RAIRO
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE
ET ANALYSE NUMÉRIQUE

R. ARCANGÉLI
R. MANZANILLA
J. J. TORRENS

Approximation spline de surfaces de type explicite comportant des failles

RAIRO – Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 31, nº 5 (1997), p. 643-676.

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1997__31_5_643_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODELISATION MATHEMATIQUE ET ANALYSE NUMERIQUE

(Vol 31, n° 5, 1997, p 643 à 676)

APPROXIMATION SPLINE DE SURFACES DE TYPE EXPLICITE COMPORTANT DES FAILLES (*)

R. ARCANGÉLI (1), R. MANZANILLA (2) et J. J TORRENS (3)

Résumé — *On considère le problème de l'approximation de fonctions « non régulières », i e de fonctions qui présentent des discontinuités ou dont certaines dérivées présentent des discontinuités sur un certain sous ensemble F d'un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$, et qui appartiennent à l'espace de Sobolev $H^m(\Omega\backslash\bar{F})$ pour un entier $m > n/2$ Il s'agit de construire, à partir de données de Lagrange ou d'Hermite du 1^er^ ordre d'une fonction non régulière f, un approximant de f de classe C^k sur $\Omega\backslash\bar{F}$, avec $k = 1$ ou 2 L'exemple type de cette situation est la modélisation des surfaces géologiques (cf J Springer [24])*

La réponse apportée au problème de l'approximation de fonctions non régulières est obtenue en adaptant la théorie des D^m splines sur un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ On définit d'abord les D^m-splines sur $\Omega' = \Omega\backslash\bar{F}$, puis, introduisant un espace d'éléments finis convenable, les « D^m splines discrètes sur Ω' » ce sont ces fonctions que l'on propose pour l'approximation de fonctions non régulières On étudie enfin la convergence des D^m splines d'ajustement discrètes sur Ω' et on donne des résultats numériques

Abstract — *We consider the problem of approximation of « non regular » functions, i e functions which are discontinuous or which have some discontinuous derivatives on a subset F of an open, bounded set Ω in $\mathbb{R}^n$, and that belong to the Sobolev space $H^m(\Omega\backslash\bar{F})$ for some integer $m > n/2$ The question is to construct, from Lagrange of 1^st^ order Hermite data of a non regular function f, an approximant of f of class C^k on $\Omega\backslash\bar{F}$, with $k = 1$ or 2 The standard example of this situation is the modelling of geological surfaces (cf J Springer [24])*

The answer we provide to the problem of approximation of non regular functions is obtained by adapting the theory of D^m splines over a bounded open set in $\mathbb{R}^n$ We first define the D^m splines over $\Omega' = \Omega\backslash\bar{F}$ and then, introducing a suitable finite element space, the « discrete D^m-splines over Ω' » these are the functions we propose for the approximation of non regular functions Finally, we study the convergence of the discrete smoothing D^m-splines over Ω' and we give some numerical results

Subject Classifications AMS(MOS) 41A15, 65D07 65D17

(*) Manuscrit reçu le 22 mai 1996

(1) 5, Place de Tholosie, 31750 Escalquens France

(2) INTEVEP S A , Gerencia General de Exploración y Producción, Apartado 76343, Caracas 1070-A, Venezuela

(3) Departamento de Matemática e Informática, Universidad Pública de Navarra, Campus de Arrosadía s/n, 31006 Pamplona, Espagne

1. INTRODUCTION

Dans certains domaines des mathématiques appliquées, on a besoin d'approcher des fonctions « non régulières », au sens de la définition suivante : soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$; s'il existe un sous-ensemble non vide F de Ω et un entier $m > \frac{n}{2}$ tels que (la restriction à $\Omega \backslash \bar{F}$ de) f appartienne à l'espace de Sobolev $H^m(\Omega \backslash \bar{F})$ mais que f n'appartienne pas à $H^m(\Omega)$, alors on dit que f est *non régulière d'ordre m sur* Ω. Il s'agit le plus souvent de fonctions qui présentent des discontinuités ou dont certaines dérivées présentent des discontinuités. On désire construire, à partir de données de Lagrange ou d'Hermite d'ordre 1 de f, un approximant de f sur Ω de classe C^k sur $\Omega' = \Omega \backslash \bar{F}$, avec $k = 1$ ou 2. L'ensemble F, que nous appellerons « ensemble de discontinuité de f », est supposé connu. Lorsque cet ensemble est inconnu, on est confronté à des difficultés supplémentaires (*cf.*, par exemple, D. Girard et P. J. Laurent [12], M. C. Parra, M. C. López de Silanes et J. J. Torrens [20]). Bien entendu, l'ensemble F ne peut être quelconque : la définition de F est précisée au paragraphe 3.

