

# RAIRO

## MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

ALAIN BRILLARD

MIGUEL LOBO

EUGENIA PEREZ

### **Homogénéisation de frontières par épi- convergence en élasticité linéaire**

*RAIRO – Modélisation mathématique et analyse numérique*,  
tome 24, n° 1 (1990), p. 5-26.

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1990\\_\\_24\\_1\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1990__24_1_5_0)

© AFCET, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO – Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>



## HOMOGENÉISATION DE FRONTIÈRES PAR ÉPI-CONVERGENCE EN ÉLASTICITÉ LINÉAIRE (\*)

par Alain BRILLARD <sup>(1)</sup>, Miguel LOBO <sup>(2)</sup>, Eugenia PEREZ <sup>(2)</sup>

Communiqué par E. SANCHEZ-PALENCIA

*Résumé.* — Un corps élastique homogène est fixé sur des zones de taille  $r_\varepsilon$ , réparties  $\varepsilon$ -périodiquement sur une partie  $\Sigma$  de sa frontière. On étudie, à l'aide des techniques d'épi-convergence, le comportement limite, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, de ce corps élastique. Sur  $\Sigma$  ce comportement limite peut être la liberté totale, la fixité parfaite ou un comportement intermédiaire entre ces deux situations précédentes, selon la taille des inclusions. Une taille critique  $r_\varepsilon^c = \varepsilon^2$  des inclusions est exhibée. On examine, enfin, le comportement asymptotique de la solution du problème de Signorini associé.

*Abstract.* — An homogeneous elastic body is stuck on identical zones of size  $r_\varepsilon$ ,  $\varepsilon$ -periodically distributed on a part  $\Sigma$  of its boundary. The asymptotic behaviour, when  $\varepsilon$  converges to 0, of the body, is described, through epi-convergence methods. Along  $\Sigma$ , this limit behaviour may be either the total freedom either the complete stickness or an intermediate situation, depending on the size  $r_\varepsilon$  of these inclusions. A critical size  $r_\varepsilon^c = \varepsilon^2$  is exhibited. The last part of this study deals with the limit of the solution of Signorini's problem in this present context.

### 1. INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLÈME

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de frontière lipschitzienne de  $\mathbb{R}^3$ , dont une partie  $\Sigma$  de la frontière  $\partial\Omega$  est contenue dans le plan  $x_3 = 0$ . Soit  $\Gamma = \partial\Omega - \Sigma$  et  $\Gamma_1, \Gamma_2$  deux ouverts de  $\Gamma$  tels que  $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ , avec  $\text{mes}(\Gamma_2) > 0$ . Soit  $T$  un ouvert de frontière régulière de  $\mathbb{R}^2$ , contenu dans le disque unité  $B_2(1)$  de  $\mathbb{R}^2$ .

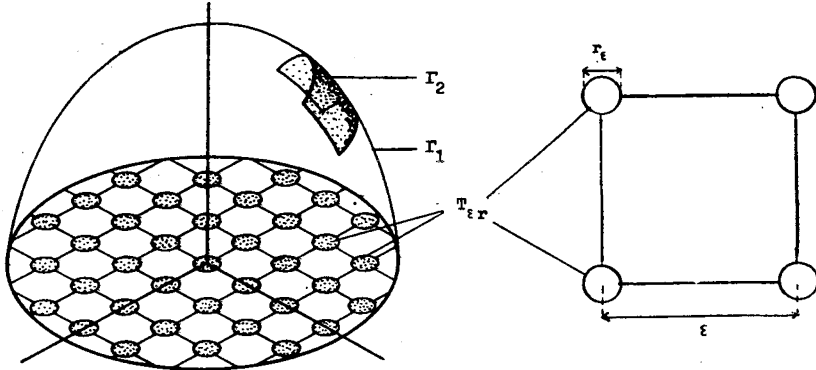
(\*) Reçu en mars 1988.

<sup>(1)</sup> Faculté des Sciences et Techniques, 4 rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse Cedex, France.

<sup>(2)</sup> Facultad de Ciencias, Avenida de los Castros s/n., 39005 Santander, Espagne.

Ce travail a été partiellement supporté par la CAYCIT.

Au centre  $x_{er}$  de chaque maille d'un réseau rectangulaire de taille  $\varepsilon$  et recouvrant  $\Sigma$ , on place un  $r_\varepsilon$ -homothétique  $T_{er}$  de  $T$  ( $0 < r_\varepsilon < \varepsilon/2$ ), selon le schéma suivant :



L'ouvert  $\Omega$  est occupé par un corps élastique homogène, fixé sur  $\Gamma_2$  et sur chaque zone  $T_{er}$  ( $r$  est compris entre 1 et  $R(\varepsilon)$ ,  $R(\varepsilon)$  étant le nombre de zones de fixation contenues dans  $\Sigma$  ;  $R(\varepsilon)$  est équivalent à aire  $(\Sigma)/\varepsilon^2$ ). Le corps élastique est libre sur  $\Sigma - \bigcup_r T_{er}$  et sur  $\Gamma_1$ , et soumis à des forces extérieures  $\bar{f}$ ,  $\bar{f} = (f_1, f_2, f_3)$  appartenant à  $(L^2(\Omega))^3$ . Nous noterons  $c$  la quantité  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (r_\varepsilon/\varepsilon^2)$ .

Soient

$$e_{kh}(\bar{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right) \quad (\text{tenseur des déformations}),$$

$$\sigma_{ij}(\bar{u}) = a_{ijkh} e_{kh}(\bar{u}) \quad (\text{tenseur des contraintes}),$$

où les coefficients  $a_{ijkh}$  satisfont les conditions habituelles de symétrie et d'ellipticité en élasticité linéaire (cf. [2], [11]). Nous avons adopté la convention de sommation des indices répétés.

Nous étudions le comportement asymptotique, lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, de la solution du problème suivant :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon) + f_i = 0 \text{ dans } \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \\ u_i^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \bigcup_r T_{er}, \\ \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon) n_j = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ \sigma_{i3}(\bar{u}^\varepsilon) = 0 \text{ sur } \Sigma - \bigcup_r T_{er}, \end{cases}$$

où  $\bar{n}$  est la normale extérieure à  $\Gamma_1$ .

La formulation variationnelle du problème (1.1) est :

$$(1.2) \quad \text{Min}_{\bar{u} \in (H^1(\Omega))^3} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx + \delta_{V_\varepsilon(\Omega)}(\bar{u}) - \int_{\Omega} \bar{f} \cdot \bar{u} dx \right),$$

$\delta_{V_\varepsilon(\Omega)}$  étant la fonction indicatrice de l'espace  $V_\varepsilon(\Omega)$  obtenu par fermeture dans  $(H^1(\Omega))^3$  de  $\left\{ \bar{u} \in (C^1(\bar{\Omega}))^3 / \bar{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \bigcup_r T_{er} \right\}$ .

Soit  $\bar{u}^\varepsilon$  l'unique solution dans  $V_\varepsilon(\Omega)$  du problème (1.2). Grâce aux propriétés d'ellipticité des coefficients  $a_{ijkh}$  et à l'inégalité de Korn dans  $\Omega$  (cf. [5]) on obtient que la suite  $(\bar{u}^\varepsilon)_\varepsilon$  est bornée dans  $(H^1(\Omega))^3$ .

