

RAIRO

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

P. MONS

G. ROGÉ

L'élément Q_1 -bulle/ Q_1

RAIRO – Modélisation mathématique et analyse numérique,
tome 26, n° 4 (1992), p. 507-521.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1992__26_4_507_0

© AFCET, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO – Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ÉLÉMENT Q_1 -BULLE/ Q_1 (*)

P. MONS (1), G. ROGÉ (2)

Communiqué par C. BARDOS

Résumé. — Cette étude présente l'extension naturelle du mini-élément d'Arnold-Brezzi-Fortin à des éléments autres que des n -simplexes. L'extension a été effectuée pour les quadrilatères en deux dimensions et est aisément généralisable en trois dimensions. Des tests numériques sont présentés dans le cas bidimensionnel.

Abstract. The Q_1 /bubble- Q_1 element. — We present a natural extension to the well-known Arnold-Brezzi-Fortin's mini-element from n -simplexes to more general finite elements. We achieve this extension to quadrilaterals in two dimensions. The same discussion can be applied to a three-dimension case. We compare several elements in an academic like flow problem.

INTRODUCTION

La résolution numérique par éléments finis du problème de Stokes conduit au choix de deux espaces discrets différents pour la pression et la vitesse, devant vérifier la condition de compatibilité de Ladyzenskaya-Brezzi-Babuska.

Il est essentiel de pouvoir construire un maillage respectant les directions privilégiées de l'écoulement (zones de couches limites...), et donc d'utiliser des éléments finis adaptés aux zones structurées et non structurées du maillage.

En dimension 2, l'élément fini quadrangulaire Q_2/Q_1 de Taylor-Hood (cf. [T]), est du second ordre, conforme, et compatible avec l'élément fini triangulaire P_2/P_1 , mais conduit à la résolution de grands systèmes linéaires.

(*) Reçu en octobre 1990, révisé en mars 1991.

(1) Université Paris VII, 2, place Jussieu, 75005 Paris, et Dassault Aviation.

(2) Dassault Aviation, 78, quai Marcel Dassault, 92214 Saint-Cloud.

L'élément fini Q_1/P_0 ne permet pas de garder la continuité de la pression.

On se propose de construire un élément quadrangulaire compatible avec l'élément fini triangulaire P_1 -bulle/ P_1 d'Arnold-Brezzi-Fortin et préservant la conformité H^1 . Le nouvel élément baptisé « Q_1 -bulle/ Q_1 » conduit à la résolution de systèmes linéaires de même taille que ceux de l'élément instable Q_1/Q_1 , par élimination statique des degrés de liberté bulle.

L'extension de ce nouvel élément en dimension 3 permet l'utilisation simultanée d'éléments géométriques tétraédriques, prismatiques, hexaédriques ou pyramidaux, et facilite donc la génération du maillage.

Les tests numériques bidimensionnels permettent simplement de valider la méthodologie et retrouver les résultats obtenus après résolution par éléments P_1 -bulle/ P_1 . Des tests numériques en dimension 3, cas où le nouvel élément prend tout son intérêt, sont en cours.

1. DESCRIPTION DU PROBLÈME

Nous allons considérer l'approximation du problème de Stokes stationnaire pour un fluide visqueux incompressible.

Le problème à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.1)$$

La formulation variationnelle de ce problème s'écrit :

(u, p) est l'unique solution dans $(H_0^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ de :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx & \forall v \in (H_0^1(\Omega))^2, \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot u \, dx = 0 & \forall q \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}. \end{cases}$$

Pour alléger l'exposé, nous supposerons Ω ouvert polygonal borné de \mathbb{R}^2 .

La discrétisation à l'aide d'une approximation interne $V_{0h} \times Q_h$ de $(H_0^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ s'écrit :

(u_h, p_h) est l'unique solution dans $V_{0h} \times Q_h$ de :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u_h : \nabla v_h \, dx - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot v_h \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v_h \, dx & \forall v_h \in V_{0h}, \\ \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot u_h \, dx = 0 & \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \quad (1.2)$$

On munira $H_0^1(\Omega)$ de la norme $|u|_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$. Il est bien connu (cf. Brezzi [BR]) que (V_{0h}, Q_h) doit satisfaire la condition :

$$\exists \gamma > 0 \text{ indépendant de } h \text{ tel que } \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in V_{0h}} \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot v_h dx}{|v_h|_1 \|q_h\|_{0/\mathbb{R}}} \geq \gamma, \quad (1.3)$$

de manière à assurer l'unicité de la pression et obtenir une erreur d'ordre optimal.

