

# RAIRO

## MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

PH. DESTUYNDER

D. NEVEU

### **Sur les modèles de lignes plastiques en mécanique de la rupture**

*RAIRO – Modélisation mathématique et analyse numérique*,  
tome 20, n° 2 (1986), p. 251-263.

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1986\\_\\_20\\_2\\_251\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1986__20_2_251_0)

© AFCET, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO – Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## **SUR LES MODÈLES DE LIGNES PLASTIQUES EN MÉCANIQUE DE LA RUPTURE (\*)**

par Ph. DESTUYNDER <sup>(1)</sup> et D. NEVEU <sup>(1)</sup>

Communique par P G CIARLET

---

*Résumé — Nous présentons ici un procédé d'obtention des modèles simplifiés en mécanique de la rupture ou les non-linéarités de comportement sont restreintes à une ligne (ou une surface en dimension trois) suivant laquelle la fissure est supposée se propager. On procède par passage à la limite en supposant que la zone où le comportement de la structure est non linéaire (plastique par exemple) est confinée dans une bande étroite entourant la ligne partant de la fissure. On obtient ainsi des modèles originaux très simples sur le plan de la mise en œuvre numérique et qui pour un milieu élasto-plastique, sont à rapprocher des modèles de forces de cohésion de Dugdale-Barenblatt.*

*Abstract — A procedure for deriving simplified fracture mechanics models is given. In such models the non linearity is confined on a line along which the crack is supposed to propagate. A limit process is used assuming that the plastic zone is included in a very narrow path around the crack. New models are thus obtained, the numerical formulation of which is very simple and which can be compared with those of Dugdale and Barenblatt, although they are different.*

### **I. INTRODUCTION**

Si la mécanique de la rupture élastique est largement utilisée dans la conception, le dimensionnement et la vérification des structures, alors que l'on connaît parfaitement ses limites, c'est parce que la prise en compte des non-linéarités de comportement au voisinage du fond de fissure est extrêmement complexe, à la fois sur le plan de la mécanique, que celui de la modélisation numérique. Nous nous proposons dans ce travail de formuler un modèle simplifié sur le plan de la résolution effective, obtenu à partir d'un modèle de comportement du milieu environnant le fond de fissure. L'hypothèse fondamentale est que

---

Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un contrat de recherche avec le CETIM Contrat n° 406-77

(\*) Reçu en février 1985

<sup>(1)</sup> Laboratoire de Mécanique, École Centrale des Arts et Manufactures, 92290 Châtenay Malabry (UA 850 CNRS)

la non-linéarité due au comportement du matériau est confinée dans un voisinage très petit du fond de fissure, ou plus exactement de la trajectoire de la fissure. Nous commencerons par décrire le procédé sur le modèle classique d'élastoplasticité de Hencky, puis nous l'étendrons au modèle de Prandtl et Reuss.

L'outillage que nous utilisons est principalement mathématique. L'essentiel repose, comme nous le verrons sur la formule de Green, ou formule d'intégration par parties, qui permet de transformer des grandeurs surfaciques (ou volumiques en dimension trois) en des grandeurs linéiques (respectivement surfaciques).

On suivra le plan suivant :

II. — Le modèle de Hencky

III. — Estimation a priori sur le modèle de Hencky et passage à la limite

IV. — Caractérisation du champ de déplacements du modèle limite

V. — Cas du modèle de Prandtl et Reuss

VI. — Conclusion et perspective.

## II. LE MODÈLE DE HENCKY

Soit  $\omega$  un ouvert plan présentant une fissure de longueur  $l$  et  $D$  une droite partant de cette fissure. On supposera pour simplifier, que l'axe  $x_1$  est porté par  $D$ , l'axe  $x_2$  lui étant perpendiculaire. La plasticité est supposée confinée dans une bande rectangulaire, soit :

$$B^\varepsilon = D \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \quad (\text{cf. fig. 1}).$$

Le complémentaire de  $B^\varepsilon$  dans  $\omega$  est noté  $\omega_\varepsilon^c$ . Les champs de déplacements et de contraintes sont respectivement  $u = (u_\alpha)$  et  $\sigma = (\sigma_{\alpha\beta})$ . Désignons par  $K^\varepsilon$  le convexe des champs de contraintes plastiquement admissibles, défini par :

$$K^\varepsilon = \{ \tau = (\tau_{\alpha\beta}); \tau_{12} = \tau_{21} f(\tau) \leq k^2 \text{ sur } B^\varepsilon \}, \quad (1)$$

où  $f(\cdot)$  est une fonction convexe.