Dans [8, 9] on démontre par les techniques d'analyse asymptotique formelle que le problème limite est :

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\bar{u}^0) + f_i = 0 \text{ dans } \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \\ u_i^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \\ \sigma_{ij}(\bar{u}^0) n_j = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \end{array} \right.$$

$$(1.4) \quad \sigma_{i3}(\bar{u}^0) + c C_{ij} u_j^0 = 0 \text{ sur } \Sigma \quad \text{si } c \geq 0,$$

$$(1.5) \quad u_j^0 = 0 \text{ sur } \Sigma \quad \text{si } c = +\infty,$$

où  $C = (C_{ij})_{i,j=1,2,3}$  est la matrice symétrique et définie positive dont les coefficients sont donnés par l'expression :

$$(1.6) \quad C_{kl} = \int_{\mathbb{R}^{3+}} \sigma_{ij,y}(\bar{W}^k) e_{ij,y}(\bar{W}^l) dy \quad k, l = 1, 2, 3,$$

$\bar{W}^k$  étant la solution du problème local (cf. [9]),

$$(1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij,y}(\bar{W}^k) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^{3+}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \bar{W}^k = \bar{e}^k \text{ sur } T, \\ \sigma_{i3,y}(\bar{W}^k) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2 - \bar{T}, \\ \bar{W}^k(y) \longrightarrow 0, \\ \quad \quad \quad |y| \rightarrow +\infty \\ \quad \quad \quad y_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

( $\bar{e}^k$  est le vecteur tel que :  $e_i^k = \delta_{ik}$ ,  $i, k = 1, 2, 3$ , et  $\delta_{ik}$  est le symbole de Kronecker).

La formulation variationnelle du problème (1.3), (1.4) est :

$$(1.8) \quad \text{Min}_{\bar{u} \in (H^1(\Omega))^3} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx + \frac{1}{2} c \int_{\Sigma} C_{ij} u_i u_j d\Sigma + \delta_{V(\Omega)}(\bar{u}) - \int_{\Omega} \bar{f} \cdot \bar{u} dx \right).$$

La formulation variationnelle du problème (1.3), (1.5) ( $c = +\infty$ ) est :

$$(1.9) \quad \text{Min}_{\bar{u} \in (H^1(\Omega))^3} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx + \delta_{V_0(\Omega)}(\bar{u}) - \int_{\Omega} \bar{f} \cdot \bar{u} dx \right),$$

où l'espace  $V(\Omega)$  est obtenu par fermeture dans  $(H^1(\Omega))^3$  de l'espace  $D = \{\bar{u} \in (C^1(\bar{\Omega}))^3 / \bar{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}$  et

$$V_0(\Omega) = \{\bar{u} \in V(\Omega) / \bar{u} = 0 \text{ sur } \Sigma\}.$$

Dans la deuxième partie de cet article nous démontrons, en utilisant les techniques d'épi-convergence, le résultat suivant :

**THÉORÈME 1.1 :** *La suite  $(\bar{u}^\varepsilon)_\varepsilon$ ,  $\bar{u}^\varepsilon$  solution du problème (1.2), converge dans la topologie faible de  $(H^1(\Omega))^3$  vers  $\bar{u}^0$  solution de (1.8) si  $c \geq 0$ , et vers  $\bar{u}^{0*}$  solution de (1.9) si  $c = +\infty$ .*

Il apparaît donc une taille critique des zones de fixation  $r_\varepsilon^c = \varepsilon^2$ . Si les zones de fixation ont une taille « petite » ( $c = 0$ ), le corps élastique se comporte asymptotiquement comme un corps libre sur  $\Sigma$  ; si les zones de fixation ont une taille « grande » ( $c = +\infty$ ), le corps se comporte asymptotiquement comme un corps fixé sur  $\Sigma$  ; entre ces deux situations apparaît un comportement asymptotique intermédiaire entre la liberté et la fixation totales.

Le terme étrange qui apparaît dans le problème limite (1.3), (1.4), pour  $c > 0$ , dépend de la taille des zones et de leur forme (cf. le problème « capacitaire » (1.7)). Nous indiquons dans ce cas ( $c > 0$ ) le correcteur du premier ordre. Le résultat que nous obtenons est comparable aux résultats établis antérieurement, dans des situations voisines ([3] et [13]).

Dans la troisième partie nous considérons le cas particulier  $r_\varepsilon = \alpha\varepsilon$ ,  $\alpha > 0$ . Dans cette situation, la convergence de  $\bar{u}^\varepsilon$  vers  $\bar{u}^{0*}$  a lieu dans la topologie forte de  $(H^1(\Omega))^3$ . Nous précisons la vitesse de convergence des suites  $(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})_\varepsilon$  et  $(\bar{u}^\varepsilon|_\Sigma)_\varepsilon$ .

Dans la quatrième partie nous décrivons le comportement asymptotique de la solution du problème de Signorini associé. Cette description est également faite à l'aide des techniques d'épi-convergence, dont nous rappelons maintenant la définition et les propriétés essentielles.

DÉFINITION 1.2 : Soit  $(X, \tau)$  un espace métrique. Soient  $F^\varepsilon$  et  $F$  des fonctionnelles définies sur  $(X, \tau)$  à valeurs dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . La suite  $(F^\varepsilon)_\varepsilon$   $\tau$ -épi-converge vers  $F$  si et seulement si les assertions suivantes sont satisfaites :

1) Pour tout  $x \in X$ , il existe une suite  $(x_0^\varepsilon)_\varepsilon$  qui  $\tau$ -converge vers  $x$  et telle que  $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(x_0^\varepsilon) \leq F(x)$ .

2) Pour tout  $x \in X$  et pour toute suite  $(x^\varepsilon)_\varepsilon$  qui  $\tau$ -converge vers  $x$ ,  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(x^\varepsilon) \geq F(x)$ .

L'adéquation de l'épi-convergence à l'analyse limite de problèmes de minimisation est explicitée dans la proposition suivante (cf. [1], [4]).

PROPOSITION 1.3 : 1) Supposons que le problème  $\text{Min}_{x \in X} F^\varepsilon(x)$  ait une

solution  $x^\varepsilon$ . Si la suite  $(x^\varepsilon)_\varepsilon$  est relativement compacte dans la topologie  $\tau$  et si la suite  $(F^\varepsilon)_\varepsilon$   $\tau$ -épi-converge vers  $F$ , alors toute valeur d'adhérence  $\bar{x}$  de  $(x^\varepsilon)_\varepsilon$  dans la topologie  $\tau$  vérifie  $F(\bar{x}) = \text{Min}_{x \in X} F(x)$ . De plus

$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} F^{\varepsilon'}(x^{\varepsilon'}) = F(\bar{x})$  où  $(x^{\varepsilon'})_{\varepsilon'}$  est la sous-suite de  $(x^\varepsilon)_\varepsilon$  qui converge vers

$\bar{x}$  dans la topologie  $\tau$ .

2) Supposons que  $(F^\varepsilon)_\varepsilon$   $\tau$ -épi-converge vers  $F$  et que  $G$  soit une fonction  $\tau$  continue dans  $X$ . Alors  $(F^\varepsilon + G)_\varepsilon$   $\tau$ -épi-converge vers  $F + G$ .

L'intérêt d'utiliser ce cadre variationnel est de fournir simultanément le problème limite (qui est un problème de minimisation) et la convergence de « l'énergie totale ».

