraire une sous-suite, que nous noterons encore $\tau(n)$ pour simplifier l'écriture — qui converge faiblement dans $\mathcal{K}_m$ vers $\tau^* \in \mathcal{K}_m$.

Comme la norme $\| \cdot \|_m$ est s.c.i. pour la topologie faible de $\mathcal{K}_m$, on a :

$$\liminf_{n \to \infty} \| \tau(n) \|_m \geqslant \| \tau^* \|_m .$$

** Soit t un point fixé quelconque de Γ.

Comme $\lim\limits_{n \to \infty} (\operatorname{Sup}\limits_{z \in \Gamma} (\operatorname{Inf}\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} | z - z_j^n |)) = 0$, on a :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^* \quad \exists n(\alpha) \in \mathbb{N}^* \quad \exists (z_{j(k)}^{n(\alpha)})_{0 \leqslant k \leqslant m} \in Z^{n(\alpha)} \quad \text{tels que :}$$

$$\operatorname{Max} (| t - z_{j(0)}^{n(\alpha)} |, \operatorname{Max} \{ | t_k - z_{j(k)}^{n(\alpha)} | ; 1 \leqslant k \leqslant m \}) \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

Soit $\mathcal{H}_m^\alpha = \{ f \in \mathcal{A}_m(\Omega) ; f(z_{j(k)}^{n(\alpha)}) = 0,\ 1 \leqslant k \leqslant m \}$; $\mathcal{H}_m^\alpha$ muni du produit scalaire :

$$(f, g) \to (f \mid g)_m = \int_\Omega f^{(m)}(z).\overline{g^{(m)}(z)}\, d\omega_z$$

est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{X}$.

Notons H_m^α son noyau.

On a alors les décompositions suivantes :

$$w = v(\alpha) + p(\alpha), \qquad v(\alpha) \in \mathcal{H}_m^\alpha,\ p(\alpha) \in \mathbb{N}_m,$$
$$\sigma(n(\alpha)) = s(n(\alpha)) + p(\alpha),\ s(n(\alpha)) \in \mathcal{H}_m^\alpha ;$$

la composante de w et celle de $\sigma(n(\alpha))$ sur N_m sont les mêmes car :

$$[v(\alpha) - s(n(\alpha))]\,(z_{j(k)}^{n(\alpha)}) = 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

On en déduit que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \qquad [v - \tau(n(\alpha))](t) = (v - \tau(n(\alpha)) \mid K_m(., t))_m =$$
$$= (v(\alpha) - s(n(\alpha)) \mid K_m(., t))_m$$

car $v - v(\alpha) \in N_m$ et $\tau(n(\alpha)) - s(n(\alpha)) \in N_m$.

Comme $[v(\alpha) - s(n(\alpha))](z_{j(0)}^{n(\alpha)}) = 0$, on a aussi :

$$[v - \tau(n(\alpha))](t) = (v(\alpha) - s(n(\alpha)) \mid K_m(., t) - H_m^\alpha(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}))_m .$$

Il en résulte que :

$$|[v - \tau(n(\alpha))](t)| \leqslant \| v(\alpha) - s(n(\alpha)) \|_m . \| K_m(., t) - H_m^\alpha(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}) \|_m$$
$$\leqslant 2 \| w \|_m . \{ \| K_m(., t) - K_m(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}) \|_m + \| K_m(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}) - H_m^\alpha(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}) \|_m \} .$$

Comme $(z, t) \to K_m(z, t)$ est continue sur Ω, on a :

$$\lim_{\alpha \to \infty} \| K_m(., t) - K_m(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}) \|_m^2 = \lim_{\alpha \to \infty} \{ [K_m(t, t) - K_m(t, z_{j(0)}^{n(\alpha)})] +$$
$$+ [K_m(z_{j(0)}^{n(\alpha)}, z_{j(0)}^{n(\alpha)}) - K_m(t, z_{j(0)}^{n(\alpha)})] \} = 0 .$$

D'autre part, de la proposition 5.1, il résulte que :

si $l_j^{n(\alpha)} \in N_m$, $1 \leqslant j \leqslant m$, est défini par : $l_j^{n(\alpha)}(z_{j(k)}^{n(\alpha)}) = \delta_{jk}$, $1 \leqslant k \leqslant m$,

on a :

$$\lim_{\alpha \to \infty} \| K_m(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}) - H_m^\alpha(., z_{j(0)}^{n(\alpha)}) \|_m^2 =$$
$$= \lim_{\alpha \to \infty} \left\| \sum_{k=1}^m \overline{l_k^{n(\alpha)}(z_{j(0)}^{n(\alpha)})} K_m(., z_{j(k)}^{n(\alpha)}) \right\|_m^2 =$$
$$= \lim_{\alpha \to \infty} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{k'=1}^m l_k^{n(\alpha)}(z_{j(0)}^{n(\alpha)}) . \overline{l_{k'}^{n(\alpha)}(z_{j(0)}^{n(\alpha)})} K_m(z_{j(k)}^{n(\alpha)}, z_{j(k')}^{n(\alpha)}) \right) .$$