On notera que si  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ , alors :

$$B^{\varepsilon_1} \subset B^{\varepsilon_2}$$

et par conséquent :

$$K^{\varepsilon_2} \subset K^{\varepsilon_1}. \quad (2)$$

Cette propriété est fondamentale dans la suite. L'espace des champs de déplacements compatibles avec les liaisons est noté  $\tilde{V}$ . A priori, nous autorisons des discontinuités de ces champs de part et d'autre de la ligne  $D$ , même sur la portion non fissurée. Un chargement  $l(\cdot)$  étant donné (forme linéaire continue sur  $\tilde{V}$ ), le Principe des Travaux Virtuels s'écrit (\*) (en fait on a  $v_\alpha \in H^1(\omega)$ ) :

$$\forall v \in \tilde{V}, \int_{\omega} \sigma_{\alpha\beta} \partial_\beta v_\alpha + \int_D \sigma_{\alpha 2} [v_\alpha] = l(v) \tag{3}$$

où  $\sigma_{\alpha 2}$  est la contrainte normale de part et d'autre de  $D$  et  $[v_\alpha]$  est le saut de  $v_\alpha$  dans la direction  $x_2$ .

Désignons alors par  $H_l$  l'espace affine des champs de contraintes sur  $\omega$ , satisfaisant le Principe des Travaux Virtuels. Si on pose par exemple :

$$l(v) = \int_{\omega} f_\alpha v_\alpha \text{ et } v_\alpha = 0 \text{ sur } \gamma_0 \text{ (cf. fig. 1),}$$

on a :

$$H_l = \{ \tau = (\tau_{\alpha\beta}); \tau_{12} = \tau_{21}; \partial_\beta \tau_{\beta\alpha} + f_\alpha = 0 \text{ sur } \omega, \tau_{\alpha\beta} n_\beta = 0 \text{ sur } \gamma_1 \} . \tag{4}$$

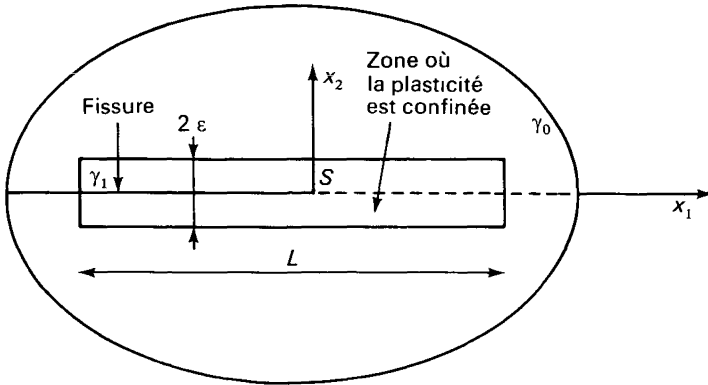


Figure 1.

Le tenseur de rigidité du milieu est désigné par  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  et possède les propriétés de symétrie et de positivité habituelles. Son inverse, le tenseur de souplesse, est noté  $S_{\alpha\beta\mu\nu}$ . On introduit alors la forme bilinéaire sur les champs de contraintes :

$$a(\sigma, \tau) = \int_{\omega} S_{\alpha\beta\mu\nu} \sigma_{\alpha\beta} \tau_{\mu\nu} . \tag{5}$$

(\*) On fait la convention de sommation sur les indices répétés.