## 2. CONVERGENCE DES SOLUTIONS ET CORRECTEUR

Soient  $F^\varepsilon, F$  les fonctionnelles définies dans  $(H^1(\Omega))^3$  par :

$$(2.1) \quad F^\varepsilon(\bar{u}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx + \delta_{V_\varepsilon(\Omega)}(\bar{u}),$$

$$(2.2) \quad F(\bar{u}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx + c \int_{\Sigma} C_{ij} u_i u_j d\Sigma + \delta_{V(\Omega)}(\bar{u})$$

si  $c \geq 0$ ,

$$(2.3) \quad F(\bar{u}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx + \delta_{V_0(\Omega)}(\bar{u}) \quad \text{si } c = +\infty.$$

Comme la suite  $(\bar{u}^\varepsilon)_\varepsilon$  est bornée dans  $(H^1(\Omega))^3$ , où  $\bar{u}^\varepsilon$  est la solution du problème (1.2), nous sommes amenés à étudier la  $\tau$ -épi-convergence de  $(F^\varepsilon)_\varepsilon$  quand  $\tau$  désigne la topologie faible de  $(H^1(\Omega))^3$  (cf. Proposition 1.3). La construction des fonctions tests introduites dans la Définition 1.2 utilise la solution  $\bar{W}^k$  du problème local (1.7) à partir de laquelle nous définissons la fonction  $\bar{W}^{k,\varepsilon}$  :

$$(2.4) \quad \bar{W}^{k,\varepsilon}(x) = \bar{e}^k - \bar{W}^k(x/r_\varepsilon) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{3+}.$$

Nous avons les estimations suivantes :

LEMME 2.1 : *Il existe une constante  $K$  telle que  $\forall y \in \mathbb{R}^{3+}$  :*

$$\begin{aligned} |W_j^k(y)| &\leq K \left( \frac{1}{d(y, T)} + \frac{1}{d(y, T)^2} \right), \\ |D_i W_j^k(y)| &\leq K \left( \frac{1}{d(y, T)^2} + \frac{1}{d(y, T)^3} \right), \end{aligned}$$

et  $\forall x \in \mathbb{R}^{3+}$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$  :

$$\begin{aligned} |e_j^k - W_j^{k,\varepsilon}(x)| &\leq K \left( \frac{r_\varepsilon}{d(x, T_\varepsilon)} + \frac{r_\varepsilon^2}{d(x, T_\varepsilon)^2} \right), \\ |D_i W_j^{k,\varepsilon}(x)| &\leq K \left( \frac{r_\varepsilon}{d(x, T_\varepsilon)^2} + \frac{r_\varepsilon^2}{d(x, T_\varepsilon)^3} \right). \end{aligned}$$

*Démonstration* : Remarquons que si  $\bar{W}^k$  est la solution de (1.7), alors (cf. [9]) :

$$(2.5) \quad W_j^k = -\sigma_{i3}(\bar{W}^k)|_T * G_{ij},$$

où  $G_{ij}$  est le tenseur symétrique de Green pour le milieu homogène considéré,  $*$  désigne la convolution entre un élément de  $H^{-1/2}(T)$  et un élément de  $H^{1/2}(T)$ .

Dans [7], le tenseur de Green est donné explicitement pour un milieu homogène et isotrope (cas des coefficients de Lamé) :

$$\begin{aligned} G_{11} &= \alpha \left( \frac{2(1-\sigma)\rho+z}{\rho(\rho+z)} + x^2 \frac{2\rho(\sigma\rho+z)+z^2}{\rho^3(\rho+z)^2} \right) \quad (\rho = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}), \\ G_{12} &= \alpha \left( \frac{2\rho(\sigma\rho+z)+z^2}{\rho^3(\rho+z)^2} \right) xy, \quad G_{13} = \alpha \left( \frac{xz}{\rho^3} - \frac{x(1-2\sigma)}{\rho(\rho+z)} \right), \\ G_{22} &= \alpha \left( \frac{2(1-\sigma)\rho+z}{\rho(\rho+z)} + y^2 \frac{2\rho(\sigma\rho+z)+z^2}{\rho^3(\rho+z)^2} \right), \\ G_{23} &= \alpha \left( \frac{yz}{\rho^3} - \frac{y(1-2\sigma)}{\rho(\rho+z)} \right), \quad G_{33} = \alpha \left( \frac{z^2}{\rho^3} + \frac{2(1-\sigma)}{\rho} \right), \end{aligned}$$

avec  $\alpha = (1 + \sigma)/2 \pi E$ ,  $\sigma$  (resp.  $E$ ) désignant le coefficient de Poisson (resp. le module d'Young) du milieu considéré. On remarque immédiatement que  $\forall i, j, l = 1, 2, 3$  :

$$(2.6) \quad |G_{ij}(x, y, z)| \leq \frac{\text{Cte}}{\rho} \quad \text{et} \quad |D_l G_{ij}(x, y, z)| \leq \frac{\text{Cte}}{\rho^2},$$

où Cte est une constante ne dépendant que de  $\sigma$  et  $E$ .

Dans le cas plus général d'un milieu homogène mais anisotrope, ces estimations ponctuelles sur la fonction de Green et ses dérivées premières résultent d'une « analyse dimensionnelle » (cf. [7] ; page 42).

Les estimations indiquées sur la solution  $\bar{W}^k$  de (1.7) sont alors déduites des estimations sur la fonction de Green (2.6) via la formule (2.5) (cf. [9]).

Les estimations sur la fonction  $\bar{W}^{k, \varepsilon}$  sont déduites des estimations sur  $\bar{W}^k$  à l'aide du changement de variables :  $x = r_\varepsilon y$ . ■

Nous utilisons également un résultat dû à Marchenko et Hrouslav [10] page 134 :

LEMME 2.2 : Soit  $(z^\varepsilon)_\varepsilon$  une suite d'éléments de  $H^1(\Omega)$  convergeant vers  $z$  dans la topologie faible de cet espace. Alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon} |z^\varepsilon|^2 dx \right) = \frac{1}{2} \int_\Sigma |z|^2 d\Sigma,$$

où  $\Sigma_\varepsilon = \{x \in \Omega / d(x, \Sigma) < \varepsilon\}$ .

PROPOSITION 2.3 : Supposons  $c \geq 0$ . Pour tout  $\bar{v}$  de  $D = \left\{ \bar{u} \in (C^1(\bar{\Omega}))^3 / \bar{u}|_{\Gamma_2} = 0 \right\}$  et pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une suite de fonctions  $(\bar{v}_0^\varepsilon)_\varepsilon$ ,  $\bar{v}_0^\varepsilon$  appartenant à  $V_\varepsilon(\Omega)$ , vérifiant les propriétés suivantes :

1)  $\bar{v}_0^\varepsilon \rightarrow \bar{v}$  dans  $(H^1(\Omega))^3$ -faible.

$$2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}_0^\varepsilon) e_{ij}(\bar{v}_0^\varepsilon) dx = \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx + c \int_\Sigma C_{ij} v_i v_j d\Sigma,$$

où  $C$  est la matrice définie par la relation (1.6).

3) Il existe une constante  $K$  indépendante de  $\varepsilon$ , telle que pour tout  $\bar{U}$  appartenant à  $V(\Omega)$  et tout  $\bar{U}^\varepsilon$  appartenant à  $V_\varepsilon(\Omega)$  avec  $\bar{U}^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{U}$  dans  $(H^1(\Omega))^3$ -faible, on ait :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}_0^\varepsilon) e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) dx \geq \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{U}) dx - K \|\bar{U}\|_{(L^2(\Sigma))^3} \|\bar{v}\|_{(L^2(\Sigma))^3}.$$

*Démonstration* : Soit  $\varphi$  appartenant à  $C^\infty([0, 1])$ ,  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi$  à support dans  $[0, 1/2]$ ,  $\varphi$  identiquement égale à 1 dans  $[0, 1/4]$ .

Notons  $\varphi_{\varepsilon r}(x) = \varphi\left(\frac{|x - x_{\varepsilon r}| + r_\varepsilon}{\varepsilon/2}\right)$ , où  $x_{\varepsilon r}$  est le centre de la  $r$ -ième maille  $Y_{\varepsilon r}$  du réseau recouvrant  $\Sigma$ ,  $Y_{\varepsilon r} = x_{\varepsilon r} + \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]^2$ .  $\varphi_{\varepsilon r}$  est une fonction régulière à support dans  $B_3\left(x_{\varepsilon r}, \frac{\varepsilon}{4} - r_\varepsilon\right)$  et identiquement égale à 1 dans  $B_3\left(x_{\varepsilon r}, \frac{\varepsilon}{8} - r_\varepsilon\right)$ . Enfin, soit  $\varphi_\varepsilon$  la fonction définie sur  $\Sigma$  par juxtaposition des  $\varphi_{\varepsilon r}$ .