2. CONSTRUCTION DU NOUVEL ÉLÉMENT

2.1. Méthode isoparamétrique

On construit une triangulation \mathfrak{T}_h de $\bar{\Omega}$ à l'aide de quadrilatères

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{l=1}^{N_e} K^l, \text{ où } N_e \text{ est le nombre d'éléments de la triangulation.}$$

Soit \hat{K} le carré de référence de sommets :

$$\hat{a}_1 = (0, 0), \quad \hat{a}_2 = (1, 0), \quad \hat{a}_3 = (1, 1), \quad \hat{a}_4 = (0, 1)$$

et K un quadrilatère quelconque de sommets $a_i, i = 1, \dots, 4$.

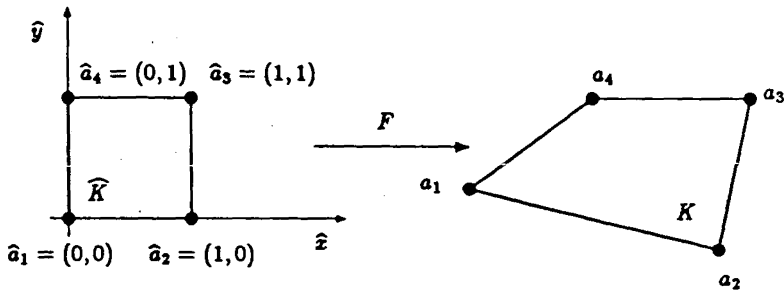


Figure 1. — Transformation.

On appelle S_i , pour $1 \leq i \leq 4$, le sous-triangle de K de sommets a_i, a_{i+1}, a_{i+2} , $i + 1$ et $i + 2$ calculés modulo 4. On pose

$$h = \max_{K \in \mathfrak{T}_h} h_K \text{ où } h_K \text{ est le diamètre de } K,$$

$$\rho_K = 2 \min_{1 \leq i \leq 4} \{ \text{diamètre du cercle inscrit dans } S_i \}$$

et

$$\sigma_K = \frac{h_K}{\rho_K}.$$

On sait qu'il existe une application $F = (F_1, F_2) \in (Q_1)^2$ de \hat{K} dans K telle que $F(\hat{a}_i) = a_i$, $i = 1, \dots, 4$.

Nous ferons pour chaque quadrilatère K de \mathfrak{C}_h les hypothèses géométriques (H) suivantes :

- K est convexe
- la famille de quadrangulations $(\mathfrak{C}_h)_h$ est régulière au sens suivant :

$$\exists \sigma > 0 \text{ indépendant de } h \text{ tel que } \sigma_K < \sigma \quad \forall K \in \mathfrak{C}_h.$$

Notons que (H) implique que K n'a pas d'angle plat ou nul.

Plaçons-nous sur l'élément K de sommets a_i , $i = 1, \dots, 4$ (cf. fig. 1).

On a :

$$\overrightarrow{a_1 F(\hat{x}, \hat{y})} = \hat{x} \overrightarrow{a_1 a_2} + \hat{y} \overrightarrow{a_1 a_4} + \hat{x} \hat{y} (\overrightarrow{a_2 a_3} + \overrightarrow{a_4 a_1}).$$

En posant

$$DF = \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial F}{\partial \hat{y}} \right),$$

le jacobien J de la transformation F s'écrit :

$$J(\hat{x}, \hat{y}) = \det (DF(\hat{x}, \hat{y})) \\ J(\hat{x}, \hat{y}) = \det (\overrightarrow{a_1 a_2}, \overrightarrow{a_1 a_4}) + \hat{x} \det (\overrightarrow{a_1 a_2}, \overrightarrow{a_4 a_3}) + \hat{y} \det (\overrightarrow{a_2 a_3}, \overrightarrow{a_1 a_4}).$$

On a donc $J \in \hat{P}_1$ et

$$J(\hat{a}_i) = \det (\overrightarrow{a_i a_{i+1}}, \overrightarrow{a_i a_{i+2}}) \quad 1 \leq i \leq 4 \quad (i+1 \text{ et } i+2 \text{ calculés modulo } 4),$$

de sorte que $J(\hat{a}_i)$ représente le double de la surface du triangle S_i . J atteint son minimum en un sommet de K , les hypothèses faites sur K nous permettent alors la minoration :

$$J(\hat{x}, \hat{y}) \geq C \rho_K^2 \geq \frac{C}{\sigma^2} h_K^2 \quad \text{sur } \hat{K}.$$

2.2. Espaces d'approximations

Nous allons maintenant décrire l'élément Q_1 -bulle/ Q_1 . Pour cela, nous introduisons les espaces d'approximations suivants :

