RAIRO
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE
ET ANALYSE NUMÉRIQUE

ABDELLATIF AGOUZAL
JEAN-MARIE THOMAS

Une méthode d'éléments finis hybrides en décomposition de domaines

RAIRO – Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 29, nº 6 (1995), p. 749-764.

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1995__29_6_749_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 29, n° 6, 1995, p. 749 à 764)

UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS HYBRIDES EN DÉCOMPOSITION DE DOMAINES (*)

par Abdellatif AGOUZAL [1] et Jean-Marie THOMAS [1]

Communiqué par O. PIRONNEAU

Résumé. — *On propose et on analyse une nouvelle méthode d'éléments finis hybrides en décomposition de domaines pour l'approximation de la solution d'un problème elliptique. Dans cette méthode, le domaine est divisé en plusieurs sous-domaines et on utilise sur chaque sous-domaine une discrétisation de type éléments finis. Les raccords sont obtenus à l'aide de deux multiplicateurs de Lagrange et un espace joint. Des résultats d'ordre optimal sont obtenus pour un problème modèle du second ordre.*

Abstract. — *We propose and analyze a new hybrid finite elements domain decomposition method for solving an elliptic problem. In this method we can use different finite element approximations in each subdomains ; the matching conditions on the interfaces are obtained with two Lagrange multipliers and a mortar element. Optimal results are obtained for a model second-order problem.*

1. INTRODUCTION

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles posées sur des domaines de géométries quelconques nécessite des algorithmes rapides et adaptés aux architectures des calculateurs modernes. Les méthodes de décomposition de domaines peuvent offrir une réponse à ces besoins. En effet, elles permettent de réduire un problème posé sur un domaine de grande taille et/ou de géométrie compliquée, à une suite de problèmes posés sur des domaines de taille plus petite et/ou de géométrie plus simple appelés sous-domaines.

Le point crucial dans les différentes méthodes de décomposition de domaines est le transfert de l'information entre sous-domaines. Dans le cas d'une

(*) Manuscrit reçu le 20 mai 1994 et sous forme révisée le 19 décembre 1994.
[1] Laboratoire de Mathématiques Appliquées, U.R.A. C.N.R.S. 1204, Université de Pau et des Pays de l'Adour, avenue de l'Université, 64000 Pau, France.

discrétisation avec des triangulations locales non globalement compatibles, deux approches peuvent être trouvées dans la littérature : les méthodes des éléments avec joints ([2], [4], [5]) et les méthodes hybrides ([2], [7], [12]).

La méthode que nous proposons ici est une méthode hybride non standard de décomposition de domaines. Cette méthode consiste à introduire des variables d'interfaces pour traduire les raccords nécessaires. La technique est extrêmement souple en ce qui concerne tant la géométrie du domaine que le type et la précision de l'approximation. Elle permet des discrétisations indépendantes par sous-domaines et est adaptée à une résolution des problèmes posés sur l'ensemble des sous-domaines en parallèle.

La méthode sera présentée sur le problème modèle

$$\left\{\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ dans } \Omega , \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega ; \end{aligned}\right. \tag{1.1}$$

où Ω est un ouvert borné de frontière assez régulière de $R^{\dim}$ $(\dim = 2, 3)$ et $f \in L^2(\Omega)$.

Pour tout réel σ strictement positif, on notera par $H^\sigma(\Omega)$ et $H^\sigma(\partial\Omega)$ les espaces de Sobolev usuels [1] ; et par $H^{-\sigma}(\partial\Omega)$ l'espace dual de $H^\sigma(\partial\Omega)$. Enfin on notera par $\langle .,. \rangle_{\partial\Omega}$ le produit de dualité entre $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

2. FORMULATION HYBRIDE

On considère une décomposition de Ω en un nombre fini E de sous-domaines connexes, à frontières assez régulières, d'intérieurs deux à deux disjoints :

$$\overline{\Omega} = \cup_{e=1}^{E} \overline{\Omega}_e , \tag{2.1a}$$

$$\Omega_e \cap \Omega_d = \Phi , \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant e \neq d \leqslant E . \tag{2.1b}$$

Pour $1 \leqslant e \neq d \leqslant E$, on introduit les notations :

$$\Gamma_e = \partial\Omega_e , \tag{2.2a}$$

$$\Gamma_{ed} = \Gamma_e \cap \Gamma_d = \Gamma_{de} . \tag{2.2b}$$

Par ailleurs, on notera par Σ la réunion des frontières des sous-domaines Ω_e :

$$\Sigma = \bigcup_{e=1}^{E} \Gamma_e . \tag{2.3}$$

A cette décomposition de domaine, on associe les espaces produits

$$V = \prod_{e=1}^{E} H^1(\Omega_e)\,, \quad M = \prod_{e=1}^{E} H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_e)\,. \tag{2.4}$$

Enfin on considère l'espace des traces sur Σ des fonctions de $H_0^1(\Omega)$

$$\Phi = \left\{\phi = v|_{\Sigma}\,,\, v \in H_0^1(\Omega)\right\}.$$

Une fonction $\phi \in \Phi$ est donc nulle sur $\partial\Omega$ et est trace interne d'une fonction élément de $H^1(\Omega)$ sur toute partie $\Gamma \subset \Sigma$.