Notons  $B_3(R)^+ = B_3(R) \cap \mathbb{R}^{3+}$ ,  $\forall R > 0$ ,

$$B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon)^+ = B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon) \cap \mathbb{R}^{3+}$$

et posons pour toute fonction régulière  $\bar{v}$  dans  $D$  :

$$(2.7) \quad \bar{v}_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} \bar{v}(x) - (\bar{\varepsilon}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}(x - x_{\varepsilon r})) \varphi_{\varepsilon r}(x) v_k(x) & \text{dans } B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon)^+, \\ \bar{v}(x) & \text{dans } \Omega - \bigcup_r B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon)^+. \end{cases}$$

Trivialement,  $\bar{v}_0^\varepsilon$  appartient à  $V_\varepsilon(\Omega)$ . De plus, en effectuant le changement de variable  $y = x/r_\varepsilon$ , on obtient :

$$\int_{\bigcup_r B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{W}^{k, \varepsilon}) e_{ij}(\bar{W}^{k, \varepsilon}) dx \leq K \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^2} \int_{B_3(\varepsilon/r_\varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{W}^k) e_{ij}(\bar{W}^k) dy$$

et en utilisant les estimations du Lemme 2.1, on obtient la convergence faible de la suite  $(\bar{v}_0^\varepsilon)_\varepsilon$  vers  $\bar{v}$ .

On établit alors :

$$\begin{aligned} F^\varepsilon(\bar{v}_0^\varepsilon) &= \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}_0^\varepsilon) e_{ij}(\bar{v}_0^\varepsilon) dx = \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx + \\ &\quad + \int_\Omega \sigma_{ij}((\bar{\varepsilon}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}) \varphi_\varepsilon v_k) e_{ij}((\bar{\varepsilon}^l - \bar{W}^{l, \varepsilon}) \varphi_\varepsilon v_l) dx + o_\varepsilon \\ &= \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx + \\ &\quad + \int_\Omega \sigma_{ij}((\bar{\varepsilon}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}) \varphi_\varepsilon) e_{ij}((\bar{\varepsilon}^l - \bar{W}^{l, \varepsilon}) \varphi_\varepsilon) v_k v_l dx + o_\varepsilon \end{aligned}$$

avec  $o_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ .

Utilisant la régularité de  $\bar{v}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 F^\varepsilon(\bar{v}_0^\varepsilon) &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx + \sum_r [v_k(x_{\varepsilon r}) v_l(x_{\varepsilon r}) \times \\
 &\quad \times \int_{B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon)^+} \sigma_{ij}((\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}) \varphi_{\varepsilon r}) e_{ij}((\bar{e}^l - \bar{W}^{l, \varepsilon}) \varphi_{\varepsilon r}) dx] + o_\varepsilon \\
 &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx + \sum_r \int_{Y_{\varepsilon r}} v_k v_l dx \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{B_3(\varepsilon)^+} \sigma_{ij}((\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}) \varphi_\varepsilon) \times \right. \\
 &\quad \left. \times e_{ij}((\bar{e}^l - \bar{W}^{l, \varepsilon}) \varphi_\varepsilon) dx \right] + o_\varepsilon .
 \end{aligned}$$

A l'aide des estimations du Lemme 2.2 et de la définition de la fonction  $\varphi_\varepsilon$ , il vient :

$$\begin{aligned}
 F^\varepsilon(\bar{v}_0^\varepsilon) &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx + \\
 &\quad + \sum_r \int_{Y_{\varepsilon r}} v_k v_l dx \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{B_3(\varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{W}^{k, \varepsilon}) e_{ij}(\bar{W}^{l, \varepsilon}) \varphi_\varepsilon^2 dx \right) + o_\varepsilon ,
 \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\bar{v}_0^\varepsilon) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx + c \int_{\Sigma} C_{kl} v_k v_l d\Sigma ,$$

où  $C$  est la matrice définie en (1.6). La deuxième assertion de la proposition est donc démontrée.

La démonstration de la troisième assertion de cette proposition utilise à nouveau les estimations du Lemme 2.1. Soit  $(\bar{U}^\varepsilon)_\varepsilon$  une suite convergeant vers  $\bar{U}$  dans la topologie faible de  $(H^1(\Omega))^3$ , avec  $\bar{U}^\varepsilon$  appartenant à  $V_\varepsilon(\Omega)$  :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}_0^\varepsilon) e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) dx &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) dx + \\
 &\quad + \sum_r \int_{B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon)^+} \sigma_{ij}((\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}) \varphi_{\varepsilon r} v_k) e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) dx + o_\varepsilon \\
 &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{U}) dx + A_\varepsilon + o_\varepsilon
 \end{aligned}$$

avec

$$A_\varepsilon = \sum_r \int_{B_3(x_{er}, \varepsilon)^+} \sigma_{ij}((\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}) \varphi_{\varepsilon r} v_k) e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) dx .$$

Compte tenu de la convergence :

$$(\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}) \varphi_\varepsilon v_k \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{dans } (H^1(\Omega))^3\text{-faible ,}$$

établie précédemment, ce terme  $A_\varepsilon$  peut s'écrire :

$$A_\varepsilon = \sum_r \int_{B_3(x_{er}, \varepsilon)^+} \sigma_{ij}((\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}) \varphi_{\varepsilon r}) e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) v_k dx + o_\varepsilon ,$$

et en développant :

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \sum_r \int_{B_3(x_{er}, \varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{W}^{k, \varepsilon}) e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) \varphi_{\varepsilon r} v_k dx + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_r \int_{B_3(x_{er}, \varepsilon)^+} a_{ijkl} (D_l \varphi_{\varepsilon r} (\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon})_h + D_h \varphi_{\varepsilon r} (\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon})_l) \\ &\times e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) v_k dx + o_\varepsilon . \end{aligned}$$

Grâce aux estimations du Lemme 2.1, on obtient :

$$A_\varepsilon = \sum_r \int_{B_3(x_{er}, \varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{W}^{k, \varepsilon}) e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) \varphi_{\varepsilon r} v_k dx + o_\varepsilon ,$$

puis en intégrant par parties, en utilisant la définition de  $\bar{W}^{k, \varepsilon}$  et le fait que  $\varphi_{\varepsilon r}$  soit identiquement nulle sur  $\partial B_3(x_{er}, \varepsilon)$ , on obtient :

$$A_\varepsilon = \sum_r \int_{B_3(x_{er}, \varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{W}^{k, \varepsilon}) U_j^\varepsilon D_i \varphi_{\varepsilon r} v_k dx + o_\varepsilon .$$

Les estimations du Lemme 2.1 donnent :

$$|A_\varepsilon| \leq K \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon} |\bar{U}^\varepsilon| |\bar{v}| dx + o_\varepsilon .$$

On utilise alors le résultat du Lemme 2.2 :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} |A_\varepsilon| \leq K \|\bar{U}\|_{(L^2(\Sigma))^3} \|\bar{v}\|_{(L^2(\Sigma))^3}$$

et la proposition est démontrée. ■

*Remarque 2.4*

Une première idée, pour construire la suite  $(\bar{v}_\varepsilon)_\varepsilon$  apparaissant dans la Proposition 2.3, consisterait à utiliser la solution  $\bar{w}_\varepsilon^k$  du problème :

$$(2.8) \quad \begin{aligned} & \text{Min} \\ & \varpi \in (H^1(B_3(\varepsilon)^+))^3 \\ & \varpi = z^k \text{ sur } \partial B_3(\varepsilon)^+ \\ & \varpi = 0 \text{ sur } T_\varepsilon \end{aligned} \int_{B_3(\varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{w}) e_{ij}(\bar{w}) dx ,$$

où  $\partial B_3(\varepsilon)^+ = \partial B_3(\varepsilon) \cap \{x_3 > 0\}$ .