DÉFINITIONS :

$$\begin{aligned}
 Q_h &= \{q_h \mid q_h \in C^0(\bar{\Omega}), q_h|_K = \hat{q} \circ F_K^{-1}, \hat{q} \in \hat{Q}_1 \ \forall K \in \mathfrak{T}_h\}, \\
 B_h &= \{v_h \mid v_h|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in \hat{P}_3(\hat{K}_1) \cap H_0^1(\hat{K}_1) \ \forall K \in \mathfrak{T}_h\} \oplus \\
 &\oplus \{v_h \mid v_h|_K = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \hat{v} \in \hat{P}_3(\hat{K}_2) \cap H_0^1(\hat{K}_2) \ \forall K \in \mathfrak{T}_h\} \\
 &= \{v_h \mid v_h|_K = [\xi_1(K) \hat{\varphi}_1 + \xi_2(K) \hat{\varphi}_2] \circ F_K^{-1}, \\
 &\quad \xi_i(K) \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ \forall K \in \mathfrak{T}_h\}.
 \end{aligned}$$

$\hat{\varphi}_1(\hat{x}, \hat{y})$ et $\hat{\varphi}_2(\hat{x}, \hat{y})$ désignent les fonctions bulle \hat{P}_3 des triangles \hat{K}_1 et \hat{K}_2 définies sur l'élément de référence \hat{K} (cf. fig. 2) par :

$$\hat{\varphi}_1(\hat{x}, \hat{y}) = \beta \hat{x} \hat{y} (1 - \hat{x} - \hat{y}) \quad \text{si } (\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{K}_1,$$

$$\hat{\varphi}_2(\hat{x}, \hat{y}) = \beta (1 - \hat{x})(1 - \hat{y})(\hat{x} + \hat{y} - 1) \quad \text{si } (\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{K}_2,$$

où β est une constante de normalisation. On prend $\beta = 27$ de telle sorte que $\max_x \varphi_i(x) = 1, i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
 W_h &= (Q_h)^2 \\
 W_{0h} &= W_h \cap (H_0^1(\Omega))^2 \\
 V_h &= W_h \oplus (B_h)^2 \\
 V_{0h} &= V_h \cap (H_0^1(\Omega))^2.
 \end{aligned}$$

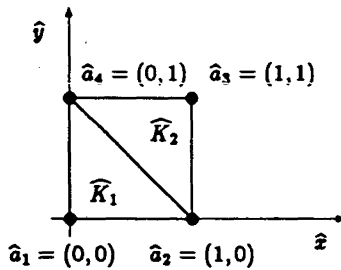


Figure 2. — Découpage de l'élément de référence.

Remarque 2.1 : L'approximation Q_1 -bulle/ Q_1 (resp. l'élément P_1 -bulle/ P_1 d'Arnold-Brezzi-Fortin) a pour effet d'introduire deux degrés (resp. un degré) de liberté supplémentaires par élément et par composante de la vitesse, par rapport à un élément Q_1/Q_1 (resp. P_1/P_1). En particulier cette

méthodologie dispense de la construction effective de la triangulation à partir de la quadrangulation et évite le problème des éléments totalement déterminés.

Ce nouvel élément devient plus attractif dans le cas tridimensionnel ; en effet, les techniques de macro-éléments n'assurent alors plus la continuité de la pression aux interfaces.

Les fonctions de base bulle utilisées restant à supports disjoints, la partie de la matrice de masse représentant les interactions entre fonctions bulles reste bloc-diagonale (les inconnues bulle étant rangées à la suite des inconnues P_1). On peut ainsi procéder à la classique élimination statique.

3. OPÉRATEUR D'INTERPOLATION

Fortin (cf. [F]) a montré que la condition (1.3) est vérifiée si l'on sait construire un opérateur $\Pi_h : (H_0^1(\Omega))^2 \rightarrow V_{0h}$ tel que :

$$\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot (\Pi_h v - v) dx = 0, \quad \forall q_h \in Q_h, \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^2, \quad (3.1)$$

et

$$|\Pi_h v|_1 \leq C |v|_1, \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^2, \quad \text{avec } C, \text{ constante indépendante de } h. \quad (3.2)$$

Si $Q_h \subset C^0(\bar{\Omega})$, on peut intégrer (3.1) par parties :

$$\int_{\Omega} (v - \Pi_h v) \cdot \nabla q_h dx = 0, \quad \forall q_h \in Q_h, \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^2. \quad (3.3)$$

PROPOSITION 3.1 : *Sous les hypothèses (H), l'opérateur Π_h vérifiant (3.1)-(3.2) existe et la condition de stabilité (1.3) est vérifiée.*

Démonstration : Construisons Π_h .