Le modèle de Hencky consiste à trouver un champ de contraintes  $\sigma$  de l'espace  $K^\varepsilon \cap H_b$ , tel que [1]

$$\boxed{\forall \tau \in K^\varepsilon \cap H_l; \quad a(\sigma, \tau - \sigma) \geq 0} \quad (6)$$

D'un point de vue mathématique, on introduit un cadre fonctionnel en remplaçant  $H_l$  par l'espace :

$$H(\text{div}) = \{ \tau = (\tau_{\alpha\beta}) \in (L^2(\omega))^4; \tau_{12} = \tau_{21}; \partial_\beta \tau_{\alpha\beta} \in (L^2(\omega))^2 \}$$

et  $H_l$  est le sous-espace de  $H(\text{div})$  tel que :

$$H_l = \{ \tau \in H(\text{div}); \partial_\beta \tau_{\beta\alpha} + f_\alpha = 0 \quad \tau_{\alpha\beta} n_\beta = 0 \text{ sur } \gamma_1 \}$$

(on suppose  $f_\alpha \in L^2(\omega)$ ).

Avec ce choix, et dans l'hypothèse où l'ensemble  $K^\varepsilon \cap H_l$  est non vide, le problème (6) admet une solution unique [1]. L'hypothèse précédente assure simplement que la charge limite n'est pas dépassée [2].

*Remarque 1 :* On démontre à l'aide de la formule de Stokes que pour tout élément  $\tau$  de l'espace  $H(\text{div})$ , la composante normale de  $\tau$  suivant toute courbe  $C$  dans  $\bar{\omega}$  est un vecteur dont les composantes sont des éléments de l'espace de Sobolev fractionnaire  $H^{-1/2}(C)$ . En outre, l'application qui a un élément de  $H(\text{div})$  fait correspondre sa trace normale sur la courbe  $C$ , est linéaire, continue et surjective.

### III. ESTIMATION A PRIORI SUR LE MODÈLE DE HENCKY ET PASSAGE A LA LIMITE QUAND $\varepsilon$ TEND VERS ZÉRO

Désignons par  $\sigma^\varepsilon$  la solution de l'inéquation variationnelle (6). Elle vérifie :

$$\forall \tau \in K^\varepsilon \cap H_l \quad a(\sigma^\varepsilon, \sigma^\varepsilon) \leq a(\tau, \sigma^\varepsilon). \quad (7)$$

Or,  $a(\cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire à la fois bicontinue et coercive sur l'espace  $H_l$ ; c'est-à-dire que :

$$\forall \tau \in H_l, \quad a(\tau, \tau) \geq C_0 \|\tau\|_{H_l}^2$$

et

$$\forall (\tau, \sigma) \in (H_l)^2, \quad a(\sigma, \tau) \leq M \cdot \|\tau\|_{H_l} \cdot \|\sigma\|_{H_l}.$$

Si nous choisissons dans (7) un champ  $\tau$  de l'ensemble  $K^{\varepsilon_0} \cap H_l$  et compte tenu de l'inclusion (2), il vient :

$$\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad \|\sigma^\varepsilon\|_{H_l} \leq C \tag{8}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ . Cette estimation nous permet d'extraire de la suite  $\sigma^\varepsilon$  une sous-suite, que nous noterons de la même façon, qui est telle que :

$$\sigma^\varepsilon \rightarrow \sigma^*,$$

lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, et ceci dans l'espace  $H_l$  au sens faible; c'est-à-dire au sens du produit scalaire :

$$(\tau, \sigma)_l = \int_{\omega} \tau_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \int_{\omega} \partial_\beta \tau_{\alpha\beta} \partial_\mu \sigma_{\alpha\mu}. \tag{9}$$

On sait qu'une fonction convexe continue est aussi semi-continue inférieurement pour la topologie faible. Par conséquent, il vient pour tout  $\tau$  de l'ensemble  $K^\varepsilon \cap H_l$  :

$$a(\sigma^*, \sigma^*) \leq \liminf a(\sigma^\varepsilon, \sigma^\varepsilon) \leq a(\tau, \sigma^*)$$

soit :

$$\forall \varepsilon, \forall \tau \in K^\varepsilon \cap H_l; \quad a(\sigma^*, \tau - \sigma^*) \geq 0.$$