On modélise ainsi le problème de la *représentation des failles* en géophysique, qu'il s'agisse de failles verticales, qui correspondent à des discontinuités de la fonction f, ou de failles obliques directes qui correspondent à des discontinuités de dérivées partielles du premier ordre de f. C'est de là que vient la terminologie « d'approximation de surfaces de type explicite comportant des failles ». Les données sont généralement des données de position (points de la surface) et des données d'orientation (deux angles, l'*azimut* et le *pendage*), donc des données d'Hermite d'ordre 1. Le cas des failles inverses, i.e. avec surplomb, n'est pas envisagé ici : on peut le modéliser comme un problème de surfaces paramétrées et se ramener à l'approximation de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ (*cf.* D. Apprato [2], J. J. Torrens [26, 27]). Le problème de la représentation des failles en géophysique s'explicite en termes de fonctions de 2 variables et on montre au paragraphe 3 qu'il suffit de considérer des fonctions f appartenant à $H^2(\Omega')$ ou à $H^2(\Omega') \cap C^0(\bar{\Omega})$ pour traiter le cas de failles verticales ou obliques. Nous préférons cependant étudier le problème général (fonctions de n variables présentant des discontinuités de dérivées d'ordre $< \min\left\{m, m - \frac{n}{2} + 1\right\}$, pour pouvoir traiter le cas des courbes ou celui des fonctions de 3 variables, comme par exemple la porosité d'un champ pétrolifère. La même modélisation peut être utilisée dans les problèmes de fractures ou de fissures de matériaux.

L'approximation numérique des fonctions présentant des discontinuités a été peu étudiée ; citons cependant : R. Franke et G. M. Nielson [11], P. J. Laurent [14], R. Manzanilla [17], P. Klein [13], C. Serres [23], E. Arge et M. Floater [6], J. Springer [24]. Les méthodes usuelles d'approximation (polynômes, splines classiques) ont vis-à-vis de la fonction approchée f un effet régularisant qui tend à gommer les discontinuités de f ou de ses dérivées, alors que ce sont précisément ces discontinuités que l'on veut reproduire. Dans [13] et [14] la construction des discontinuités est obtenue en incorporant à l'espace d'approximation des fonctions qui prennent en compte les discontinuités, mais la méthode n'est pas facile à mettre en œuvre en dimension $n > 1$. Enfin les méthodes d'éléments finis (d'Hermite nécessairement, puisque l'on veut réaliser une approximation de classe C^1 ou C^2) qui, en raison de leur caractère local, permettent de construire des fonctions discontinues, ne peuvent être utilisées directement pour interpoler des fonctions dont on ne connaît qu'un ensemble incomplet de données de Lagrange ou d'Hermite. Par contre, si l'on dispose par exemple, en tout point a d'un ensemble A, des données $f(a)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$, on peut interpoler f en utilisant l'élément fini réduit de Hsieh-Clough-Tocher (*cf.* P. G. Ciarlet [9]) ou l'élément fini de Powell-Sabin (*cf.* M. J. D. Powell et M. A. Sabin [21]). Mais il subsiste d'autres difficultés, liées notamment au nombre et à la géométrie des points de données, de sorte que l'utilisation directe des méthodes d'éléments finis reste exceptionnelle ou académique.

Dans ce travail, nous donnons une réponse au problème de l'approximation de fonctions non régulières en adaptant la théorie des D^m-splines sur un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ (*cf.* M. Attéia [7], R. Arcangéli [3, 4]). Après quelques rappels au paragraphe 2, nous définissons au paragraphe 3 l'ensemble de discontinuité F ainsi que les espaces de fonctions sur Ω' que nous utilisons dans la suite. Au paragraphe 4, nous introduisons les « D^m-splines sur Ω' », qui sont des D^m-splines dont la définition intègre la nature particulière de l'ouvert Ω'. Au paragraphe 5, nous définissons les « D^m-splines discrètes sur Ω' », qui constituent les outils que nous proposons pour l'approximation numérique des fonctions non régulières introduites au paragraphe 3 (pour simplifier l'exposé nous nous limitons au cas des fonctions présentant des discontinuités). Enfin au paragraphe 6, nous montrons la convergence des D^m-splines d'ajustement discrètes sur Ω' et, au paragraphe 7, nous donnons plusieurs résultats numériques.