Il semble toutefois très difficile de calculer  $\bar{w}_\varepsilon^k$ , même dans le cas particulier important des coefficients de Lamé avec  $T = B_2(1)$ . Il semble également difficile d'obtenir des estimations sur cette solution  $\bar{w}_\varepsilon^k$ , analogues à celles établies par Marchenko et Hrouslov, pour les solutions des systèmes elliptiques (cf. [10], Lemme 2.2). Notons toutefois la proposition suivante. ■

PROPOSITION 2.5 : Soit  $\bar{w}_\varepsilon^k$  la solution du problème (2.8) et  $c > 0$ . Le coefficient  $C_{kl}$  donné par la relation (1.6) est égal à :

$$C_{kl} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{B_3(\varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{w}_\varepsilon^k) e_{ij}(\bar{w}_\varepsilon^l) dx \right) / c .$$

*Démonstration :* Pour tout  $R > 2$ ,  $k = 1, 2, 3$ , soit  $\bar{W}^{k,R}$  la solution du problème :

$$\begin{aligned} & \text{Min} \\ & \varpi \in (H^1(B_3(R)^+))^3 \\ & \varpi = z^k \text{ sur } \partial B_3(R)^+ \\ & \varpi = 0 \text{ sur } T \end{aligned} \int_{B_3(R)^+} \sigma_{ij}(\bar{w}) e_{ij}(\bar{w}) dy ,$$

où  $\partial B_3(R)^+ = \partial B_3(R) \cap \mathbb{R}^{3+}$ . Notons :

$$C_{kl}^R = \int_{B_3(R)^+} \sigma_{ij}(\bar{W}^{k,R}) e_{ij}(\bar{W}^{l,R}) dy , \quad k, l = 1, 2, 3 .$$

Compte tenu du fait que  $\bar{W}^k$  est la solution d'un problème de minimisation (cf. [9]) on obtient les inégalités :

$$C_{kk} \leq C_{kk}^{R'} \leq C_{kk}^R \leq C_{kk}^2 \quad \forall R, R' : 2 < R < R' , \quad k = 1, 2, 3 ,$$

ce qui démontre la convergence de  $(\bar{W}^{k,R})_R$  vers  $\bar{W}^k$ ,  $R \rightarrow +\infty$ , dans la norme  $\sum_{i,j=1}^3 \|e_{ij}(\bar{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^{3+})}$ .

Effectuant le changement de variables  $x = r_\varepsilon y$  dans l'intégrale de l'énoncé de la proposition, il vient :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{B_3(\varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{w}_\varepsilon^k) e_{ij}(\bar{w}_\varepsilon^l) dx = \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^2} C_{kl}^{r_\varepsilon/\varepsilon},$$

d'où le résultat de la proposition. ■

Notre résultat principal est énoncé dans le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.6 :** *La suite des fonctionnelles  $(F^\varepsilon)_\varepsilon$  définies en (2.1)  $\tau$ -épi-converge vers la fonctionnelle  $F$ , où  $F$  est définie par la relation (2.2) si  $c \geq 0$ , et par (2.3) si  $c = +\infty$  ;  $\tau$  est la topologie faible de  $(H^1(\Omega))^3$ .*

*Démonstration :* La démonstration du théorème repose sur la vérification des deux assertions de la Définition 1.2. On considère les deux cas  $c \geq 0$  et  $c = +\infty$  :

*Premier cas :*  $c \geq 0$ . Supposons que  $\bar{v}$  appartient à  $D$ ,  $D = \{\bar{u} \in (C^1(\bar{\Omega}))^3 / \bar{u}|_{\Gamma_2} = 0\}$ . L'assertion 2) de la Proposition 2.3 affirme l'existence d'une suite  $(\bar{v}_0^\varepsilon)_\varepsilon$  ( $\bar{v}_0^\varepsilon \in V_\varepsilon(\Omega)$ ) convergent vers  $\bar{v}$  dans la topologie faible de  $(H^1(\Omega))^3$ , telle que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\bar{v}_0^\varepsilon) = F(\bar{v}).$$

Supposons que  $\bar{v}$  appartient à  $V(\Omega)$ . Il existe alors une suite  $(\bar{v}^n)_n$  d'éléments de  $D$  convergent vers  $\bar{v}$  dans la topologie forte de  $(H^1(\Omega))^3$ . Pour chaque  $n$ , l'assertion 2) de la Proposition 2.3 affirme l'existence d'une suite  $((\bar{v}^n)_0^\varepsilon)_\varepsilon$  convergent vers  $\bar{v}^n$ , dans la topologie faible de  $(H^1(\Omega))^3$  et telle que :

$$(2.9) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon((\bar{v}^n)_0^\varepsilon) = F(\bar{v}^n).$$

Par suite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon((\bar{v}^n)_0^\varepsilon) = F(\bar{v}),$$

puisque  $F$  est continue dans la topologie forte de  $(H^1(\Omega))^3$ .

L'argument de diagonalisation du Corollaire 1.16 de [1] prouve l'existence d'une sous-suite  $((\bar{v}^{n(\varepsilon)})_0^\varepsilon)_\varepsilon$ , avec  $(\bar{v}^{n(\varepsilon)})_0^\varepsilon$  appartenant à  $V_\varepsilon(\Omega)$ ,  $((\bar{v}^{n(\varepsilon)})_0^\varepsilon)_\varepsilon$  convergent vers  $\bar{v}$  dans  $(H^1(\Omega))^3$ -faible, et telle que :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon((\bar{v}^{n(\varepsilon)})_0^\varepsilon) \leq F(\bar{v}).$$

La première assertion de la Définition 1.2 est donc démontrée avec  $\bar{v}_0^\varepsilon = (\bar{v}^{n(\varepsilon)})_0^\varepsilon$ . Vérifions la seconde assertion :

Soit  $\bar{v}$  un élément de l'espace  $V(\Omega)$  et soit  $\bar{v}^\varepsilon$  appartenant à  $V_\varepsilon(\Omega)$  telle que  $(\bar{v}^\varepsilon)_\varepsilon$  converge vers  $\bar{v}$ , dans  $(H^1(\Omega))^3$ -faible. Soit  $(\bar{v}^n)_n$  une suite d'éléments de  $D$  convergeant vers  $\bar{v}$  dans la topologie forte de  $(H^1(\Omega))^3$ . Écrivons :

$$(2.10) \quad F^\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon) \geq F^\varepsilon((\bar{v}^n)_0^\varepsilon) + \langle \partial F^\varepsilon((\bar{v}^n)_0^\varepsilon), \bar{v}^\varepsilon - (\bar{v}^n)_0^\varepsilon \rangle,$$

où  $(\bar{v}^n)_0^\varepsilon$  est la fonction de  $V_\varepsilon(\Omega)$ , associée à  $\bar{v}^n$  par la Proposition 2.3 et

$$\langle \partial F^\varepsilon((\bar{v}^n)_0^\varepsilon), \bar{v}^\varepsilon - (\bar{v}^n)_0^\varepsilon \rangle = \int_\Omega \sigma_{ij}((\bar{v}^n)_0^\varepsilon) e_{ij}(\bar{v}^\varepsilon - (\bar{v}^n)_0^\varepsilon) dx.$$

L'assertion 3) de la Proposition 2.3 implique :

$$(2.11) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \partial F^\varepsilon((\bar{v}^n)_0^\varepsilon), \bar{v}^\varepsilon - (\bar{v}^n)_0^\varepsilon \rangle \geq \\ \geq \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}^n) e_{ij}(\bar{v} - \bar{v}^n) dx - K \|\bar{v}^n\|_{(L^2(\Sigma))^3} \|\bar{v} - \bar{v}^n\|_{(L^2(\Sigma))^3}.$$

On obtient donc, grâce à (2.9), (2.10) et (2.11) :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon) \geq F(\bar{v}^n) + \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}^n) e_{ij}(\bar{v} - \bar{v}^n) dx - \\ - K \|\bar{v}^n\|_{(L^2(\Sigma))^3} \|\bar{v} - \bar{v}^n\|_{(L^2(\Sigma))^3}.$$

Il suffit de faire tendre  $n$  vers  $+\infty$ . Les propriétés de  $(\bar{v}^n)_n$  entraînent :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon) \geq F(\bar{v})$$

et la seconde assertion de la définition de l'épi-convergence est vérifiée.