Posons maintenant :

$$K^0 = \overline{\bigcup_{\varepsilon > 0} K^\varepsilon} \cap H(\text{div}). \tag{8}$$

Le convexe fermé  $K^0$  est en fait (cf. (2)) le plus petit convexe fermé contenant tous les  $K^\varepsilon$ . Ainsi, tout élément de  $K^0$  est limite d'une suite de  $K^\varepsilon \cap H(\text{div})$  et inversement toute limite de suite de  $K^\varepsilon \cap H(\text{div})$  est dans  $K^0$ . Par conséquent, on a d'une part :

$$\sigma^* \in K^0 \cap H_l$$

et d'autre part, en utilisant la continuité de  $a(., .)$  :

$$\forall \tau \in K^0 \cap H_l, \quad a(\sigma^*, \tau - \sigma^*) \geq 0. \tag{9}$$

En fait, la stricte convexité de  $a(., .)$  permet de conclure à l'unité de  $\sigma^*$  élément de  $K^0$  et solution de (9). On peut alors démontrer par l'absurde que toute la suite  $\sigma^\varepsilon$  converge vers  $\sigma^*$  et ensuite que la convergence est forte. Par contre, la vitesse de convergence avec  $\varepsilon$  est un problème ouvert.

IV. CARACTÉRISATION DU CONVEXE LIMITE  $K^0$ 

Nous utiliserons les axes de coordonnées de la figure 1. La formule de Green nous permet alors d'écrire pour tout champ de contraintes  $\tau$  et de déplacements  $v$  respectivement dans les espaces  $H(\text{div})$  et  $\mathcal{V}$  :

$$\int_D \sigma_{2\alpha} v_\alpha = \int_{\omega^+} \sigma_{\alpha\beta} \partial_\beta v_\alpha + \int_{\omega^+} \partial_\beta \sigma_{\alpha\beta} v_\alpha$$

(en nous restreignant à des champs  $v$  à support dans  $\omega^+(x_2 > 0)$ ). Posons alors :

$$v_\alpha = a_\alpha \eta(x_2) \cdot \varphi(x_1) \quad \alpha = 1, 2$$

où  $a_\alpha$  est un vecteur constant,  $\eta(\cdot)$  une fonction de la coordonnée  $x_2$  définie par :

$$\eta(x_2) = \frac{\varepsilon - x_2}{\varepsilon},$$

et  $\varphi(\cdot)$  une fonction arbitraire de l'espace  $\mathcal{D}(D)$  (régulière et nulle au voisinage des extrémités). Il vient :

$$\int_D \sigma_{2\alpha} a_\alpha \varphi = \int_D \int_0^\varepsilon \left[ \sigma_{\alpha 1} \partial_1 \varphi a_\alpha \left(1 - \frac{x_2}{\varepsilon}\right) - \sigma_{\alpha 2} a_\alpha \frac{\varphi}{\varepsilon} \right] + \int_D \int_0^\varepsilon \partial_\beta \sigma_{\alpha\beta} a_\alpha \eta \varphi.$$

Mais, en utilisant les majorations suivantes :

- (i)  $\left| \int_D \int_0^\varepsilon f_\alpha a_\alpha \eta \varphi \right| \leq C \sqrt{\varepsilon} [\| a_\alpha \partial_\beta \sigma_{\alpha\beta} \|_{0,\omega} \| \varphi \|_{1,0,D}]$
- (ii)  $\left| \int_D \int_0^\varepsilon \sigma_{\alpha 2} a_\alpha \frac{\varphi}{\varepsilon} \right| \leq \left| \int_D [\sup_{\tau \in K^\varepsilon} \tau_{\alpha 2} a_\alpha] | \varphi | \right| \quad (\forall \varepsilon > 0)$
- (iii)  $\left| \int_D \int_0^\varepsilon \sigma_{\alpha 1} \partial_1 \varphi a_\alpha \left(1 - \frac{x_2}{\varepsilon}\right) \right| \leq C \sqrt{\varepsilon} [\| \sigma_{\alpha 1} \|_{0,\omega} \| \varphi \|_{0,1,D}],$

on en déduit que pour tout  $\varepsilon > 0$ , toute fonction de  $(D)$  et pour tout vecteur  $a$  :

$$\int_D \sigma_{2\alpha} a_\alpha \varphi \leq \left\{ \sup_{\tau \in K^\varepsilon \cap H(\text{div})} \tau_{2\alpha} a_\alpha \right\} \int_D | \varphi |. \quad (10)$$