On pose :

$$W = V \times \Phi\,. \tag{2.5}$$

Etant donné $\{\rho_e\}_{1 \leqslant e \leqslant E}$ un ensemble de nombres réels strictement positifs, soit $(\dot{u}, \dot{v}) \mapsto a(\dot{u}, \dot{v})$ la forme bilinéaire continue sur $W \times W$ définie par :

(2.6)
$$a(\dot{u}, \dot{v}) = \sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega_e} \mathbf{grad}\, u_e \cdot \mathbf{grad}\, v_e\, dx + \sum_{e=1}^{E} \frac{1}{\rho_e} \int_{\Gamma_e} (u_e - \phi_\Sigma)(v_e - \psi_\Sigma)\, d\sigma\,,$$

avec $\dot{u} = ((u_e), \phi_\Sigma)$ et $\dot{v} = ((v_e), \psi_\Sigma)$, et soit $(\dot{v}, \dot{\mu}) \mapsto b(\dot{v}, \dot{\mu})$ la forme bilinéaire continue sur $W \times M$ définie par

$$b(\dot{v}, \dot{\mu}) = -\sum_{e=1}^{E} \langle \mu_e, v_e - \psi_\Sigma \rangle_{\Gamma_e}\,, \tag{2.7}$$

avec $\dot{v} = ((v_e), \psi_\Sigma)$ et $\dot{\mu} = (\mu_e)$.

On considère la formulation hybride primale suivante :

$$\left\{\begin{array}{c} \dot{u} \in W, \dot{\lambda} \in M\,, \\ \forall \dot{v} \in W, a(\dot{u}, \dot{v}) + b(\dot{v}, \dot{\lambda}) = \displaystyle\sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega_e} f v_e\, dx\,, \\ \forall \dot{v} \in M\,, \quad b(\dot{u}, \dot{\mu}) = 0\,. \end{array}\right. \tag{2.8}$$

Il est facile de vérifier que :

THÉORÈME 2.1 : *Le problème* (2.8) *admet une solution* $(\dot{u}, \dot{\lambda}) = (((u_e), \phi_\Sigma), (\lambda_e))$ *et une seule ; en outre on a les caractérisations suivantes :*

(i) *Pour tout* e, $1 \leqslant e \leqslant E$, $u_e = u|_{\Omega_e}$ *et* $\phi_\Sigma = u|_\Sigma$ *où* u *est la solution faible du problème* (1.1).

(ii) *Pour tout e,* $1 \leqslant e \leqslant E$, *la composante* λ_e *coïncide avec la trace normale sur* Γ_e *de la solution* $\mathbf{p}$ *du problème dual de* (1.1).

Remarque 2.1 : La formulation hybride primale considérée ici n'est pas standard : dans une méthode hybride primale standard le raccord est obtenu en utilisant un multiplicateur par interface (ce multiplicateur est interprété comme un flux) ; ici le raccord est obtenu en utilisant deux multiplicateurs sur chaque interface (qui s'interprètent comme étant les flux sortants et les flux entrants) et un élément d'un espace joint qui s'interprète comme étant la trace de u sur Σ. Cette formulation hybride primale, initialement introduite dans [12], se rapproche de celle proposée récemment par F. Brezzi et L. D. Marini [7]. Formellement cette dernière peut s'obtenir en choisissant $\rho_e = +\infty$ dans (2.6). Les exemples qui seront traités dans ce papier sont tous obtenus avec ρ_e de l'ordre du pas de discrétisation locale.

Remarque 2.2 : La solution $(\dot{u}, \dot{\lambda}) = (((u_e), \phi_\Sigma), (\lambda_e)) \in W \times M$ du problème (2.8) peut être caractérisée comme étant l'unique point selle sur $W \times M$ de la fonctionnelle

$$\mathscr{L}(\dot{v} ; \dot{\mu}) = \frac{1}{2} a(\dot{v}, \dot{v}) + b(\dot{v}, \dot{\mu}) - \sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega_e} f v_e \, dx .$$

Ainsi (λ_e) est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $u_e = \phi_\Sigma$ sur Γ_e $(1 \leqslant e \leqslant E)$.

3. MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS HYBRIDES

Dans tout ce qui suit, la même lettre C désignera diverses constantes strictement positives indépendantes des paramètres ρ_e et des paramètres de discrétisation.

Pour tout e, $1 \leqslant e \leqslant E$, soient

(3.1) V_{h_e} un sous-espace de dimension finie de $H^1(\Omega_e)$,

(3.2) Λ_{h_e} un sous-espace de dimension finie de $L^2(\Gamma_e)$,

(3.3) Φ_{h_Σ} un sous-espace de dimension finie de Φ

et

$$V_h = \prod_{e=1}^{E} V_{h_e}, \quad \Lambda_h = \prod_{e=1}^{E} \Lambda_{h_e} . \tag{3.4}$$

On introduit ensuite W_h et M_h deux sous-espaces de dimension finie de W et M tels que :

$$W_h \subset V_h \times \Phi_{h_\Sigma} \quad \text{et} \quad M_h \subset \Lambda_h . \tag{3.5}$$

On notera par Z_h le sous-espace de W_h défini par

$$Z_h = \{\dot{u}_h \in W_h, \forall \dot{\mu}_h \in M_h, b(\dot{u}_h, \dot{\mu}_h) = 0\} . \tag{3.6}$$