*Deuxième cas :*  $c = +\infty$ . Pour toute fonction  $\bar{v}$  de  $V(\Omega)$  et pour tout  $K > 0$  on a :

$$(2.12) \quad F^\varepsilon(\bar{v}) \geq F_K^\varepsilon(\bar{v}),$$

où  $F_K^\varepsilon$  est la fonctionnelle définie par (2.1), pour  $r_\varepsilon = K\varepsilon^2$ .

Soit  $\bar{v}^\varepsilon$  appartenant à  $V_\varepsilon(\Omega)$ , avec  $(\bar{v}^\varepsilon)_\varepsilon$  convergeant vers  $\bar{v}$  dans  $(H^1(\Omega))^3$ -faible. De l'inégalité (2.12) on déduit :

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon) &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_K^\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon) \geq \\ &\geq \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx + K \int_{\Sigma} C_{ij} v_i v_j d\Sigma. \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que la matrice  $C$  est définie positive on obtient que pour toute fonction  $\bar{v}$  de  $V(\Omega)$  non nulle (presque partout) sur  $\Sigma$  :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon) = +\infty.$$

En revanche si  $\bar{v}|_\Sigma$  est nulle, on établit immédiatement :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx,$$

donc l'assertion 2) de la Définition 1.2 est démontrée ; l'assertion 1) se vérifie en prenant pour toute  $\bar{v}$  de  $V(\Omega)$ ,  $\bar{v}_0^\varepsilon$  identiquement égale à  $\bar{v}$ . ■

### Remarque 2.7

Comme conséquence du Théorème 2.6 et des résultats d'épi-convergence énoncés dans la Proposition 1.3, on obtient le résultat du Théorème 1.1.

De plus on a : si  $c = 0$  (resp.  $c = +\infty$ ) la suite  $(\bar{u}^\varepsilon)_\varepsilon$  converge vers  $\bar{u}^0$  (resp.  $\bar{u}^{0*}$ ) dans la topologie forte de  $(H^1(\Omega))^3$ , où  $\bar{u}^\varepsilon$ ,  $\bar{u}^0$ ,  $\bar{u}^{0*}$  sont les solutions des problèmes (1.2), (1.8) et (1.9) respectivement. Dans le cas  $c > 0$  nous donnons maintenant un correcteur du premier ordre. ■

**THÉORÈME 2.8 :** *Soit  $c > 0$  et  $\varphi_\varepsilon$  la fonction obtenue par juxtaposition des fonctions  $\varphi_{\varepsilon r}$  définies en (2.7) :*

1) Si  $\bar{u}^0$  appartient à  $(C^1(\bar{\Omega}))^3$ , la suite  $(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^0 + (\bar{\varepsilon}^k - \bar{W}^{k,\varepsilon}) \varphi_\varepsilon u_k^0)_\varepsilon$  converge vers 0 dans la topologie forte de  $(H^1(\Omega))^3$ .

2) Dans le cas général, la suite  $(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^0 + (\bar{\varepsilon}^k - \bar{W}^{k,\varepsilon}) \varphi_\varepsilon u_k^0)_\varepsilon$  converge vers 0 dans la topologie forte de  $(W^{1,1}(\Omega))^3$ .

### Démonstration :

1) Avec la notation (2.7) la fonction  $\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^0 + (\bar{\varepsilon}^k - \bar{W}^{k,\varepsilon}) \varphi_\varepsilon u_k^0$  s'écrit  $\bar{u}^\varepsilon - (\bar{u}^0)_\varepsilon^\varepsilon$ . Sous les hypothèses faites ici, la suite  $(\bar{u}^\varepsilon - (\bar{u}^0)_\varepsilon^\varepsilon)_\varepsilon$  converge vers 0 dans  $(H^1(\Omega))^3$ -faible. De plus, la Proposition 2.3 implique :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \sigma_{ij}((\bar{u}^0)_\varepsilon^\varepsilon) e_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - (\bar{u}^0)_\varepsilon^\varepsilon) dx \geq 0.$$

Comme par ailleurs, en utilisant la formulation variationnelle du problème (1.1) :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon) e_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - (\bar{u}^0)_0^\varepsilon) dx = 0,$$

on conclut à l'aide de l'inégalité de Korn dans  $\Omega$ .

2) On utilise un argument déjà employé dans [3] et [13] : soit  $(\bar{u}^n)_n$  une suite de fonctions de  $(C^1(\bar{\Omega}))^3$  convergeant vers  $\bar{u}^0$ , dans la topologie forte de  $(H^1(\Omega))^3$ . Écrivons :

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^\varepsilon - (\bar{u}^0)_0^\varepsilon\|_{(W^{1,1}(\Omega))^3} &\leq \|\bar{u}^\varepsilon - (\bar{u}^n)_0^\varepsilon\|_{(W^{1,1}(\Omega))^3} + \\ &+ \|\bar{u}^n - \bar{u}^0\|_{(W^{1,1}(\Omega))^3} + \|(\bar{\varepsilon}^k - \bar{W}^{k,\varepsilon}) \varphi_\varepsilon(\bar{u} - \bar{u}^n)_k\|_{(W^{1,1}(\Omega))^3}. \end{aligned}$$

Grâce à la Proposition 2.3, on établit immédiatement :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\bar{u}^\varepsilon - (\bar{u}^0)_0^\varepsilon\|_{(W^{1,1}(\Omega))^3} \leq o(n),$$

avec  $o(n) \longrightarrow 0$ . Grâce aux estimations ponctuelles du Lemme 2.1, on

$n \rightarrow +\infty$

prouve la convergence suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|(\bar{\varepsilon}^k - \bar{W}^{k,\varepsilon}) \varphi_\varepsilon(\bar{u}^0 - \bar{u}^n)_k\|_{(W^{1,1}(\Omega))^3} = o(n). \quad \blacksquare$$

### 3. LE CAS PARTICULIER $r_\varepsilon = \alpha\varepsilon$ ( $0 < \alpha < 1/2$ )

Dans cette situation particulière, la suite  $(\bar{u}^\varepsilon)_\varepsilon$  converge vers  $\bar{u}^{0*}$ , dans la topologie forte de  $(H^1(\Omega))^3$  (cf. Remarque 2.7). La suite  $(\bar{u}^\varepsilon|_\Sigma)_\varepsilon$  converge donc vers 0, dans la topologie forte de  $(L^2(\Sigma))^3$ . L'objet de ce paragraphe est de préciser la vitesse de convergence de cette suite vers 0. Les résultats de ce paragraphe sont analogues à ceux de [13] concernant le problème scalaire, c'est-à-dire le problème de minimisation :

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \bigcup_r T_{er}}} & \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} fu dx \right). \end{aligned}$$

Nous supposons que  $\Gamma_1$  est vide, ce qui signifie que le corps élastique est entièrement fixé sur la partie  $\Gamma$  de la frontière de  $\Omega$  non contenue dans le plan  $\{x_3 = 0\}$ . Nous supposons aussi que  $\Omega$  est très régulier de sorte que  $\bar{u}^{0*}$  appartient à  $(H^2(\Omega))^3$  et  $\sigma_{i3}(\bar{u}^{0*})$  appartient à  $L^2(\Sigma)$ , pour  $i = 1, 2, 3$  (cf. [2], [11]).

Les estimations suivantes précisent la « vitesse de convergence » de  $(\bar{u}^\varepsilon|_\Sigma)_\varepsilon$  vers 0.

PROPOSITION 3.1 : 1) La suite  $\left(\frac{1}{\varepsilon} \bar{u}^\varepsilon|_\Sigma\right)_\varepsilon$  est bornée dans  $(L^2(\Sigma))^3$ .

2) La suite  $\left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} (\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})\right)_\varepsilon$  converge vers 0, dans la topologie faible de  $(H^1(\Omega))^3$ .