2. NOTATIONS

Soit $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien de dimension n. On désigne par $B(x, \delta)$ (resp. $(\bar{B}(x, \delta))$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $\delta > 0$. Pour tout $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, on note $\bar{\mathcal{O}}$, $\partial \mathcal{O}$, $\mathring{\mathcal{O}}$ et card $\mathcal{O}$, respectivement, l'adhérence, la frontière, l'intérieur et le cardinal de $\mathcal{O}$. D'autre part, on désigne par $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Tous les espaces fonctionnels considérés sont réels.

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, on désigne par $H^l(\Omega)$ l'espace de Sobolev d'ordre l usuel, muni de la norme

$$\| v \|_{l, \Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant l} \int_\Omega |\partial^\alpha v(x)|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ et

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

On utilisera aussi les semi-produits scalaires

$$\forall j = 0, \dots, l, \quad (u, v)_{j, \Omega} = \sum_{|\alpha| = j} \int_\Omega \partial^\alpha u(x) \, \partial^\alpha v(x) \, dx,$$

et les semi-normes associées

$$\forall j = 0, \dots, l, \quad |v|_{j, \Omega} = (v, v)_{j, \Omega}^{1/2}.$$

Soit Ω un ouvert non vide borné de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\mu \in \mathbb{N}$, on désigne par $C^\mu(\bar{\Omega})$ l'espace de Banach des fonctions bornées et uniformément continues sur Ω, ainsi que toutes leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre μ. On muni cet espace de la norme

$$\| v \|_{C^\mu(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leqslant \mu} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha v(x)|.$$

Si $v \in C^\mu(\bar{\Omega})$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $0 \leqslant |\alpha| \leqslant \mu$, on identifiera $\partial^\alpha v$ à son prolongement continu sur $\bar{\Omega}$.

On dira qu'un ouvert non vide borné Ω de $\mathbb{R}^n$ est *à frontière lipschitzienne* si chaque composante connexe de Ω et à frontière lipschitzienne au sens de J. Nečas [19].

D'après le théorème de Rellich-Kondrašov (*cf.*, par exemple, R. A. Adams [1]), on sait que, lorsque Ω est borné et a la propriété du cône :

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, \forall l' \in \mathbb{N}, l > l', H^l(\Omega) \subset^c H^{l'}(\Omega), \tag{2.1}$$

où $\subset^c$ désigne l'injection compacte, et que, lorsque Ω est à frontière lipschitzienne :

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, \forall \mu \in \mathbb{N}, l > \frac{n}{2} + \mu, H^l(\Omega) \subset^c C^\mu(\bar{\Omega}). \tag{2.2}$$

Pour tout $l \in \mathbb{N}$, on désigne par $P_l = P_l(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des (fonctions) polynômes sur $\mathbb{R}^n$ de degré $\leqslant l$ par rapport à l'ensemble des variables et, pour tout $l \in \mathbb{N}$ et pour tout ouvert connexe non vide Ω de $\mathbb{R}^n$, par $P_l(\Omega)$ l'espace vectoriel des restrictions à Ω des fonctions de P_l. Pour la définition d'ensemble de points ou de formes linéaires $P_l(\Omega)$-unisolvant on renvoie à P. G. Ciarlet [9]. Enfin, la même lettre C désignera diverses constantes strictement positives.

3. ESPACES DE FONCTIONS SUR Ω'

3.1. Définition de l'ensemble de discontinuité F

On suppose donnés un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, non vide, borné, connexe, à frontière lipschitzienne, et un sous-ensemble non vide F de $\bar{\Omega}$ tels qu'il existe une famille finie $\{R_1, \ldots, R_I\}$ de sous-ensembles ouverts de Ω, connexes et à frontière lipschitzienne, vérifiant les conditions :

$$\left|\begin{array}{ll} (\mathrm{i}) & \forall i, j = 1, \ldots, I,\ i \neq j,\ R_i \cap R_j = \emptyset\ ; \\ (\mathrm{ii}) & \bigcup_{i=1}^{I} \bar{R}_i = \bar{\Omega}\ ; \\ (\mathrm{iii}) & F \text{ est inclus dans } \partial R, \text{ où } R = \bigcup_{i=1}^{I} R_i\ ; \\ (\mathrm{iv}) & F \text{ est inclus dans l'intérieur dans } \partial R \text{ (muni de la topologie} \\ & \text{induite par } \mathbb{R}^n) \text{ de } F \cup \partial\Omega\ ; \\ (\mathrm{v}) & \text{l'intérieur dans } \partial R \text{ de } \bar{F} \cap \Omega \text{ est inclus dans } F\ ; \\ (\mathrm{vi}) & \bar{F} \cap \partial\Omega \text{ est inclus dans } F. \end{array}\right. \tag{3.1}$$

On dira alors que *la famille* $\{R_1, \ldots, R_I\}$ *représente* F *dans* Ω et on posera :

$$\Omega' = \Omega \backslash \bar{F}$$

(voir la *figure* 1).