On considère le problème discret suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} \dot{u}_h \in W_h, \dot{\lambda}_h \in M_h , \\ \forall \dot{v}_h \in W_h, \quad a(\dot{u}_h, \dot{v}_h) + b(\dot{v}_h, \dot{\lambda}_h) = \displaystyle\sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega_e} f v_{h_e}\, dx , \\ \forall \dot{\mu}_h \in M_h , \quad b(\dot{u}_h, \dot{\mu}_h) = 0 . \end{array}\right. \tag{3.7}$$

En utilisant la théorie de Brezzi-Babuska ([6], [11]), on obtient le

THÉORÈME 3.1 : *Le problème* (3.7) *admet une solution et une seule si et seulement si :*

$$\inf_{\substack{\dot{v}_h \in Z_h \\ \dot{v}_h \neq 0}} \sup_{\dot{u}_h \in Z_h} a(\dot{u}_h, \dot{v}_h) > 0 , \tag{3.8}$$

et

$$\inf_{\substack{\dot{\mu}_h \in M_h \\ \dot{\mu}_h \neq 0}} \sup_{\dot{v}_h \in W_h} b(\dot{v}_h, \dot{\mu}_h) > 0 . \tag{3.9}$$

Remarquons que la forme bilinéaire $a(\cdot , \cdot)$ est $V_h \times \Phi_{h_\Sigma}$-elliptique ; par suite l'hypothèse (3.8) est toujours vérifiée. Par contre la condition (3.9) est plus difficile à vérifier, c'est une condition de compatibilité entre les espaces W_h et M_h. Pour la suite, il est utile d'avoir des critères locaux suffisants pour établir cette condition ; c'est l'objet du

LEMME 3.1 : *On suppose que* $W_h = V_h \times \Phi_{h_\Sigma}$. *Si pour tout* e, $1 \leqslant e \leqslant E$, *on a :*

$$\forall \mu_{h_e} \in \Lambda_{h_e} , \exists v_{h_e} \in V_{h_e} , \int_{\Gamma_e} \mu_{h_e} v_{h_e}\, d\sigma \neq 0 \tag{3.10}$$

alors la condition (3.4) *est vérifiée.*

Les conditions locales (3.10) sont les conditions classiques des méthodes hybrides primales standard où la condition de Dirichlet est dualisée en utilisant un multiplicateur de Lagrange sur la frontière (*cf.* [3], [6], [8], [9], [10], [11]). Dans le paragraphe 5, nous allons analyser divers choix des espaces de discrétisations V_{h_e} et Λ_{h_e} pour lesquels ces conditions sont vérifiées, plus précisément pour qu'on ait :

$$(3.11) \qquad \forall e = 1, \dots, E\,, \quad \inf_{\substack{\mu_{h_e} \in \Lambda_{h_e} \\ \mu_{h_e} \neq 0}} \sup_{v_{h_e} \in V_{h_e}} \frac{\int_{\Gamma_e} \mu_{h_e} v_{h_e}\, d\sigma}{\| v_{h_e} \|_{1, \Omega_e} \, \| \mu_{h_e} \|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_e}} \geq C\,.$$

Remarquons de plus, que si les conditions (3.11) sont vérifiées et lorsque $W_h = V_h \times \Phi_{h_\Sigma}$, on a :

$$(3.12) \qquad \inf_{\substack{\mu_{\dot h} \in \Lambda_{\dot h} \\ \mu_{\dot h} \neq 0}} \sup_{v_{\dot h} \in V_{\dot h}} \frac{\sum_{e=1}^{E} \int_{\Gamma_e} \mu_{h_e} v_{h_e}\, d\sigma}{\left(\sum_{e=1}^{E} \| v_{h_e} \|^2_{1, \Omega_e} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e=1}^{E} \| \mu_{h_e} \|^2_{-\frac{1}{2}, \Gamma_e} \right)^{\frac{1}{2}}} \geq C\,.$$

Remarque 3.1 : Un algorithme adapté à la résolution du problème discret (3.7) a été proposé dans [12]. Dans le cas où $W_h = V_h \times \Phi_{h_\Sigma}$, cet algorithme est parallélisable, et consiste à résoudre à chaque itération E-problèmes discrets indépendants avec des conditions aux limites de Robin-Fourier. Pour plus de détails concernant cet algorithme, on renvoie le lecteur à [12].

4. ESTIMATIONS D'ERREURS

Dans ce paragraphe, on notera par $(\dot u, \dot\lambda)$ (respectivement $((\dot u_h, \dot\lambda_h))$ la solution du problème (2.8) (respectivement (3.7)).

On introduit les normes suivantes qui dépendront du maillage lorsque les paramètres ρ_e sont choisis en fonction des paramètres de discrétisations, (*cf.* (5.4)) :

$$(4.1) \qquad [[\dot v\,]]^2_{1, \Omega} = \sum_{e=1}^{E} |v_e|^2_{1, \Omega_e} + \sum_{e=1}^{E} \frac{1}{\rho_e} \| v_e - \psi_\Sigma \|^2_{0, \Gamma_e}\,,$$

pour tout $\dot v = ((v_e), \psi_\Sigma) \in W$,

$$(4.2) \qquad [[\dot\mu]]^2_{-\frac{1}{2}, \Sigma} = \sum_{e=1}^{E} \rho_e \, \| \mu_e \|^2_{0, \Gamma_e}\,,$$