Soit $P_h : (H_0^1(\Omega)) \rightarrow W_{0h}$ satisfaisant

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |P_h v - v|_{1,K}^2 \leq C |v|_{1,\Omega}^2 \quad (3.4)$$

et

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-2} \|P_h v - v\|_{0,K}^2 \leq C |v|_{1,\Omega}^2. \quad (3.5)$$

Un tel opérateur est construit par Clément (cf. [C]), ou Bernardi (cf. [BE]).

Plaçons-nous sur un élément K de sommets a_i , $i = 1, \dots, 4$ et cherchons $\Pi_h v$ tel que :

$$\Pi_h v = P_h v + \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2.$$

α_1 et α_2 désignent deux vecteurs de \mathbb{R}^2 ne dépendant que de v et de K .

On cherchera à réaliser la condition plus forte que (3.3) :

$$\begin{aligned} \int_K (\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) \cdot \nabla q_h dx &= \\ &= \int_K (v - P_h v) \cdot \nabla q_h dx, \quad \forall q_h \in Q_h, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \int_{\hat{K}} (\alpha_1 \hat{\varphi}_1 + \alpha_2 \hat{\varphi}_2) \cdot JDF^{-t} \nabla \hat{q}_h d\hat{x} &= \\ &= \int_K (v - P_h v) \cdot \nabla q_h dx, \quad \forall q_h \in Q_h, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \end{aligned} \quad (3.6)$$

L'espace des $\nabla \hat{q}_h$ est de dimension 3. Il suffit donc de vérifier (3.6) pour la base suivante :

$$\nabla \hat{q}_1 = \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \hat{x} \end{pmatrix}, \quad \nabla \hat{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \hat{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors les trois équations :

$$\det(\alpha_1 + 2\alpha_2, \vec{a}_2 a_4) = \frac{360}{\beta} \int_K (v - P_h v) \cdot \nabla q_1 dx, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} 3 \det(\alpha_1 + \alpha_2, \vec{a}_1 a_4) + \det(\alpha_1 + 2\alpha_2, \vec{a}_2 a_3 + \vec{a}_4 a_1) &= \\ &= \frac{360}{\beta} \int_K (v - P_h v) \cdot \nabla q_2 dx, \end{aligned} \quad (3.8)$$

et

$$\begin{aligned} 3 \det(\alpha_1 + \alpha_2, \vec{a}_1 a_2) + \det(\alpha_1 + 2\alpha_2, \vec{a}_2 a_3 + \vec{a}_4 a_1) &= \\ &= -\frac{360}{\beta} \int_K (v - P_h v) \cdot \nabla q_3 dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Remarque 3.1 : L'adjonction d'une bulle unique (d'ordre quelconque) par élément conduirait à la recherche d'un seul vecteur $\alpha \in \mathbb{R}^2$. Ce vecteur doit alors vérifier trois équations indépendantes, ce qui conduit à une incompatibilité. L'utilisation de bulles symétriques (en \hat{x} , $1 - \hat{x}$ et \hat{y} , $1 - \hat{y}$) conduit à un système de trois équations linéaires dont le rang est strictement inférieur à 3 et dont le second membre ne vérifie aucune relation de compatibilité. Cela provient de la formule (lorsque Φ est symétrique en \hat{x} , $1 - \hat{x}$) :

$$\iint_{\hat{K}} \hat{x} \Phi(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} = \frac{1}{2} \iint_{\hat{K}} \Phi(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y}.$$

Il faut donc utiliser au moins deux bulles dissymétriques par élément.

On aura besoin de la matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$: $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Des équations (3.7) à (3.9) on déduit :

$$\alpha_1 + 2 \alpha_2 = \frac{360}{\beta} \int_K (v - P_h v) \cdot \nabla q_1 dx \frac{R \vec{a}_2 a_4}{|\vec{a}_2 a_4|^2} + \lambda \vec{a}_2 a_4, \quad (3.10)$$

et

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{120}{\beta} \int_K (v - P_h v) \cdot \nabla (q_2 + q_3) dx \frac{R \vec{a}_2 a_4}{|\vec{a}_2 a_4|^2} + \mu \vec{a}_2 a_4. \quad (3.11)$$

Les réels λ et μ doivent d'après (3.9) vérifier la relation affine :

$$\begin{aligned} 3 \lambda \det(\vec{a}_2 a_4, \vec{a}_1 a_4) + \mu \det(\vec{a}_2 a_4, \vec{a}_2 a_3 + \vec{a}_4 a_1) &= \frac{120}{\beta} \left(3 \int_K (v - P_h v) \cdot \right. \\ \cdot \nabla q_2 dx - 9 \int_K (v - P_h v) \cdot \nabla q_1 dx \det \left(\frac{\vec{a}_2 a_4}{|\vec{a}_2 a_4|^2}, \vec{a}_1 a_4 \right) - \\ \left. - \int_K (v - P_h v) \cdot \nabla (q_2 + q_3) dx \det \left(\frac{\vec{a}_2 a_4}{|\vec{a}_2 a_4|^2}, \vec{a}_2 a_3 + \vec{a}_4 a_1 \right) \right). \quad (3.12) \end{aligned}$$

Les hypothèses géométriques (H) impliquent $|\det(\vec{a}_2 a_4, \vec{a}_1 a_4)| > C h_K^2$. Cela prouve que pour μ fixé, on trouve un unique λ tel que (3.12). On en déduit alors α_1 et α_2 par (3.10) et (3.11). Le système (3.7)-(3.9) est donc de rang 3.