La définition précédente généralise la définition primitivement introduite dans [17] et correspond, à peu de chose près, à la définition proposée par J. J. Torrens [26, 27]. Elle permet de modéliser des ensembles de discontinuité assez généraux, tels que ceux qui peuvent intervenir en géophysique dans la représentation des failles : ensembles non connexes, avec des composantes connexes ramifiées ou touchant le bord de Ω. Les conditions (iv), (v) et (vi)

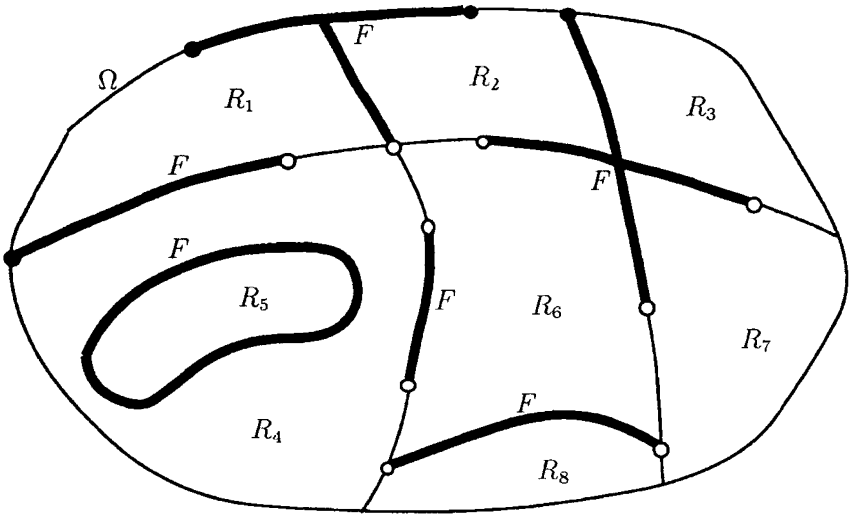


Figure 1. — Exemple de famille $\{R_1, ..., R_I\}$, où $I = 8$, représentant l'ensemble de discontinuité F dans l'ouvert Ω (les points marqués d'un cercle blanc n'appartiennent pas à F).

ne sont pas à proprement parler indispensables, mais elles permettent de simplifier l'étude des espaces de fonctions sur Ω' définis au paragraphe suivant et d'introduire des conditions d'interpolation multilatérales sur F (*cf.* paragraphe 4).

3.2. Espaces $C^k_F(\Omega')$, $H^m(\Omega')$ et $H^m(\Omega') \cap C^r(\bar{\Omega})$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $C^k_F(\Omega')$ l'espace défini par :

$$C^k_F(\Omega') = \{v \in C^k(\Omega') \mid \forall i = 1, ..., I, v|_{R_i} \in C^k(\bar{R}_i)\}, \tag{3.2}$$

où $C^k(\Omega')$ désigne l'espace des fonctions continues sur Ω', ainsi que toutes leur dérivées partielles jusqu'à l'ordre k.

Pour tout $v \in C^k_F(\Omega')$ et tout $i = 1, ..., I$, on pose : $v_i = v|_{R_i}$.

THÉORÈME 3.1 : *L'espace $C^k_F(\Omega')$ est un espace de Banach pour la norme*

$$\|v\|_{C^k_F(\Omega')} = \max_{1 \leq i \leq I} \|v_i\|_{C_k(R_i)}. \tag{3.3}$$

De plus, l'espace $C^k_F(\Omega')$ et la norme (3.3) *sont indépendants du choix de la famille $\{R_1, ..., R_I\}$ qui représente F dans Ω.*

Démonstration : Le résultat est évident lorsque $F = \partial R$. Supposons donc que $F \neq \partial R$.