*Démonstration :* En utilisant l'existence d'une constante  $K$  indépendante de  $\varepsilon$ , telle que pour toute  $v$  de  $H^1(\Omega)$ ,  $v = 0$  sur  $\bigcup_r T_{\varepsilon r}$  :

$$(3.1) \quad \int_{\Sigma_\varepsilon} u^2 dx \leq K\varepsilon^2 \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx,$$

$$\int_{\Sigma} u^2 d\Sigma \leq K\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx.$$

(cf. [13], Lemme 3.4), on obtient, compte tenu de l'inégalité de Korn :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\bar{u}^\varepsilon|^2 d\Sigma &\leq K\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})|^2 dx \\ &\leq K\varepsilon \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) e_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) dx \\ &\leq K\varepsilon \int_{\Sigma} |\sigma_{i3}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})| |(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})_i| d\Sigma. \end{aligned}$$

Par suite, grâce aux propriétés de régularité de  $\bar{u}^{0*}$  :

$$\int_{\Sigma} |\bar{u}^\varepsilon|^2 d\Sigma \leq K\varepsilon \|\sigma_{i3}(\bar{u}^{0*})\|_{L^2(\Sigma)} \|(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})_i\|_{L^2(\Sigma)}$$

et l'assertion 1) de la proposition est alors démontrée. Remarquons que :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) e_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) dx = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma} \sigma_{i3}(\bar{u}^{0*}) (\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})_i d\Sigma,$$

on établit que la suite  $\left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} (\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})\right)_\varepsilon$  reste bornée dans  $(H^1(\Omega))^3$ .

Comme  $\left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} (\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})|_\Sigma\right)_\varepsilon$  converge vers 0, dans la topologie forte de  $(L^2(\Sigma))^3$ , on obtient la convergence de  $\left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} (\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})\right)_\varepsilon$  vers 0, dans la

topologie faible de  $(H^1(\Omega))^3$ , donc l'assertion 2) de la proposition est démontrée. ■

Pour achever l'étude de cette situation particulière, il nous reste à déterminer la limite de la suite  $\left(\frac{1}{\varepsilon} \bar{u}^\varepsilon \Big|_\Sigma\right)_\varepsilon$  pour la topologie faible de  $(L^2(\Sigma))^3$ . Nous sommes naturellement amenés à introduire la fonction  $\bar{Z}^k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , solution du problème local :

$$(3.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij,y}(\bar{Z}^k) = 0 \text{ dans } G = Y \times (0, +\infty), \quad i = 1, 2, 3, \\ \bar{Z}_i^k = 0 \text{ sur } \alpha T, \\ \sigma_{i3,y}(\bar{Z}^k) = \delta_{ik} \text{ sur } Y - \overline{\alpha T}, \\ \bar{Z}^k \text{ Y-périodique,} \end{cases}$$

où  $Y$  est le carré unité de  $\mathbb{R}^2$  :  $Y = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , et  $Y$ -périodique veut dire périodique par rapport aux deux premières variables.

Le problème (3.2) a pour formulation variationnelle : trouver une fonction  $\bar{Z}^k$  dans  $V(G)$  telle que :

$$(3.3) \quad \int_G \sigma_{ij}(\bar{Z}^k) e_{ij}(\bar{Z}) dy = \int_Y Z_k dy_1 dy_2 \quad \forall \bar{Z} \in V(G),$$

où  $V(G)$  est l'espace :

$$\left\{ \bar{Z} / \bar{Z} \in (H^1(G \cap \{y_3 < R\}))^3, \forall R > 0, \bar{Z}|_T = 0, \bar{Z} \text{ Y-périodique} \right. \\ \left. \text{et } \|e_{ij}(\bar{Z})\|_{L^2(G)} < \infty, i, j = 1, 2, 3 \right\}.$$

$V(G)$  est un espace de Hilbert pour la norme  $\left(\int_G \sigma_{ij}(\bar{Z}) e_{ij}(\bar{Z}) dy\right)^{1/2}$ .

L'existence d'une solution unique  $\bar{Z}^k$  du problème (3.3) résulte de l'inégalité de Korn dans  $G \cap \{y_3 < R\}$  et du théorème de Lax-Milgram. La principale propriété de cette fonction est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2 : *Il existe une fonction  $\bar{Z}_0^k$  appartenant à  $(L^2(G))^3$  et un vecteur constant  $\bar{A}^k$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que pour tout  $y$  de  $\mathbb{R}^3$  :*

$$\bar{Z}^k(y) = \bar{Z}_0^k(y) + \bar{A}^k.$$

*Démonstration :* En effectuant des calculs analogues à ceux de [12] Théorème 1, ou [6] Théorème 3, on obtient le résultat de la proposition. ■

On définit la fonction  $\bar{Z}^{k, \varepsilon}$  sur  $G_\varepsilon = Y_\varepsilon \times (0, +\infty)$ ,  $Y_\varepsilon = \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \times \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ , par :

$$(3.4) \quad \bar{Z}^{k, \varepsilon}(x) = \bar{Z}^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \forall x \in G_\varepsilon.$$

Cette fonction  $\bar{Z}^{k, \varepsilon}$  étant  $Y_\varepsilon$ -périodique peut être prolongée en une fonction définie sur  $\mathbb{R}^{3+}$ , encore notée  $\bar{Z}^{k, \varepsilon}$ . La restriction à  $\Omega$  de cette fonction  $\bar{Z}^{k, \varepsilon}$  appartient à  $(H^1(\Omega))^3$  et satisfait les propriétés suivantes :

LEMME 3.3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}) &= 0 \text{ dans } G_\varepsilon, \quad i = 1, 2, 3, \\ Z_i^{k, \varepsilon} &= 0 \text{ sur } T_\varepsilon, \\ \sigma_{i3}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}) &= \frac{1}{\varepsilon} \delta_{ik} \text{ sur } Y_\varepsilon - \bar{T}_\varepsilon. \end{aligned}$$

De plus, la suite  $(\bar{Z}^{k, \varepsilon})_\varepsilon$  est bornée dans  $(L^2(\Omega))^3$  et la suite  $(\varepsilon^{1/2} e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}))_\varepsilon$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

*Démonstration* : Les trois premières propriétés sont des conséquences de la définition (3.4) et du fait que  $\bar{Z}^k$  est solution faible du problème (3.2). Les deux dernières se démontrent facilement à l'aide de la Proposition 3.2 et des calculs simples analogues à ceux effectués dans [13]. ■

Le résultat concernant la limite de la suite  $\left(\frac{1}{\varepsilon} \bar{u}^\varepsilon \mid_\Sigma\right)_\varepsilon$  est énoncé dans la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4 : La suite  $\left(\frac{1}{\varepsilon} \bar{u}^\varepsilon \mid_\Sigma\right)_\varepsilon$  converge, dans la topologie faible de  $(L^2(\Sigma))^3$  vers

$$-\sigma_{i3}(\bar{u}^{0*}) \left( \int_Y Z_i^k(y_1, y_2, 0) dy_1 dy_2 \right) \bar{e}^k.$$

*Démonstration* : Nous utilisons un argument déjà employé dans [13] et [15]. Soit  $\bar{\Phi}$  une fonction de  $(C_0^\infty(\bar{\Omega}))^3$ , nulle sur  $\Gamma$ . Alors :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon} \Phi_k) dx &= \\ &= \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}) \Phi_k dx + \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) D_i \Phi_k Z_j^{k, \varepsilon} dx. \end{aligned}$$

De même

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\phi_k(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})) e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}) \phi_k dx + \int_{\Omega} a_{ijlh} D_l \phi_k(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})_h e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}) dx .$$

Ces deux égalités donnent donc :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon} \phi_k) dx = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\phi_k(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})) e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}) dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) D_i \phi_k Z_j^{k, \varepsilon} dx - \int_{\Omega} a_{ijlh} D_l \phi_k(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})_h e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}) dx .$$