Posons pour tout vecteur  $a$  :

$$k_a = \sup_{\tau \in K^\varepsilon, \varepsilon > 0} \tau_{2\alpha} a_\alpha,$$

compte tenu de (2) et de (8), on a en fait :

$$k_a = \sup_{\tau \in K^0} \tau_{2\alpha} a_\alpha.$$

L'inégalité (10) implique que pour tout vecteur  $a$ , un champ de contraintes de  $K^\varepsilon \cap H(\text{div})$  vérifie sur  $D$  :

$$|\sigma_{2\alpha} a_\alpha|(M) \leq k_a, \text{ sur } D$$

et ceci pour tout vecteur  $a$ .

Dans l'espace  $H(\text{div})$ , on définit le convexe  $K^\infty$  par :

$$K^\infty = \{ \tau = (\tau_{\alpha\beta}); |\sigma_{2\alpha} a_\alpha|(M) \leq k_a \quad \forall a = (a_\alpha) \forall M \in D \} . \quad (11)$$

On a bien d'après (10)

$$K^0 \subset K^\infty .$$

Réciproquement, si  $\sigma$  est élément de  $K^\infty$ , on a :

$$\sigma_{2\alpha} a_\alpha - k_a \leq 0 \quad \forall a = (a_\alpha)$$

d'où :

$$\psi_{K^0}^* = \sup_a (\sigma_{2\alpha} a_\alpha - k_a) = 0 .$$

Puisque  $\psi_{K^0}^*$  est la fonction polaire de  $k_a$ , qui est la jauge de  $K^0$ , c'est aussi la fonction indicatrice de  $K^0$ . Par conséquent,  $\sigma \in K^0$ . On a donc établi que  $K^0 = K^\infty$  en utilisant une caractérisation polaire du convexe  $K^0$ .

Donnons maintenant une caractérisation explicite de  $K^0$  pour les situations pratiques.

a) *Cas des déformations planes* (critère de Von Mises).

On a pour cette situation :

$$f(\tau) = \frac{(\tau_{11} - \tau_{22})^2}{2} + 2 \tau_{12}^2 (\leq k^2) .$$

Par conséquent :

$$k_a = \sup_{\tau \in K} [\tau_{22} a_2 + \tau_{12} a_1] = \begin{cases} + \infty & \text{si } a_2 \neq 0, \\ \frac{a_1 k}{\sqrt{2}} & \text{sinon.} \end{cases}$$



Finalement, on en déduit que dans l'espace  $H(\text{div})$ , on a :

$$K^0 = \left\{ \tau = (\tau_{\alpha\beta}) \sqrt{2} \mid \tau_{12} \mid \leq k \text{ sur } D \right\} . \tag{12}$$

b) *Cas des contraintes planes* (critère de Von Mises).

On a cette fois :

$$f(\tau) = \frac{(2 \tau_{11} - \tau_{22})^2}{9} + \frac{(2 \tau_{22} - \tau_{11})^2}{9} + \frac{(\tau_{11} + \tau_{22})^2}{9} + 2 \tau_{12}^2 (\leq k^2) .$$

Un simple calcul conduit ici à l'expression :

$$K^0 = \left\{ \tau = (\tau_{\alpha\beta}); \frac{1}{2} \tau_{22}^2 + 2 \tau_{12}^2 \leq k^2 \text{ sur } D \right\} . \tag{13}$$

**IV. CARACTÉRISATION DU CHAMP DE DÉPLACEMENTS DU PROBLÈME LIMITE**

La recherche d'un champ de déplacements dans les modèles élasto-plastiques est un problème complexe. Le premier résultat connu est dû à C. Johnson [3] et a été obtenu par une méthode de régularisation. Par la suite, d'autres auteurs ont montré que ce champ de déplacements (non nécessairement unique) présente une régularité supplémentaire (les déformations sont des mesures bornées). Dans le cas présent, le résultat est beaucoup plus simple à obtenir.