1) Soit $(v^{(l)})$ une suite de Cauchy dans $C^k_F(\Omega')$. Pour tout $l \in \mathbb{N}$ et tout $i = 1, \ldots, I$, posons : $v^{(l)}_i = v^{(l)}|_{R_i}$. Il est clair que, par définition de la norme (3.3), chaque suite $(v^{(l)}_i)$ admet une limite $w_i \in C^k(\bar{R}_i)$. Montrons qu'il existe une fonction $v \in C^k(\Omega')$ telle que, pour tout $i = 1, \ldots, I$, $v_i = w_i$. Tout point de Ω' appartient à R ou à ∂R : si $x \in R_j$, $1 \leqslant j \leqslant I$, on pose : $v(x) = w_j(x)$; si $x \in \partial R$, alors pour tous j_1, $j_2 = 1, \ldots, I$, $j_1 \neq j_2$, tels que $x \in \partial R_{j_1} \cap \partial R_{j_2}$, on a pour tout l : $v^{(l)}_{j_1}(x) = v^{(l)}_{j_2}(x)$, d'où $w_{j_1}(x) = w_{j_2}(x)$ et on prend pour $v(x)$ la valeur commune.

2) Soient $v \in C^k_F(\Omega')$ et $\{O_1, \ldots, O_{\tilde{I}}\}$ une autre famille représentant F dans Ω. Pour tous $i = 1, \ldots, \tilde{I}$ et $j = 1, \ldots, I$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant k$, la fonction $\partial^\alpha v$ est continue sur $\bar{O}_i \cap \bar{R}_j$. Pour tous $i = 1, \ldots, \tilde{I}$, j_1, $j_2 = 1, \ldots, I$, $j_1 \neq j_2$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant k$, et pour tout $x \in O_i \cap \partial R_{j_1} \cap \partial R_{j_2}$, on a évidemment : $\partial^\alpha v_{j_1}(x) = \partial^\alpha v_{j_2}(x) = \partial^\alpha v(x)$. Par passage à la limite, on en déduit que cette relation reste valable pour tout $x \in \bar{O}_i \cap \bar{R}_{j_1} \cap \bar{R}_{j_2}$. Il en résulte que, pour tous $i = 1, \ldots, \tilde{I}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant k$, $\partial^\alpha v$ est continue sur $\cup_{j=1}^{I}(\bar{O}_i \cap \bar{R}_j) = \bar{O}_i$. On en conclut que $C^k_F(\Omega')$ est indépendant du choix de la famille qui représente F dans Ω.

3) Soient $\{R_1, \ldots, R_I\}$ et $\{O_1, \ldots, O_{\tilde{I}}\}$ deux familles représentant F dans Ω, $\|\cdot\|^R_{C^k_F(\Omega')}$ et $\|\cdot\|^O_{C^k_F(\Omega')}$ les normes (3.3) correspondantes. Pour tout $j = 1, \ldots, I$, tout point $x \in \bar{R}_j$ appartient à un ensemble $\bar{O}_i$. Par conséquent :

$$\forall v \in C^k_F(\Omega'), \forall j = 1, \ldots, I, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

$$|\alpha| \leqslant k, \forall x \in \bar{R}_j, |\partial^\alpha v(x)| \leqslant \|v\|^O_{C^k_F(\Omega')},$$

d'où :

$$\forall v \in C^k_F(\Omega'), \quad \|v\|^R_{C^k_F(\Omega')} \leqslant \|v\|^O_{C^k_F(\Omega')}.$$

On en déduit que la norme (3.3) est indépendante du choix de la famille qui représente F dans Ω. □

Remarque 3.1 : Pour tout $x \in F$, soit $I_x = \{i \in \{1, \ldots, I\} | x \in \partial R_i\}$. Il suit du point (iv) de (3.1) que, pour tout $x \in F$, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \cap R_i$, pour tout $i \in I_x$, soit une composante connexe de $\Omega \cap B(x, \delta) \setminus F$. On en déduit que, pour tout $v \in C^k_F(\Omega')$, il existe exactement card I_x valeurs limites de v au point x, à savoir, $v_i(x)$ pour tout $i \in I_x$.

De même, lorsque $F \neq \partial R$, il résulte de l'hypothèse (3.1) et du point 2 de la démonstration du théorème 3.1 que, pour tout $x \in \bar{\Omega} \setminus (\Omega' \cup F) = (\bar{F} \setminus F) \cup (\partial\Omega \setminus F)$, et pour tous i, $j = 1, \ldots, I$, $i \neq j$, tels que $x \in \partial R_i \cap \partial R_j$,

$$\forall v \in C^k_F(\Omega'), \quad v_i(x) = v_j(x).$$

On peut donc prolonger continûment toute fonction $v \in C_F^k(\Omega')$ en tout point $x \in \bar{\Omega} \backslash (\Omega' \cup F)$, de façon unique, en définissant

$$v(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega'}} v(y) .$$

Ces mêmes résultats sont aussi valables pour les dérivées d'ordre $\leqslant k$ des fonctions de $C_F^k(\Omega')$.