pour tout $\dot\mu = (\mu_e) \in \prod_{e=1}^{E} L^2(\Gamma_e)\,.$

Il est facile de vérifier que pour tout $(\dot{v}_h, \dot{w}) \in (V_h \times \Phi_{h_\Sigma}) \times W$ et pour tout $\dot{\mu} \in \prod_{e=1}^{E} L^2(\Gamma_e)$, on a :

$$a(\dot{v}_h, \dot{v}_h) \geq C[[\dot{v}_h]]^2_{1,\Omega} \tag{4.3}$$

$$a(\dot{v}_h, \dot{w}) \leq C[[\dot{v}_h]]_{1,\Omega}\,[[\dot{w}]]_{1,\Omega} \tag{4.4}$$

et

$$b(\dot{w}, \dot{\mu}) \leq C[[\dot{w}]]_{1,\Omega}\,[[\dot{\mu}]]_{-\frac{1}{2},\Sigma}\,. \tag{4.5}$$

La théorie abstraite des majorations d'erreurs pour les formulations mixtes ([6], [11]), nous permet d'obtenir.

THÉORÈME 4.1 : *Soit* $(\dot{u}, \dot{\lambda})$ *la solution de* (2.8) ; *on suppose que* $\dot{\lambda} \in \prod_{e=1}^{E} L^2(\Gamma_e)$. *Si on a :*

$$\inf_{\substack{\dot{\mu}_h \in M_h \\ \dot{\mu}_h \neq 0}} \sup_{\dot{v}_h \in W_h} \frac{b(\dot{v}_h, \dot{\mu}_h)}{\|\dot{v}_h\|_{1,\Omega}\,\|\dot{\mu}_h\|_{-\frac{1}{2},\Sigma}} \geq C\,, \tag{4.6}$$

alors on a la majoration d'erreur :

$$[[\dot{u} - \dot{u}_h]]_{1,\Omega} + [[\dot{\lambda} - \dot{\lambda}_h]]_{-\frac{1}{2},\Sigma} \leq \tag{4.7}$$

$$\leq C\Big\{\inf_{\dot{v}_h \in W_h} [[\dot{u} - \dot{v}_h]]_{1,\Omega} + \inf_{\dot{\mu}_h \in W_h} [[\dot{\lambda} - \dot{\mu}_h]]_{-\frac{1}{2},\Sigma}\Big\}\,.$$

Remarque 4.1 : Le critère de Pitkäranta ([8], [9]) nous permet d'affirmer (en choisissant convenablement les paramètres ρ_e, *cf.* Annexe), que les deux conditions (4.6) et (3.12) sont équivalentes.

Remarque 4.2 : La condition (4.6) est une version renforcée de la condition nécessaire et suffisante de la solvabilité du problème discret, renforcée dans la mesure où la constante qui intervient est supposée indépendante des paramètres ρ_e et des paramètres de discrétisations.

Dans le cas où $W_h = V_h \times \Phi_{h_\Sigma}$, les versions renforcées des conditions locales (3.10) s'avèrent également suffisantes pour établir la condition (4.6). Plus précisément, si pour tout e, $1 \leq e \leq E$, on a :

$$\inf_{\substack{\mu_{h_e} \in \Lambda_{h_e} \\ \mu_{h_e} \neq 0}} \sup_{v_{h_e} \in V_{h_e}} \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_e} \mu_{h_e} v_{h_e}\, d\sigma}{\left(\|v_{h_e}\|^2_{1,\Omega_e} + \dfrac{1}{\rho_e}\|v_{h_e}\|^2_{0,\Gamma_e}\right)^{\frac{1}{2}} \rho_e^{\frac{1}{2}}\,\|\mu_{h_e}\|_{0,\Gamma_e}} \geq C$$

alors la condition (4.6) est vérifiée. En regroupant les résultats précédents, on obtient le

COROLLAIRE 4.1 : *On suppose que* $W_h = V_h \times \Phi_{h\Sigma}$, $M_h = \Lambda_h$ *et que*

(4.8)

$$\forall e = 1, \dots, E\,, \inf_{\substack{\mu_{h_e} \in \Lambda_{h_e} \\ \mu_{h_e} \neq 0}} \sup_{v_{h_e} \in V_{h_e}} \frac{\displaystyle\int_{\Gamma_e} \mu_{h_e} v_{h_e}\, d\sigma}{\left(\| v_{h_e} \|^2_{1,\Omega_e} + \dfrac{1}{\rho_e} \| v_{h_e} \|^2_{0,\Gamma_e} \right)^{\frac{1}{2}} \rho_e^{\frac{1}{2}} \| \mu_{h_e} \|_{0,\Gamma_e}} \geq C\,.$$

De plus, on suppose que les espaces de discrétisations V_{h_e}, Φ_{h_Σ} *et* Λ_{h_e} *satisfont les propriétés d'approximations suivantes : pour tout* $\sigma_e \geq 3/2$, *il existe un nombre* $\theta_e > 0$, *tel que : lorsque* $u \in H^1_0(\Omega)$ *vérifie* $u_e = u|_{\Omega_e} \in H^{\sigma_e}(\Omega_e)$, *alors :*

(4.9)
$$\inf_{\substack{\mu_{h_e} \in \Lambda_{h_e} \\ \mu_{h_e} v_{h_e} \in V_{h_e} \neq 0}} \| u_e - v_{h_e} \|_{1,\Omega_e} \leq C h_e^{\theta_e} | u_e |_{\sigma_e, \Omega_e}$$