Considérons l'inéquation (9). Si nous posons :

$$\tau = \sigma^* + \delta \quad \text{et} \quad \delta \cdot n = 0 \text{ sur } D ,$$

il vient :

$$\text{div } \delta = 0 \quad \text{et} \quad \delta \in K^0$$

d'où :

$$\forall \delta; \quad \text{div } \delta = 0, \quad \delta \cdot n = 0 \text{ sur } D, \quad a(\sigma^*, \delta) \geq 0$$

soit :

$$\forall \delta; \quad \text{div } \delta = 0, \quad \delta \cdot n = 0 \text{ sur } D, \quad a(\sigma^*, \delta) = 0 . \tag{14}$$

Considérons alors le couple  $(\sigma, u)$  de l'espace  $(L^2(\omega))_s^4 \times \mathcal{V}$  solution de :

$$\forall \tau \in (L^2(\omega))_s^4, \quad a(\sigma, \tau) = - \int_{\omega} \text{Tr} \left( \tau \cdot \frac{\partial u}{\partial M} \right) + a(\sigma^*, \tau) \quad (15)$$

$$\forall v \in \mathcal{V} - \int_{\omega} \text{Tr} \left( \sigma \cdot \frac{\partial v}{\partial M} \right) = 0. \quad (16)$$

Si on choisit  $\delta = \sigma$  dans (14), on obtient :

$$a(\sigma, \sigma) = a(\sigma^*, \sigma) = 0$$

d'où

$$\sigma = 0$$

soit

$$\forall \tau \in [L^2(\omega)]_s^4, \quad a(\sigma^*, \tau) = \int_{\omega} \text{Tr} \left( \tau \cdot \frac{\partial u}{\partial M} \right)$$

ce qui implique :

$$\sigma^* = R \cdot \gamma(u) \quad \text{sur } \omega.$$

Par ailleurs,  $\sigma^* \in H_1$ . D'où :

$$\forall v \in \mathcal{V} - \int_{\omega} \text{div } \sigma^* \cdot v = l(v)$$

ou encore :

$$\forall v \in \mathcal{V} \int_{\omega} \text{Tr} \left( \sigma^* \cdot \frac{\partial v}{\partial M} \right) - \int_D \bar{n} \cdot \sigma^* \cdot [v] = l(v)$$

où  $[v]$  désigne le saut du champ de déplacements le long de  $D$ . On a ainsi si  $\tau \in H_1$  :

$$\begin{aligned} a(\sigma^*, \tau - \sigma^*) &= \int_{\omega} \text{Tr} \left( \tau - \sigma^* \cdot \frac{\partial u}{\partial M} \right) = \int_{\omega} \text{Tr} \left( \tau \cdot \frac{\partial u}{\partial M} \right) - \\ &\quad - \int_{\omega} \text{Tr} \left( \sigma^* \cdot \frac{\partial u}{\partial M} \right) \\ &= \int_D \bar{n} \cdot \tau \cdot [u] - \int_{\omega} \text{div } \tau \cdot u - l(u) - \int_D \bar{n} \cdot \sigma^* \cdot [u] \\ &= \int_D \bar{n} \cdot (\tau - \sigma^*) [u] \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons trouvé un champ de déplacements  $u$  de l'espace  $\tilde{V}$  (donc régulier), tel que :

$$\sigma^* = R.\gamma(u) \quad \text{sur } \omega, \quad (17)$$

$$\forall v \in \tilde{V} \int_{\omega} \text{Tr} \left( \sigma^* \cdot \frac{\partial v}{\partial M} \right) - \int_D n.\sigma^*.[v] = l(v), \quad (18)$$