En somme, on peut considérer que les éléments de $C_F^k(\Omega')$ et leurs dérivées d'ordre $\leqslant k$ sont des fonctions définies et continues sur $\bar{\Omega} \backslash F$ qui présentent éventuellement des discontinuités de saut fini sur F. □

Pour tout $l \in \mathbb{N}$, on considère l'espace de Sobolev usuel $H^l(\Omega')$. Notons que cet espace est défini sur un ouvert qui n'est pas à frontière lipschitzienne, car non situé localement d'un même côté par rapport à sa frontière.

THÉORÈME 3.2 : *Pour tous m, $k \in \mathbb{N}$, $m > \frac{n}{2} + k$: $H^m(\Omega') \subset^c C_F^k(\Omega')$.*

Démonstration : Il est clair que $H^m(\Omega') \subset C^k(\Omega')$ car, pour tout $x \in \Omega'$, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset \Omega'$ et, d'après (2.2) : $H^m(B(x, \delta)) \hookrightarrow C^k(\bar{B}(x, \delta))$, où $\hookrightarrow$ désigne l'injection continue. Or les ouverts R_i, $i = 1, ..., I$, étant à frontière lipschitzienne, on a de même :

$$\forall i = 1, ..., I, \quad H^m(R_i) \subset^c C^k(\bar{R}_i) . \tag{3.4}$$

Donc $H^m(\Omega') \hookrightarrow C_F^k(\Omega')$. La démonstration s'achève en remarquant que, d'après (3.4), toute suite faiblement convergente dans $H^m(\Omega')$ est fortement convergente dans $C^k(\bar{R}_i)$, pour $i = 1, ..., I$, et donc, compte tenu de (3.3), dans $C_F^k(\Omega')$. Notons que, d'après le théorème 3.1, la continuité de l'injection canonique ne dépend pas de la famille qui représente F dans Ω. □

THÉORÈME 3.3 : *Pour tous l, $l' \in \mathbb{N}$, $l > l'$: $H^l(\Omega') \subset^c H^{l'}(\Omega')$.*

Démonstration : Le résultat est un cas particulier de (2.1), car Ω' est un ouvert borné possédant la propriété du cône. □

THÉORÈME 3.4 : *Pour tous m, $r \in \mathbb{N}$, $m > \frac{n}{2} + r$, le sous-espace $H^m(\Omega') \cap C^r(\bar{\Omega})$ est fermé dans $H^m(\Omega')$.*

Démonstration : Soit $(u^{(l)})$ une suite d'éléments de $H^m(\Omega') \cap C^r(\bar{\Omega})$, de Cauchy dans $H^m(\Omega')$. La suite $(u^{(l)})$ converge vers un élément $u \in H^m(\Omega')$ qui, d'après le théorème 3.2, appartient aussi à $C_F^r(\Omega')$. Or $C^r(\bar{\Omega})$ est un sous-espace fermé de $C_F^r(\Omega')$, puisque

$$\forall v \in C^r(\bar{\Omega}), \quad \| v \|_{C^r(\bar{\Omega})} = \| v \|_{C_F^r(\Omega')} .$$

Donc $u \in C^r(\bar{\Omega})$ et le résultat suit. □

Remarque 3.2 : Lorsque $m > \frac{n}{2} + r$, l'espace $H^m(\Omega') \cap C^r(\bar{\Omega})$ est formé de fonctions qui peuvent admettre des discontinuités des dérivées d'ordre $r+1$. Pour $n \geqslant 2$, on a : $r+1 \leqslant m-1$, et les éléments de $H^m(\Omega') \cap C^r(\bar{\Omega})$ sont bien des fonctions non régulières au sens de la définition que nous avons adoptée. Par contre, pour $n = 1$, on peut avoir $r+1 = m$, mais dans ce cas : $H^m(\Omega') \cap C^{m-1}(\bar{\Omega}) = H^m(\Omega)$. C'est la raison pour laquelle nous nous intéressons, de façon générale, à l'approximation de fonctions présentant des discontinuités de dérivées d'ordre $< \min\left\{m, m - \frac{n}{2} + 1\right\}$. □

4. D^m-SPLINES SUR Ω'

Soient Ω, F, Ω' et R_i, pour $i = 1, ..., I$, comme dans le paragraphe 3.1. Soient A un sous-ensemble fini de points distincts de $\bar{\Omega}$ et Σ un ensemble de formes linéaires du type :

$$\phi : v \mapsto \partial^\alpha v(a) , \tag{4.1}$$

avec $a \in A \backslash F$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant 1$, ou du type :

$$\phi : v \mapsto \partial^\alpha (v|_{R_i})(a) , \tag{4.2}$$

avec $a \in A \cap \partial R_i \cap F$, $1 \leqslant i \leqslant I$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leqslant 1$. On suppose, bien évidemment, que tout point de A est associé à, au moins, une forme de Σ. De même, on note μ l'ordre maximal des dérivées intervenant dans la définition des éléments de Σ (donc $\mu = 0$ ou 1) et on suppose désormais que

$$m > \frac{n}{2} + \mu . \tag{4.3}$$

En vertu de la remarque 3.1, les éléments de Σ sont des formes linéaires sur $C^\mu_F(\Omega')$.