(4.10)
$$\inf_{\phi_{h\Sigma} \in \Phi_{h\Sigma}} \sum_{e=1}^{E} \frac{1}{\rho_e} \| u_e - \phi_{h_\Sigma} \|^2_{0,\Gamma_e} \leq C \sum_{e=1}^{E} h_e^{2\theta_e} | u_e |^2_{\sigma_e, \Omega_e}$$

et

(4.11)
$$\inf_{\mu_{h_e} \in \Lambda_{h_e}} \rho_e \left\| \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{n}_e} - \mu_{h_e} \right\|_{0,\Gamma_e} \leq C h_e^{\theta_e} | u_e |_{\sigma_e, \Omega_e}\,.$$

Alors, on a :

(4.12)
$$[[\dot{u} - \dot{u}_h]]_{1,\Omega} + [[\dot{\lambda} - \dot{\lambda}_h]]_{-\frac{1}{2},\Sigma} \leq C \left(\sum_{e=1}^{E} h_e^{2\theta_e} | u_e |^2_{\sigma_e, \Omega_e} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 4.3 : La condition $M_h = \Lambda_h$ du Corollaire 4.1 peut être relaxée. Pour obtenir la même estimation d'erreurs, il suffit de remplacer l'hypothèse (4.11) par

(4.13)
$$\inf_{\mu_h \in M_h} [[\dot{\lambda} - \dot{\mu}_h]]_{-\frac{1}{2},\Sigma} \leq C \left(\sum_{e=1}^{E} h_e^{2\theta_e} | u_e |^2_{\sigma_e, \Omega_e} \right)^{\frac{1}{2}}$$

avec $\lambda_e = \dfrac{\partial u_e}{\partial \mathbf{n}_e}$.

5. EXEMPLES

Dans ce paragraphe, nous allons décrire quelques exemples vérifiant les hypothèses introduites dans le paragraphe 4. Précisons les hypothèses et les espaces de discrétisations qui nous seront utiles pour la suite.

D'une part, pour tout $e = 1, \ldots, E$, à un nombre h_e destiné à tendre vers zéro, on associe une triangulation de Ω_e en triangles, notée $\mathcal{T}_{h_e}$. On suppose que cette triangulation est régulière et uniformément régulière au voisinage des Γ_e, $e = 1, \ldots, E$. On notera par $\partial\mathcal{T}_{h_e}$ la subdivision induite par $\mathcal{T}_{h_e}$ sur Γ_e et par $\partial\mathcal{T}_{h_e}^{ed}$ la subdivision induite par $\mathcal{T}_{h_e}$ sur Γ_{ed}.

Soit $\{k_1, k_2, \ldots, k_E\}$ une famille d'entiers strictement positifs. On considère les espaces de dimension finie V_{h_e} définis par :

$$V_{h_e} = \{v_{h_e} \in C^0(\overline{\Omega}_e)\,;\, \forall T \in \mathcal{T}_{h_e}, v_{h_e|T} \in P_{k_e}(T)\}\,. \tag{5.1}$$

D'autre part, soit h_Σ un réel destiné à tendre vers zéro ; on lui associe une subdivision régulière $\mathcal{S}_{h_\Sigma}$ de Σ et on introduit alors l'espace défini par :

$$\Phi_{h_\Sigma} = \{\phi_{h_\Sigma} \in C^0(\overline{\Sigma})\,;\, \phi_{h_\Sigma|\partial\Omega} = 0\,;\, \forall S \in \mathcal{S}_{h_\Sigma}, \phi_{h_\Sigma|S} \in P_{k_\Sigma}(S)\}\,, \tag{5.2}$$

où k_Σ est un entier strictement positif.

On suppose que :

$$h_\Sigma \leqslant C \max_{1 \leqslant e \leqslant E} h_e \tag{5.3}$$

et on choisit

$$\rho_e = h_e, \quad 1 \leqslant e \leqslant E\,. \tag{5.4}$$

Remarque 5.1 : Avec les hypothèses (5.3) et (5.4), les espaces de discrétisations vérifient les propriétés d'approximations (4.9) et (4.10). De plus, avec le choix (5.4) les conditions locales (3.11) et (4.8) sont équivalentes ([8], [9]).

Exemple 1 (dim = 2). On suppose que : $k_1 = k_2 = \cdots = k_E$ et aussi $k_\Sigma = 1$.

A chaque espace V_{h_e}, on associe l'espace Λ_{h_e} comme défini en Annexe.

On pose :

$$W_h = V_h \times \Phi_{h_\Sigma}\,, \quad M_h = \Lambda_h\,.$$

Les couples d'espaces (V_{h_e}, Λ_{h_e}) sont compatibles au sens où les conditions locales (4.8) sont vérifiées (*cf.* Annexe, Théorème A1). Par suite, si $u_e = u_{|\Omega_e} \in H^{\sigma_e}(\Omega_e)$ avec $1 < \sigma_e < 2$, alors on a :

$$(5.5)\quad [[\dot{u} - \dot{u}_h]]_{1,\Omega} + [[\dot{\lambda} - \dot{\lambda}_h]]_{-\frac{1}{2},\Sigma} \leqslant C\left(\sum_{e=1}^{E} h_e^{2(\sigma_e - 1)} |u_e|^2_{\sigma_e, \Omega_e}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple 2 (dim = 3). On suppose encore que : $k_1 = k_2 = \cdots = k_E$ et $k_\Sigma = 1$. A chaque sommet P_i appartenant à $\partial\mathcal{T}_{h_e}$, on associe un domaine barycentrique B_i défini par :

$$(5.6)\qquad B_i = \bigcup_{T \in \partial\mathcal{T}_{h_e},\, P_i \in T} B_{i,T},$$

avec

$$(5.7)\qquad B_{i,T} = \{P \in T\,;\, \lambda_i(P) \geqslant \lambda_j(P), \text{pour } j \neq i \text{ et } P_j \in \overline{T}\},$$

où les λ_j sont les coordonnées barycentriques relatives à T par rapport aux points P_j.