$$\forall \tau \in K^0; \int_D \bar{n}.\tau.\sigma^*.[u] > 0; \quad \sigma^* \in K^0; \quad (19)$$

on notera en fait que la troisième relation est locale sur  $D$ , c'est-à-dire qu'en chaque point on a :

$$\forall \tau \in K^0 \bar{n}.\tau.\sigma^*.[u] \geq 0. \quad (19bis)$$

*Remarque 2 :* L'unicité du champ de déplacements  $u$  est immédiate à partir de (17) et de l'unicité de  $\sigma^*$ . On est donc dans une situation très différente de celle rencontrée en élasto-plasticité répartie.  $\square$

*Remarque 3 :* La résolution effective du modèle (17)-(18)-(19) est réalisable à l'aide d'un algorithme de gradient (ou d'Uzawa) sur le problème en contraintes. On part de  $(\sigma^0, u^0)$  solution du problème élastique :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma^0, u^0) \in (L^2(\omega))_s^4 \times \tilde{V} \\ \forall \tau \in (L^2(\omega))_s^4; \quad a(\sigma^0, \tau) = \int_{\omega} \text{Tr} \left( \tau \cdot \frac{\partial u^0}{\partial M} \right), \\ \forall v \in \tilde{V}; \quad \int_{\omega} \text{Tr} \left( \sigma^0 \cdot \frac{\partial v}{\partial M} \right) = l(v). \end{array} \right.$$

On pose ensuite à partir de  $(\sigma^n, u^n)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^{n+1} = P_{K^0}(\sigma^n + \rho[u^n]) \quad (\rho > 0) \\ \text{et } (\sigma^{n+1}, u^{n+1}) \in (L^2(\omega))_s^4 \times \tilde{V} \text{ tel que} \\ \forall \tau \in (L^2(\omega))_s^4, \quad a(\sigma^{n+1}, \tau) = \int_{\omega} \text{Tr} \left( \tau \cdot \frac{\partial u^{n+1}}{\partial M} \right), \\ \forall v \in \tilde{V}, \quad \int_{\omega} \text{Tr} \left( \sigma^{n+1} \cdot \frac{\partial v}{\partial M} \right) = l(v) + \int_{\omega} \bar{n} \cdot \lambda^{n+1} \cdot [v]. \end{array} \right. \quad (20)$$

La convergence de cet algorithme est assurée par un coefficient  $\rho$  suffisamment petit. Par ailleurs, chaque étape ne nécessite que la résolution du modèle élastique sur  $\omega$  avec prise en compte d'une force de cohésion le long de  $D$ .

*Remarque 4* : L'inégalité (19bis) permet d'écrire :

$$\begin{cases} \sigma^* \in \overset{\circ}{K}^0 \Rightarrow [u] = 0 \\ \sigma^* \in \partial K^0 \Rightarrow [u] \text{ peut être non nul. } \blacksquare \end{cases}$$

*Remarque 5* : Dans le cas de déformations planes le convexe  $K^0$  ne fait intervenir que la contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}$ . C'est le seul mode de rupture plastique possible. Il conduit à un glissement le long de  $D$ . Par contre, dans le cas de contraintes planes, les deux sauts de déplacements  $[u_\alpha]$  peuvent être discontinus. D'autres résultats seraient obtenus avec le critère de Tresca.  $\blacksquare$

#### V. CAS DU MODÈLE DE PRANDTL ET REUSS [1]

Rappelons tout d'abord la formulation du modèle de Prandtl et Reuss. Le champ de contraintes est relié aux déformations totales  $\gamma$  et plastiques  $\gamma^p$  par :

$$\sigma = R \cdot (\gamma - \gamma^p);$$

l'évolution de  $\gamma^p$  est régie par :

$$\forall \tau \in K^\varepsilon, \quad \text{Tr}(\dot{\gamma}^p \cdot (\tau - \sigma)) \leq 0; \quad \sigma \in K^\varepsilon.$$

L'ensemble des deux relations ci-dessus jointes au Principe des Puissances Virtuelles

$$\forall v \in \tilde{V} \int_{\omega} \text{Tr}(\sigma \cdot \gamma(v)) - \int_{\omega} \bar{n} \cdot \sigma \cdot [v] = l(v),$$

constituent le modèle de Prandtl et Reuss.