Remarque 4.1 : Tout point de $A \backslash F$ est un nœud correspondant à, au plus, $n+1$ formes de Σ, tandis que tout point a de $A \cap F$ peut être associé à, au plus, $n+1$ éléments de Σ pour chaque ouvert R_i tel que $a \in \partial R_i$. □

Notant $N = \operatorname{card} \Sigma$ et $\mathbb{R}^N$ l'espace euclidien de dimension N, dont la norme et le produit scalaire sont désignés par $\langle \, . \, \rangle_{\mathbb{R}^N}$ et $\langle \, . \, , . \, \rangle_{\mathbb{R}^N}$, on introduit (supposant Σ ordonné) l'opérateur linéaire continu $\rho : C^\mu_F(\Omega') \to \mathbb{R}^N$ donné par

$$\rho v = (\phi(v))_{\phi \in \Sigma} .$$

On supposera dans la suite que Σ contient un sous-ensemble $\tilde{P}_{m-1}(\Omega')$-unisolvant, i.e. que

$$\ker \rho \cap \tilde{P}_{m-1}(\Omega') = \{0\}\,, \tag{4.4}$$

où $\tilde{P}_{m-1}(\Omega')$ désigne l'espace des fonctions sur Ω' qui sont polynomiales de degré $\leqslant m-1$ par rapport à l'ensemble des variables sur chaque composante connexe de Ω'. On convient que, dans la suite, en formulant (4.4), on suppose implicitement que Σ est défini par (4.1) et (4.2) avec $|\alpha| \leqslant 1$ et $\mu = 0$ ou 1.

Il résulte de (4.3) et du théorème 3.2 que ρ est aussi un opérateur linéaire continu de $H^m(\Omega')$ dans $\mathbb{R}^N$. On peut donc considérer l'application $[\![\cdot]\!]_{m,\Omega'}$ définie sur $H^m(\Omega')$ par :

$$[\![v]\!]_{m,\Omega'} = (\langle \rho v \rangle_{\mathbb{R}^N}^2 + |v|_{m,\Omega'}^2)^{1/2}\,. \tag{4.5}$$

PROPOSITION 4.1 : *On suppose vérifiées les hypothèses* (4.3) *et* (4.4). *Alors, l'application* $[\![\cdot]\!]_{m,\Omega'}$ *est une norme sur* $H^m(\Omega')$, *associée au produit scalaire* $[\![\cdot, \cdot]\!]_{m,\Omega'}$ *donné par*

$$[\![u, v]\!]_{m,\Omega'} = \langle \rho u, \rho v \rangle_{\mathbb{R}^N} + (u, v)_{m,\Omega'}\,.$$

De plus, les normes $[\![\cdot]\!]_{m,\Omega'}$ *et* $\| \cdot \|_{m,\Omega'}$ *sont équivalentes sur* $H^m(\Omega')$.

Démonstration : Le fait que $[\![\cdot, \cdot]\!]_{m,\Omega'}$ et $[\![\cdot]\!]_{m,\Omega'}$ soient, respectivement, un produit scalaire sur $H^m(\Omega')$ et sa norme associée résulte de (4.4). Pour établir l'équivalence des normes, on raisonne par compacité, comme dans la démonstration du théorème 2.7.1 de J. Nečas [19], en utilisant le théorème 3.3. □

Passons à la définition des D^m-splines d'interpolation sur Ω'. Considérons le sous-espace vectoriel

$$K_0 = \{ v \in H^m(\Omega') \mid \rho v = 0 \}\,,$$

ainsi que, pour tout $\beta \in \mathbb{R}^N$, la variété linéaire affine

$$K = K_\beta = \{ v \in H^m(\Omega') \mid \rho v = \beta \}\,.$$

On appelle alors *D^m-spline d'interpolation sur Ω' relative à ρ et β* toute solution σ, s'il en existe, du problème : trouver σ solution de

$$\begin{cases} \sigma \in K, \\ \forall v \in K,\ |\sigma|_{m,\Omega'} \leqslant |v|_{m,\Omega'}\,. \end{cases} \tag{4.6}$$