Fixons $\mu = 0$, $\Pi_h v$ est alors déterminé. Π_h est linéaire puisque α_1 et α_2 le sont.

Montrons la continuité de Π_h .

La majoration

$$\|\nabla q_i\|_{0,K} \leq C, \quad i = 1, 2, 3$$

et les hypothèses géométriques (H) nous permettent d'obtenir :

$$|\alpha_i| \leq \frac{C}{h_K} \|v - P_h v\|_{0,K}, \quad i = 1, 2.$$

La majoration

$$\|\nabla \varphi_i\|_{0,K} \leq C, \quad i = 1, 2$$

nous conduit alors à :

$$|\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2|_{1,K} \leq \frac{C}{h_K} \|v - P_h v\|_{0,K}. \quad (3.13)$$

Les équations (3.4), (3.5), et (3.13) permettent alors de conclure à la continuité de Π_h . \square

Il est facile de voir que (1.3) implique l'unicité de p_h dans Q_h/\mathbb{R} et permet d'obtenir des estimations d'erreur d'ordre optimal sur u_h et p_h (cf. Girault-Raviart [GI] par exemple).

4. FORMULATION DE HELMHOLTZ DU PROBLÈME DE STOKES

Une autre approche pour résoudre le problème de Stokes (1.1) consiste à utiliser une formulation mixte (cf. Glowinski-Pironneau [GP]).

La discrétisation doit alors être effectuée au moyen d'éléments finis mixtes. Nous allons montrer dans cette section que le couple (V_{0h}, Q_h) défini à la section (2.2) vérifie la condition de compatibilité

$$\exists \gamma > 0 \text{ indépendant de } h \text{ tel que } \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in V_{0h}} \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot v_h \, dx}{|v_h|_0 |q_h|_1} \geq \gamma. \quad (4.1)$$

PROPOSITION 4.1 : *Sous les hypothèses géométriques (H), il existe une constante γ indépendante de h telle que la condition de stabilité (4.1) soit vérifiée.*

Démonstration : Remarquons que :

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in V_{0h}} \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot v_h \, dx}{|v_h|_0 |q_h|_1} \geq \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in B_h} \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot v_h \, dx}{|v_h|_0 |q_h|_1}.$$

On peut donc se contenter de faire varier v_h dans l'espace des fonctions bulles B_h .

Plaçons-nous sur un élément K et considérons un élément v_h de B_h .

On peut poser $v_h = v_1 \varphi_1 + v_2 \varphi_2$ et $V^K = (v_1, v_2)' \in \mathbb{R}^2$, avec $\varphi_i = \hat{\varphi}_i \circ F_K^{-1}$, $i = 1, 2$.

Soit q_h dans Q_h .

Sur \hat{K} on a : $\hat{q}_h(\hat{x}, \hat{y}) = a\hat{x}\hat{y} + b\hat{x} + c\hat{y} + d$.

Posons $b^K = JDF^{-t} \nabla \hat{q}_h$, le calcul donne :

$$b^K = R [(\overrightarrow{a_1 a_4} + \hat{x}(\overrightarrow{a_2 a_3} + \overrightarrow{a_4 a_1}))(\alpha \hat{y} + b) - (\overrightarrow{a_1 a_2} + \hat{y}(\overrightarrow{a_2 a_3} + \overrightarrow{a_4 a_1}))(\alpha \hat{x} + c)].$$

On a alors :

$$\int_{\Omega} v_h \cdot \nabla q_h dx = V^K \cdot A^K,$$

où $A^K = (A_1^K, A_2^K)'$ et

$$A_i^K = \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}_i b^K d\hat{x}, \quad i = 1, 2.$$