En utilisant les notations introduites, on définit les espaces Λ_{h_e} par :

$$(5.8)\qquad \Lambda_{h_e} = \{\mu_{h_e} \in L^2(\Gamma_e)\,;\, \forall P_i \in \partial\mathcal{T}_{h_e},\quad \mu_{h_e|B_u} = \text{Constante}\}.$$

On pose :

$$W_h = V_h \times \Phi_{h_\Sigma},\quad M_h = \Lambda_h.$$

Avec les mêmes arguments que pour l'Exemple 1, on montre que les couples d'espaces (V_{h_e}, Λ_{h_e}) sont compatibles au sens où les conditions locales (4.8) sont vérifiées. Par suite, si $u_e = u_{|\Omega_e} \in H^{\sigma_e}(\Omega_e)$ avec $1 < \sigma_e < 2$, alors on a :

$$(5.9)\quad [[\dot{u} - \dot{u}_h]]_{1,\Omega} + [[\dot{\lambda} - \dot{\lambda}_h]]_{-\frac{1}{2},\Sigma} \leqslant C\left(\sum_{e=1}^{E} h_e^{2(\sigma_e - 1)} |u_e|^2_{\sigma_e, \Omega_e}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple 3 (dim = 2). Pour $e = 1, \ldots, E$, soit $\mathcal{A}_e$ l'ensemble des indices des arêtes de la frontière Γ_e tel que $\Gamma_e = \bigcup_{d \in \mathcal{A}_e} \Gamma_{ed}$. On considère les espaces définis comme suit. Pour $d \in \mathcal{A}_e$

si $k_e = 1$

$$\Lambda_{h_e}^d = \{\mu_{h_e}^d \in C^0(\overline{\Gamma}_{ed})\,;\, \forall S \in \partial\mathcal{T}_{h_e}^{ed},\ \mu_{h_e}^d \in P_1(S) \text{ si } \overline{S} \cap \partial\Gamma_{ed} = \Phi\,,\ \mu_{h_e}^d \in P_0(S) \text{ sinon}\}\,, \tag{5.10}$$

si $k_e \geqslant 2$

$$\Lambda_{h_e}^d = \{\mu_{h_e}^d \in C^0(\overline{\Gamma}_{ed})\,;\, \forall S \in \mathcal{T}_{h_e}^{ed}, \mu_{h_e}^d \in P_{k_e - 1}(S)\} \tag{5.11}$$

et

$$\Lambda_{h_e} = \{\mu_{h_e} \in L^2(\Gamma_e)\,;\quad \forall d \in \mathcal{A}_e,\quad \mu_{h_e|\Gamma_{ed}} \in \Lambda_{h_e}^d\}\,. \tag{5.12}$$

On pose :

$$W_h = V_h \times \Phi_{h_\Sigma}\,,\quad M_h = \Lambda_h\,.$$

Les couples d'espaces (V_{h_e}, Λ_{h_e}) ainsi définis sont compatibles au sens où les conditions locales (4.8) sont vérifiées [9]. Par suite, si $u_e = u_{|\Omega_e} = H^{\sigma_e}(\Omega_e)$ avec $1 < \sigma_e \leqslant k_e + 1$, alors on a :

$$[[\dot{u} - \dot{u}_h]]_{1,\Omega} + [[\dot{\lambda} - \dot{\lambda}_h]]_{-\frac{1}{2},\Sigma} \leqslant C\left(\sum_{e=1}^{E} h_e^{2(\sigma_e - 1)} |u_e|^2_{\sigma_e,\Omega_e}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.13}$$

Exemple 4 (dim = 2). Une variante de l'exemple précédent consiste à introduire les espaces définis par :
Pour $d \in \mathcal{A}_e$

$$\Lambda_{h_e}^d = \{\mu_{h_e}^d \in C^0(\overline{\Gamma}_{ed})\,;\, \forall S \in \partial\mathcal{T}_{h_e}^{ed},\ \mu_{h_e}^d \in P_{k_e}(S) \text{ si } \overline{S} \cap \partial\Gamma_{ed} = \Phi\,,\ \mu_{h_e}^d \in P_{k_e - 1}(S) \text{ sinon}\}\,, \tag{5.14}$$

et

$$\Lambda_{h_e} = \{\mu_{h_e} \in L^2(\Gamma_e)\,;\quad \forall d \in \mathcal{A}_e,\quad \mu_{h_e|\Gamma_{ed}} \in \Lambda_{h_e}^d\}\,.$$