Or, on vérifie facilement que si $l_k \in N_m$, $1 \leqslant k \leqslant m$, est défini par : $l_k(t_j) = \delta_{jk}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, on a :

$$\lim_{\alpha \to \infty} l_k^{n(\alpha)}(z_{j(0)}^{n(\alpha)}) = l_k(t) .$$

De même, on a :

$$\lim_{\alpha \to \infty} K_m(z_{j(k)}^{n(\alpha)}, z_{j(k')}^{n(\alpha)}) = K_m(t_k, t_{k'}) = 0 .$$

Donc : $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \| K_m(.,z_{j(0)}^{n(\alpha)}) - H_m^\alpha(.,z_{j(0)}^{n(\alpha)}) \|_m^2 = 0$.

On en déduit que : $\forall t \in \Gamma$, $\lim\limits_{n \to \infty} [\tau(n(\alpha)) - v](t) = 0$ et par conséquent que : $\forall t \in \Gamma$, $[v - \tau^*](t) = 0$.

Ainsi, v coïncide sur Γ avec τ^*.

Comme v et τ^* sont analytiques sur Ω, on a :

$$\forall z \in \Omega, \quad [v - \tau^*](z) = 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{n \to \infty} \| \tau(n) \|_m \geqslant \| v \|_m .$$

Mais : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\| \tau(n) \|_m = \| \sigma(n) \|_m \leqslant \| v \|_m = \| w \|_m$.

Donc : $\lim\limits_{n \to \infty} \| \tau(n) \|_m = \| v \|_m$.

Puisque $\tau(n) \underset{n \to \infty}{\rightharpoonup} v$, on a : $\lim\limits_{n \to \infty} \| \tau(n) - v \|_m = 0$ et par conséquent, on a aussi : $\lim\limits_{n \to \infty} \| \sigma(n) - w \|_m = 0$. ||

COROLLAIRE 5.1 : *Avec les mêmes hypothèses qu'au théorème* 5.1 *on a* : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma^{(p)}(n)$ *converge uniformément vers* $w^{(p)}$ *sur tout compact* K *contenu dans* Ω *tel que* : *distance* $(K, \partial\Omega) > 0$ *où* $\partial\Omega$ *est la frontière de* Ω.

Preuve : $\forall z \in \Omega$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*$,

$$| [\sigma(n(\alpha)) - w](z) | = | (\sigma(n(\alpha)) - w \mid H_m^\alpha(.,z))_m | \leqslant$$

$$\leqslant \| \sigma(n(\alpha)) - w \|_m . \| H_m^\alpha(.,z) \|_m$$

$$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \int_\Omega | [\sigma(n(\alpha)) - w](z) |^2 \, d\omega_z \leqslant \| \sigma(n(\alpha)) - w \|_m^2 . \int_\Omega (H_m^\alpha(z,z)) \, d\omega_z .$$

Comme $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \int_\Omega (H_m^\alpha(z,z)) \, d\omega_z = \int_\Omega K_m^\alpha(z,z) \, d\omega_z$, on en déduit que :

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_\Omega | [\sigma(n(\alpha)) - w](z) |^2 \, d\omega_z = 0 .$$

Mais d'autre part, avec le lemme 1.1,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ \forall z \in \Omega, \quad | [(\sigma(n(\alpha)))^{(p)} - w^{(p)}](z) | \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p!\sqrt{p+1}}{\sqrt{\pi}(R(z))^{p+1}} \left(\int_\Omega | [\sigma(n(\alpha)) - w](z) |^2 \, d\omega_z \right)^{1/2} .$$

On en déduit facilement le résultat précédent. ||

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ATTEIA, *Fonctions « spline » dans le champ complexe*, C.R.A.S., t. 273, octobre 1971, pp. 678-698.

[2] M. ATTEIA, *Fonctions « spline » et noyaux reproduisants d'Aronszajn-Bergman*, R.A.I.R.O., 4e année R. 3, 1970, pp. 31-43.

[3] C. FAGE-SIMPSON, *Fonctions « spline » complexes d'interpolation d'ordre m dans le champ complexe*, Thèse de 3e Cycle (décembre 1981).

[4] P.-J. LAURENT, *Approximation, Optimisation*, Hermann.

[5] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, 1967 (chap. 2).

[6] P. RABIER, *Interpolation harmonique*, R.A.I.R.O., vol. 11, nº 2, 1977.

[7] W. RUDIN, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill.

[8] L. SCHWARTZ, *Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés*, Journal d'Analyse Mathématique, Jérusalem, vol. 13, 1964.