De même, en utilisant les propriétés du jacobien J :

$$\int_K |\nabla q_h|^2 dx = \int_{\hat{K}} |b^K|^2 J^{-1} d\hat{x} \leq \frac{C}{h_K^2} \int_{\hat{K}} |b^K|^2 d\hat{x}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned} \max_{v_h \in B_h} \frac{\int_{\Omega} v_h \cdot \nabla q_h dx}{\left(\int_{\Omega} |v_h|^2 dx \right)^{1/2}} &\geq C \max_{v_h \in B_h} \frac{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} V^K \cdot A^K}{\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|V^K\|^2 \right)^{1/2}} \\ &= C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\|A^K\|^2}{h_K^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Il reste à comparer les deux formes quadratiques positives en (a, b, c) :

$$\|A^K\|^2 \quad \text{et} \quad \int_{\hat{K}} |b^K|^2 d\hat{x}.$$

Deux formes quadratiques positives et définies constituent des normes équivalentes sur l'espace des (a, b, c) . Un simple calcul donne alors :

$$360 A_1^K = a \vec{a}_2 \vec{a}_4 + b(3 \vec{a}_1 \vec{a}_4 + \vec{a}_2 \vec{a}_3 + \vec{a}_4 \vec{a}_1) - c(3 \vec{a}_1 \vec{a}_2 + \vec{a}_2 \vec{a}_3 + \vec{a}_4 \vec{a}_1),$$

et

$$360 A_2^K = 2 a \vec{a}_2 \vec{a}_4 + b(3 \vec{a}_1 \vec{a}_4 + 2 \vec{a}_2 \vec{a}_3 + 2 \vec{a}_4 \vec{a}_1) - c(3 \vec{a}_1 \vec{a}_2 + 2 \vec{a}_2 \vec{a}_3 + 2 \vec{a}_4 \vec{a}_1).$$

Il s'ensuit

$$A^K = 0 \Rightarrow b \vec{a}_1 \vec{a}_4 = c \vec{a}_1 \vec{a}_2.$$

Puisque notre quadrilatère n'a pas d'angle plat, les vecteurs $\vec{a}_1 \vec{a}_4$ et $\vec{a}_1 \vec{a}_2$ sont libres, $b = c = a = 0$ et la première forme quadratique est définie positive.

La seconde forme quadratique est également définie positive car :

$$b^K = 0 \Rightarrow A^K = 0 \Rightarrow a = b = c = 0.$$

Comme $\frac{1}{h_K^2} \int_{\hat{K}} |b^K|^2 d\hat{x}$ et $\frac{\|A^K\|^2}{h_K^2}$ sont invariantes par dilatation de K , il existe une constante positive $C(\sigma) > 0$ (indépendante de h !) telle que :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{h_K^2} \int_{\hat{K}} |b^K|^2 d\hat{x} \leq C(\sigma) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\|A^K\|^2}{h_K^2}.$$

On en déduit immédiatement le résultat. \square

Remarque 4.1 : L'adjonction d'une seule fonction bulle par élément ne permet pas de stabiliser l'approximation lorsque l'on se limite aux v_h éléments de B_h . En effet les formes quadratiques sont alors non définies.

Il est facile de voir que (4.1) implique l'unicité de p_h dans Q_h/\mathbb{R} et permet d'obtenir des estimations d'erreur d'ordre optimal sur u_h et p_h (cf. Glowinski-Pironneau [GP]).

5. EXTENSION AU CAS TRIDIMENSIONNEL

L'extension en trois dimensions se fait par découpage (virtuel) en tétraèdres de l'élément considéré. On introduit 5 degrés de liberté bulle par composante de la vitesse dans chaque hexaèdre, 3 dans chaque prisme et 2 dans chaque pyramide. Les méthodologies employées dans les démonstrations des propositions (3.1) et (4.1) s'étendent sans problème, cependant la construction de l'opérateur Π_h devient très technique. La démonstration directe utilisée pour montrer la condition de compatibilité (4.1) demande un peu moins de calculs. Les démonstrations complètes liées à ces éléments « bulle » tridimensionnels, ainsi que les résultats numériques associés feront l'objet d'une prochaine publication.

Remarque 5.1 : En utilisant l'élimination statique des degrés de liberté bulle on peut, en suivant l'approche de Bank-Welfert (cf. [BA]), analyser les éléments « bulle » introduits comme des méthodes de type Petrov-Galerkin particulières.

6. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Pour illustrer notre propos, nous avons considéré un test numérique bidimensionnel. Il s'agit d'un écoulement de Poiseuille. Un profil de vitesse parabolique est imposé à l'entrée et à la sortie d'une conduite rectangulaire.

De plus on impose une condition d'adhérence sur les parois latérales.

Si H désigne la hauteur de la conduite, alors la solution analytique du problème de Stokes (1.1) avec $f = 0$ et la condition de Dirichlet non homogène est donnée par :

$$u(x, y) = \left(\frac{2y(H-y)}{H^2}, 0 \right), \quad p(x, y) = -\frac{4x}{H^2} + c.$$

Nous avons choisi $H = 1$ et $c = 0$.