En intégrant par parties, et compte tenu du Lemme 3.3 :

$$- \int_{\Sigma} \sigma_{i3}(\bar{u}^{0*}) \phi_k Z_i^{k, \varepsilon} d\Sigma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) D_i \phi_k Z_j^{k, \varepsilon} dx - \int_{\Omega} a_{ijlh} D_l \phi_k(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})_h e_{ij}(Z^{k, \varepsilon}) dx + \int_{\Sigma} \frac{1}{\varepsilon} \bar{u}^\varepsilon \cdot \bar{\phi} d\Sigma .$$

Compte tenu des diverses estimations établies dans le Lemme 3.3 et la Proposition 3.1 et du Lemme 4.1 de [14] il est possible de passer à la limite dans l'égalité précédente :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \frac{1}{\varepsilon} \bar{u}^\varepsilon \cdot \bar{\phi} d\Sigma = - \int_{\Sigma} \sigma_{i3}(\bar{u}^{0*}) \phi_k \left( \int_Y Z_i^k(y_1, y_2, 0) dy_1 dy_2 \right) d\Sigma .$$

L'égalité précédente étant vraie pour toute fonction  $\bar{\phi}$  de  $(C_0^\infty(\bar{\Omega}))^3$ , nulle sur  $\Gamma$ , on obtient le résultat énoncé dans la proposition. ■

COROLLAIRE 3.5 :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) e_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) dx = \int_{\Sigma} \sigma_{i3}(\bar{u}^{0*}) \sigma_{k3}(\bar{u}^{0*}) d\Sigma \left( \int_Y Z_i^k(y_1, y_2, 0) dy_1 dy_2 \right) . \quad \blacksquare$$

*Démonstration* : Il suffit de remarquer que :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^e - \bar{u}^{0*}) e_{ij}(\bar{u}^e - \bar{u}^{0*}) dx = - \int_{\Sigma} \sigma_{i3}(\bar{u}^{0*}) u_i^e d\Sigma$$

et d'utiliser le résultat de convergence établi dans la Proposition 3.4 pour démontrer le corollaire. ■

#### 4. ANALYSE LIMITE DU PROBLÈME DE SIGNORINI

La situation géométrique est celle décrite dans le paragraphe 1. Au lieu d'imposer au corps élastique de rester fixé sur les zones  $T_{er}$ , nous imposons ici  $u_3 \geq 0$  sur  $\bigcup_r T_{er}$  ce qui traduit une tendance au décollement. Nous nous intéressons au comportement asymptotique de la solution  $\bar{u}^{se}$  du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\bar{u}^{se}) + f_i = 0 \text{ dans } \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \\ u_i^{se} = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \\ u_3^{se} \geq 0 \text{ sur } \bigcup_r T_{er}, \\ \sigma_{ij}(\bar{u}^{se}) n_j = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ \sigma_{i3}(\bar{u}^{se}) = 0 \text{ sur } \Sigma - \bigcup_r T_{er}. \end{array} \right.$$

La solution faible  $\bar{u}^{se}$  de ce problème, est solution du problème de minimisation :

$$\text{Min}_{\bar{u} \in (H^1(\Omega))^3} \left( F^{se}(\bar{u}) - \int_{\Omega} \bar{f} \cdot \bar{u} dx \right),$$

où  $F^{se}$  est la fonctionnelle définie sur  $(H^1(\Omega))^3$  par :

$$(4.1) \quad F^{se}(\bar{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx + \delta_{V_{3e}(\Omega)}(\bar{u}),$$

$V_{3e}(\Omega)$  étant la fermeture dans  $(H^1(\Omega))^3$  de

$$\left\{ \bar{u} \in (C^1(\bar{\Omega}))^3 / \bar{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \text{ et } u_3 \geq 0 \text{ sur } \bigcup_r T_{er} \right\}.$$

THÉORÈME 4.1 : La suite  $(F^{s\varepsilon})_\varepsilon$  définie en (4.1)  $\tau$ -épi-converge vers la fonctionnelle  $F^s$  définie sur  $(H^1(\Omega))^3$  par :

$$F^s(\bar{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx + \frac{1}{2} c \int_{\Sigma} C_{33}(u_3^-)^2 d\Sigma ,$$

où  $C_{33}$  est le coefficient donné par (1.6) avec  $k = l = 3$ , et  $u_3^-$  est la partie négative de  $u_3$  :  $u_3^-(x) = -\min(u_3(x), 0)$ .

Démonstration : Elle est tout à fait analogue à celle du Théorème 2.6 hormis la modification naturelle de la fonction test :

$$\bar{v}_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} \bar{v}(x) + (\bar{\varepsilon}^3 - \bar{W}^{3,\varepsilon}(x - x_{\varepsilon r})) \varphi_{\varepsilon r}(x) v_3^-(x) & \text{dans } B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon)^+ , \\ \bar{v}(x) & \text{dans } \Omega - \bigcup_r B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon)^+ . \end{cases} \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 4.2 : La suite  $(\bar{u}^{s\varepsilon})_\varepsilon$  converge dans  $(H^1(\Omega))^3$ -faible vers la solution faible du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\bar{u}^{s0}) + f_i = 0 & \text{dans } \Omega, \quad i = 1, 2, 3 , \\ u_i^{s0} = 0 & \text{sur } \Gamma_2 , \\ \sigma_{ij}(\bar{u}^{s0}) n_j = 0 & \text{sur } \Gamma_1 , \\ \sigma_{i3}(\bar{u}^{s0}) + c C_{33} u_3^{s0-} = 0 & \text{sur } \Sigma \text{ si } c \geq 0 , \\ u_3^{s0-} = 0 & \text{sur } \Sigma \text{ si } c = +\infty . \end{cases}$$

REFERENCES

[1] H. ATTOUCH, *Variational convergence for functions and operators*. Appli. Maths. Series. Pitman, London (1984).  
 [2] P. CIARLET, *Elasticité tridimensionnelle*. Masson, Paris (1986).  
 [3] D. CIORANESCU et F. MURAT, *College de France Seminar. Research Notes in Maths*. Vols. 60, 70. Pitman, London (1982).  
 [4] E. DE GIORGI, *Convergence problems for functionals and operators*. Proceedings Int. Congress « Recent Methods in Nonlinear Analysis ». De Giorgi, Mosco Eds. Pitagora Editrice, Bologna (1979).

- [5] G. DUVAUT et J. L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris (1972).
- [6] V. A. KONDRATIEV et O. A. OLEINIK, *On the behaviour at infinity of solutions of elliptic systems with a finite energy integral*. Arch. Rat. Mech. Anal. pp. 75-89 (1987).
- [7] L. LANDAU et E. LIFCHITZ, *Théorie de l'élasticité*. Editions Mir, Moscou (1967).
- [8] M. LOBO et E. PEREZ, *Comportement asymptotique d'un corps élastique dont une surface présente de petites zones de collage*. C.R.A.S. Série II, 304, n° 5, pp. 195-198 (1987).
- [9] M. LOBO et E. PEREZ, *Asymptotic behaviour of an elastic body with a surface having small sticked regions*. Math. Modelling and Num. Analysis, Vol. 22, n° 4, pp. 609-624 (1988).
- [10] V. A. MARCHENKO et E. J. HROUSLOV, *Problèmes aux limites dans des domaines avec frontières finement granuléés*. Naukova Dumka, Kiev (1974) (en russe).
- [11] J. NECAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris (1967).
- [12] O. A. OLEINIK et G. A. YOSIFIAN, *On the asymptotic behaviour at infinity of solutions in linear elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., 78, pp. 29-53 (1982).
- [13] C. PICARD, *Analyse limite d'équations variationnelles dans un domaine contenant une grille*, Math. Modelling and Num. Analysis, Vol. 21, n° 2, pp. 293-326 (1987).
- [14] E. SANCHEZ-PALENCIA, *Non-homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics, Vol. 127, Springer Verlag, Berlin (1980).
- [15] L. TARTAR, *Incompressible fluid flow in a porous medium. Convergence of the homogeneization process*. Appendice dans la référence [14].