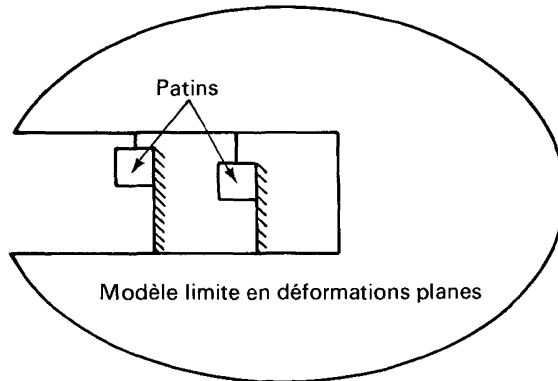
La formulation incrémentale consiste à trouver  $\sigma^{n+1}$  (à l'instant  $(n + 1) \Delta t$ ), connaissant  $\sigma$  (à l'instant  $n \Delta t$ ) tel que :

$$\begin{aligned} \sigma^{n+1} &\in K^e \\ \forall \tau \in K^e, a(\sigma^{n+1}, \tau - \sigma^{n+1}) &\geq \int_{\omega} \text{Tr} [(\tau - \sigma^{n+1}) \cdot \gamma(u^{n+1})] \\ &\quad + a(\sigma^n, \tau - \sigma^{n+1}) - \int_{\omega} \text{Tr} [(\tau - \sigma^{n+1}) \cdot \gamma(u^n)] \\ \forall v \in \tilde{V} \int_{\omega} \text{Tr} (\sigma^{n+1} \cdot \gamma(v)) &= l(v) + \int_{\omega} \bar{n} \cdot \sigma^{n+1} \cdot [v] \end{aligned}$$

On retrouve donc un modèle de Hencky auquel on peut appliquer la théorie du paragraphe précédent.

## VI. CONCLUSION ET PERSPECTIVE

Lorsque la plasticité est très confinée le long d'une droite portant la fissure, le modèle élasto-plastique peut être approché par un modèle plus simple où la non-linéarité est limitée à la ligne de fissure. Ce modèle est formulé en (17)-(18) et (19). Dans le cas des déformations planes, ce modèle peut s'interpréter comme le modèle continu associé au schéma discret de la figure 4.



Le schéma est plus complexe dans le cas de contraintes planes (*cf. fig. 3*).

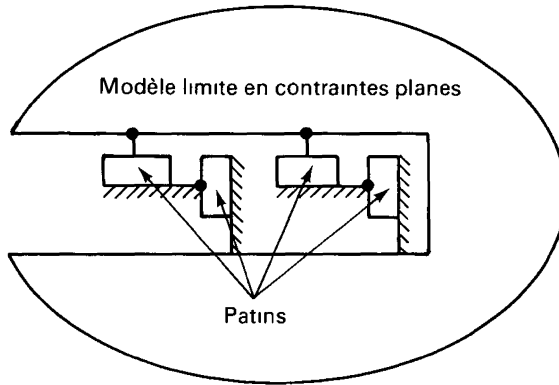


Figure 3.

Le modèle que nous avons mis en évidence mathématiquement est original. Mais il est encore insuffisant car il ne prend pas en compte les phénomènes d'endommagement. C'est l'objet de la prochaine étape de notre étude.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. DUVAUT, J. L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod (1972), Paris.
- [2] J. SALENÇON, *Théorie de la plasticité*, Eyrolles (1973), Paris.
- [3] C. JOHNSON, *Existence Theorems for Plasticity Problems* (J. Math. Pures et Appl., Vol. 55, 1976, pp. 431-444).

UNIVERSITE PAUL SABATIER  
 DE STATISTIQUE ET PROBABILITES  
 118, ROUTE DE NARbonne  
 31062 TOULOUSE CEDEX