La formulation variationnelle (1.2) a été choisie pour discrétiser le problème homogène associé à notre problème affine.

Le système discrétisé a été résolu par une méthode directe, ainsi que par une méthode itérative (gradient conjugué sur la pression).

Nous présentons sur la figure 3 les trois maillages (bâti sur les mêmes 81 sommets) que nous avons utilisés pour notre discrétisation en éléments finis.

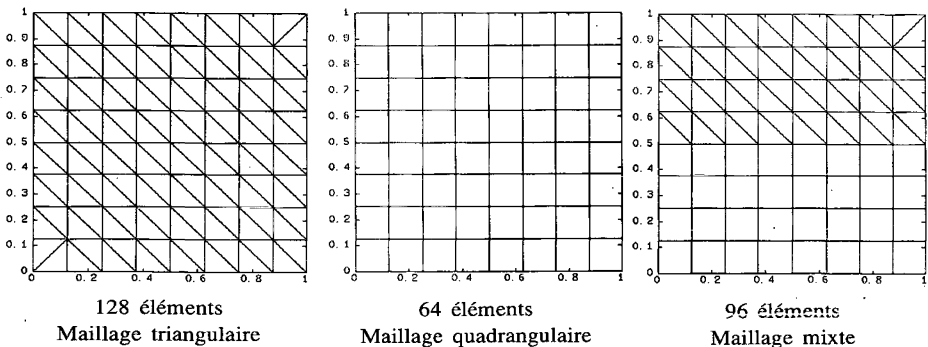


Figure 3.

On donne sur les figures 4 et 5 la pression obtenue avec les différents éléments finis testés.

On remarque que les fortes oscillations de la pression disparaissent dans les calculs utilisant l'élément P_1 -bulle/ P_1 ou l'élément Q_1 + deux bulles/ Q_1 introduit dans cet article. Le calcul sur le maillage mixte de la figure 3 mêlant ces deux éléments donne aussi un bon résultat. Bien entendu, dans tous les cas on obtient la vitesse avec une très bonne précision (cf. fig. 6).

Sur la figure 7 sont représentées sur l'élément de référence les fonctions de base bulle utilisées dans les éléments de type Q_1 -bulle/ Q_1 .

Enfin, le tableau 1 compare les erreurs relatives sur la pression obtenues avec le nouvel élément, ceci pour différents maillages réguliers $m \times m$. On constate que l'erreur d'approximation est bien en $O(h)$.

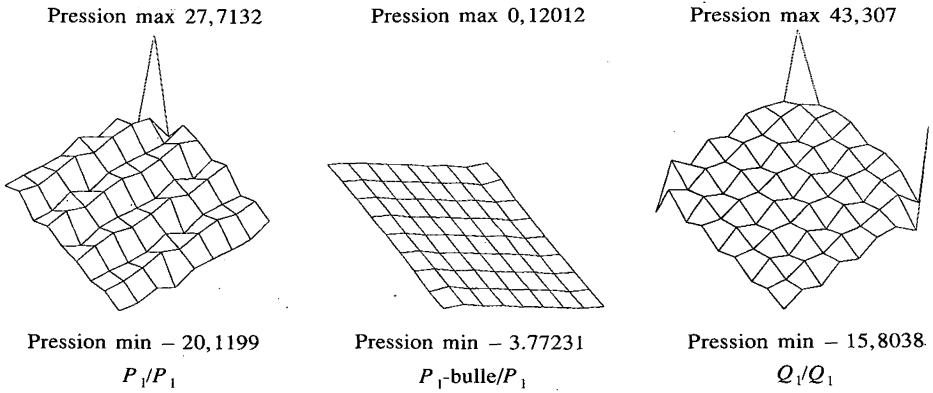


Figure 4.

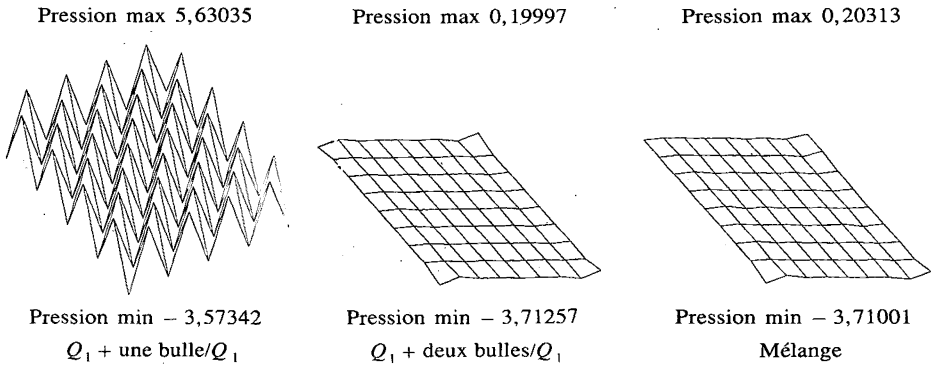


Figure 5.