Les couples d'espaces (V_{h_e}, Λ_{h_e}) ainsi définis restent encore compatibles au sens où les conditions locales (4.8) sont vérifiées. Par suite, si on pose

$$W_h = V_h \times \Phi_{h_\Sigma},\quad M_h = \Lambda_h\,,$$

alors, si $u_e = u_{|\Omega_e} \in H^{\sigma_e}(\Omega_e)$, avec $1 < \sigma_e \leqslant k_e + 1$, on a :

$$(5.16)\quad [[\dot{u} - \dot{u}_h]]_{1,\Omega} + [[\dot{\lambda} - \dot{\lambda}_h]]_{-\frac{1}{2},\Sigma} \leqslant C\left(\sum_{e=1}^{E} h_e^{2(\sigma_e - 1)} |u_e|^2_{\sigma_e,\Omega_e}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 5.2 : Cet exemple est fondamentalement différent de la méthode des éléments avec joints (et ses variantes) introduite dans [5] ; on trouvera une analyse détaillée de cette méthode et de ses variantes dans [4]. En effet, la méthode des éléments avec joints est équivalente à une méthode hybride primale classique, utilisant un multiplicateur de Lagrange par interface pour exprimer le raccord. L'espace joint n'y est introduit que pour l'analyse de la méthode non conforme obtenue après simplification des multiplicateurs de Lagrange.

ANNEXE

Dans cette annexe, nous allons proposer et analyser un nouveau choix des espaces de discrétisation de la méthode hybride primale ([3], [10]). Les espaces que nous proposons sont compatibles, au sens où la condition de Babuska-Brezzi est vérifiée uniformément par rapport aux paramètres de discrétisation.

On considère le problème modèle :

$$(\text{A1})\qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega = \Gamma\,; \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de R^2 et $f \in L^2(\Omega)$. La dualisation de la contrainte $u = 0$ conduit à la formulation hybride primale :

$$(\text{A2})\qquad \begin{cases} (u, \lambda) \in H^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\,, \\ \forall v \in H^1(\Omega),\ \displaystyle\int_\Omega \mathbf{grad}\, u \,.\, \mathbf{grad}\, v\, dx - \langle \lambda, v \rangle_\Gamma = \int_\Omega fv\, dx\,, \\ v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),\ \langle \mu, u \rangle_\Gamma = 0\,. \end{cases}$$

Soit h un paramètre réel destiné à tendre vers zéro ; on lui associe une triangulation $\mathcal{T}_h$ de Ω en triangles. La famille de triangulations $\{\mathcal{T}_h\}$ est supposée régulière ; elle est de plus supposée uniformément régulière au voisinage de Γ. On notera par $\mathcal{S}_h$ la subdivision induite par la triangulation

$\mathcal{T}_h$ sur la frontière Γ et par N le nombre de nœuds situés sur la frontière Γ. Enfin on introduit une numérotation des nœuds situés sur la frontière : $x_1, x_2, ..., x_N$, de telle façon que le nœud x_i soit situé entre les nœuds x_{i-1} et x_{i+1}, avec $x_0 = x_N$ et $x_{N+1} = x_1$.

Pour d, $1 \leqslant d \leqslant N$, on considère les arcs S_d définis par :

$$S_d = [x_{d-1/2}, x_d] \cup [x_d, x_{d+1/2}] , \tag{A3}$$

où $x_{i+1/2}$ désigne le point milieu du segment $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i = 0, ..., N$.

On choisit pour espaces de dimension finie :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) ; \forall T \in \mathcal{T}_h, v_{h|T} \in P_1(T)\} \tag{A4}$$

et

$$\Lambda_h = \{\mu_h \in L^2(\Gamma) ; \forall d = 1, ..., N, \mu_{h|S_d} \in P_0(S_d)\} . \tag{A5}$$

On considère le problème discret suivant :

$$\begin{cases} (u_h, \lambda_h) \in V_h \times \Lambda_h , \\ \forall v_h \in V_h, \displaystyle\int_\Omega \mathbf{grad}\, u_h \cdot \mathbf{grad}\, v_h \, dx - \int_\Gamma \lambda_h v_h \, d\sigma = \int_\Omega f v \, dx , \\ \forall \mu \in \Lambda_h, \quad \displaystyle\int_\Gamma \mu_h u_h \, d\sigma = 0 . \end{cases} \tag{A6}$$

Notre analyse du problème (A6) fera appel à la version suivante du critère de Pitkäranta [9],

LEMME A1 : *Soit $(\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ une base de Λ_h. Si pour tout $\mu_h = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu_i$ dans Λ_h, il existe $v_h \in V_h$ tel que :*

$$C_1 h \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \leqslant \int_\Gamma \mu_h v_h \, d\sigma \leqslant C_2 h \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \tag{A7}$$

et

$$\left(\|v_h\|_{1,\Omega}^2 + \frac{1}{h} \|v_h\|_{0,\Gamma}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_3 \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 , \tag{A8}$$

alors on a :

$$\text{(A9)} \qquad \inf_{\substack{\mu_h \in \Lambda_h \\ \mu_h \neq 0}} \sup_{v_h \in V_h} \frac{\int_\Gamma \mu_h v_h \, d\sigma}{(h \| v_h \|^2_{1,\Omega} + \| v_h \|^2_{0,\Gamma})^{\frac{1}{2}} \| \mu_h \|_{0,\Gamma}} \geqslant C .$$

THÉORÈME A1 : *Les espaces* V_h *et* Λ_h *définis respectivement par* (A4) *et* (A5) *vérifient la condition de Babuska-Brezzi :*

$$\text{(A10)} \qquad \inf_{\substack{\mu_h \in \Lambda_h \\ \mu_h \neq 0}} \sup_{v_h \in V_h} \frac{\int_\Gamma \mu_h v_h \, d\sigma}{(h \| v_h \|^2_{1,\Omega} + \| v_h \|^2_{0,\Gamma})^{\frac{1}{2}} \| \mu_h \|_{0,\Gamma}} \geqslant C .$$

Démonstration : En vertu du Lemme A1, il suffit de construire, pour tout élément μ_h de Λ_h un élément v_h de V_h vérifiant les conditions (A7)-(A8).