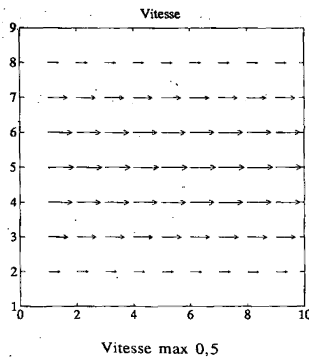


Figure 6. — Vitesse obtenue avec l'élément $Q_1 + \text{deux bulles}/Q_1$.

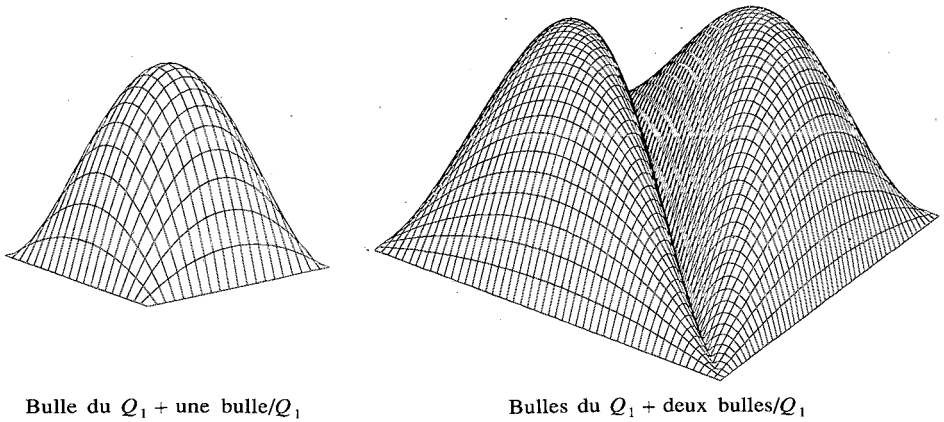


Figure 7.

TABLEAU 1
Erreur relative sur la pression.

m	h	$\frac{\ p - p_h\ }{\ p\ }$
8	$\frac{1}{8}$	0,0763
16	$\frac{1}{16}$	0,0379
32	$\frac{1}{32}$	0,0190
64	$\frac{1}{64}$	0,00951

CONCLUSION

L'adjonction de nouvelles bulles dissymétriques en 2D et 3D a permis d'étendre naturellement le mini-élément développé par Arnold-Brezzi-Fortin (*cf.* [A]). Des tests numériques sur un écoulement de Poiseuille ont été effectués. Les tests numériques tridimensionnels sont actuellement à l'étude. Les couples d'éléments finis proposés vérifient la condition de compatibilité de type Brezzi (*cf.* [BR]) habituelle pour le problème de Stokes, ainsi que la condition de compatibilité modifiée apparaissant lors de la formulation mixte présentée par Glowinski et Pironneau (*cf.* [GP]).

REMERCIEMENTS

Nous remercions Michel Ravachol pour ses remarques pertinentes.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [A] D. ARNOLD, F. BREZZI, M. FORTIN, *A stable finite element for the Stokes equations*, *Calcolo*, 21 (4), 337-344, 1984.
- [BA] R. BANK, B. WELFERT, *A comparison between the mini-element and the Petrov-Galerkin formulations for the generalized Stokes problem*, private communication, 1989.
- [BR] F. BREZZI, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers*, *RAIRO, Modél. Math. Anal. Numér.*, R2, 129-151, 1974.
- [BE] C. BERNARDI, *Optimal finite element interpolation on curved domains*, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 26, N° 5, pp. 1212-1240, 1989.
- [C] P. CLÉMENT, *Approximation by finite element functions using local regularization*, *RAIRO, Modél. Math. Anal. Numér.*, 9 R2, 33-76, 1975.
- [F] M. FORTIN, *An analysis of the convergence of mixed finite elements methods*, *RAIRO, Modél. Math. Anal. Numér.*, 11 R3, 341-354, 1977.
- [GI] V. GIRAULT, P. A. RAVIART, *Finite element approximation on the Navier-Stokes equations*, *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, 1981.
- [GP] R. GLOWINSKI, O. PIRONNEAU, *On a mixed finite element approximation of the Stokes problem (I). Convergence of the approximate solutions*. IRIA-Laboria, *Numer. Math.*, Fev. 1979.
- [T] G. TAYLOR et P. HOOD, *A numerical solution of the Navier-Stokes equation using the finite element technique*, *Comput. and Fluids*, Vol. 1, N° 1, pp. 73-100.