Soit $\mu_h = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu_i$, où μ_i désigne la fonction caractéristique de l'arc S_i. A cet élément μ_h, on associe l'élément v_h de V_h, nul en tout nœud intérieur et tel que :

$$v_h(M_i) = \mu_h(M_i) = \alpha_i, \text{ en tout noeud frontière } M_i \in \Gamma .$$

Considérons un triangle T de $\mathcal{T}_h$, tel que Mes $(\partial T \cap \Gamma) \neq 0$. Par des calculs élémentaires, on a :

$$\int_{\partial T \cap \Gamma} \mu_h v_h \, d\sigma = \frac{h_{i+1/2}}{2} (\alpha_i^2 + \alpha_{i+1}^2) + \frac{h_{i+1/2}}{4} (\alpha_i + \alpha_{i+1})^2 + \\ + \frac{h_{i-1/2}}{2} (\alpha_i^2 + \alpha_{i-1}^2) + \frac{h_{i-1/2}}{4} (\alpha_i + \alpha_{i-1})^2$$

où on a posé $h_{i+1/2} = \text{dist}\,(M_i, M_{i+1})$.

La triangulation étant uniformément régulière au voisinage de Γ, il vient :

$$\text{(A11)} \qquad C_1 h \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \leqslant \int_\Gamma \mu_h v_h \, d\sigma \leqslant C_2 h \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 .$$

De plus, il est facile de vérifier que :

$$\text{(A12)} \qquad \left(\| v_h \|^2_{1,\Omega} + \frac{1}{h} \| v_h \|^2_{0,\Gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_3 \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 .$$

En appliquant le Lemme A1, on obtient le résultat annoncé en (A10).

Des majorations d'erreurs abstraites des problèmes avec multiplicateurs de Lagrange ([6], [11]) et des résultats d'approximations dans les espaces de Sobolev, on déduit :

THÉORÈME A2 : *Si la solution* (u, λ) *du problème* (A1) *est telle que* $u \in H^{\sigma}(\Omega)$ *avec* $1 < \sigma < 2$; *et si* (u_h, λ_h) *est la solution du problème discret* (A6), *alors on a sous les hypothèses précédentes de régularité de la triangulation :*

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} + \|\lambda - \lambda_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} \leq \mathrm{C}h^{\sigma - 1}\|u\|_{\sigma,\Omega} .$$

RÉFÉRENCES

[1] D. A. ADAMS, 1975, *Sobolev Spaces,* Academic Press, New York.

[2] A. AGOUZAL, 1993, Analyse numérique de méthodes de décomposition de domaines ; Méthodes de domaine fictifs avec multiplicateurs de Lagrange, Thèse, Université de Pau.

[3] I. BABUSKA, 1973, The Finite Element Method with Lagrangian Multipliers, *Numer. Math.* **20,** 179-192.

[4] F. BEN BELGACEM, 1993, Discrétisations 3D non conformes par la méthode de décomposition de domaine des éléments avec joints : Analyse mathématique et mise en œuvre pour le problème de Poisson, Thèse, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6).

[5] C. BERNARDI, Y. MADAY, A. PATERA, 1990, A New Nonconforming Approach to Domaine Decomposition : The Mortar Element Method, *Séminaire du Collège de France* (H. Brezis, J. L. Lions, eds.), Pitman.

[6] F. BREZZI, M. FORTIN, 1991, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods,* Springer Verlag, New York.

[7] F. BREZZI, L. D. MARINI, 1994, A Three Field Domain Decomposition Method, *Contemporary Mathematics* (A. Quarteroni, J. Periaux, Y. A. Kuznetsov, O. B. Widlund, eds.), vol. 157, pp. 27-34.

[8] J. PITKÄRANTA, 1979, Boundary Subspaces for the Finite Element Method with Lagrange Multipliers, *Numer. Math.,* **33,** pp. 273-289.

[9] J. PITKÄRANTA, 1981, The Finite Element Method Lagrange Multipliers for Domains with Corners, *Math. Comp.,* **37,** pp. 13-30.

[10] P. A. RAVIART, J.-M. THOMAS, 1977, Primal Hybrid Finite Elements Methods for 2nd Elliptic Equations, *Math. Comp.,* **31,** pp. 391-413.

[11] J. E. ROBERTS, J.-M. THOMAS, 1991, Mixed and Hybrid Methods, in *Handbook of Numerical Analysis,* Vol. II, Finite Element Methods (Part 1) (P. G. Ciarlet and J. L. Lions, eds.), North-Holland, Amsterdam, pp. 523-639.

[12] J.-M. THOMAS, 1992, Finite Element Matching Methods, in *Fifth International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations* (D. Keys, T. Chan, G. Meurant, J. Scroggs, R. Voigt, eds.), SIAM, Philadelphia, pp. 99-105.