THÉORÈME 4.2 : *On suppose vérifiées les hypothèses* (4.3) *et* (4.4). *Alors le problème* (4.6) *admet une solution unique* σ *caractérisée par*

$$\begin{cases} \sigma \in K, \\ \forall v \in K_0, (\sigma, v)_{m, \Omega'} = 0 . \end{cases} \tag{4.7}$$

Démonstration : 1) Montrons d'abord que K est non vide. Puisque A est fini, il existe $\delta > 0$ tel que :

(i) pour tout $a \in A$, $B(a, \delta) \cap A = \{a\}$

et

(ii) pour tous $i = 1, .., I$ et $a \in A \cap F \cap \partial R_i$, $B(a, \delta) \cap R_i$ est une composante connexe de $\Omega \cap B(a, \delta) \backslash F$ (*cf.* remarque 3.1).

Soit $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\left\{1 - \dfrac{1}{1 - \langle x \rangle_{\mathbb{R}^n}^2}\right\}, & \langle x \rangle_{\mathbb{R}^n} < 1 , \\ 0, & \langle x \rangle_{\mathbb{R}^n} \geqslant 1 , \end{cases}$$

où $\langle \, . \, \rangle_{\mathbb{R}^n}$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

On numérote $\phi_1, ..., \phi_N$ les éléments de Σ et on pose $\beta = (\beta_1, ..., \beta_N)$, suivant le même ordre. Pour tout $j = 1, ..., N$, si ϕ_j est du type (4.1), on définit la fonction φ_j par

$$\varphi_j(x) = (x - a)^{\alpha} \, \psi\left(\frac{x - a}{\delta}\right),$$

où $x = (x_1, ..., x_n)$, $a = (a_1, ..., a_n)$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ et $(x - a)^{\alpha} = (x_1 - a_1)^{\alpha_1} ... (x_n - a_n)^{\alpha_n}$ et où a et α sont associés à ϕ_j ; et si ϕ_j est du type (4.2), on définit φ_j comme

$$\varphi_j(x) = (x - a)^{\alpha} \, \psi\left(\frac{x - a}{\delta}\right) \mathbf{1}_{R_i}(x),$$

$\mathbf{1}_{R_i}$ étant la fonction caractéristique de R_i. Alors on voit aisément que la fonction

$$u_{\beta} = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \, \varphi_j \tag{4.8}$$

appartient à K.

2) Toute éventuelle solution de (4.6) est élément de norme $[\![\, . \,]\!]_{m, \Omega'}$ minimale de l'ensemble K, et réciproquement. Or K est convexe,

fermé dans $H^m(\Omega')$ (puisque ρ est continu) et non vide. Le problème (4.6) admet donc une solution unique σ, à savoir l'élément de norme $[\![\cdot]\!]_{m,\Omega'}$ minimale de K. On sait que cet élément est caractérisé par les relations

$$\begin{cases} \sigma \in K, \\ \forall v \in K, [\![-\sigma, v - \sigma]\!]_{m,\Omega'} \leqslant 0 . \end{cases}$$

On en déduit (4.7).

PROPOSITION 4.3 : *Il existe un et un seul couple* $(\sigma, \lambda) \in H^m(\Omega') \times \mathbb{R}^N$ *solution de*

$$\begin{cases} \sigma \in K, \\ \forall v \in H^m(\Omega'), (\sigma, v)_{m,\Omega'} = \langle \lambda, \rho v \rangle_{\mathbb{R}^N} , \end{cases} \tag{4.9}$$

et σ *n'est autre que la solution du problème* (4.6).

Démonstration : Si (σ, λ) est solution de (4.9), alors $\sigma \in K$ et : $\forall w \in K_0$, $(\sigma, w)_{m,\Omega'} = 0$, d'où σ est solution de (4.6) et σ est unique. Si alors (σ, λ') et (σ, λ'') sont deux solutions de (4.9), on obtient : $\forall v \in H^m(\Omega')$, $\langle \lambda' - \lambda'', \rho v \rangle_{\mathbb{R}^N} = 0$, ce qui implique $\lambda' = \lambda''$. Donc il existe au plus une solution de (4.9).

D'autre part, pour tout $v \in H^m(\Omega')$, la fonction $w = v - u_{\rho v}$, où $u_{\rho v}$ est la fonction introduite en (4.8) pour $\beta = \rho v$, appartient à K_0. Alors le couple (σ, λ), où σ est la solution de (4.6) et λ le vecteur de $\mathbb{R}^N$ de composantes $(\sigma, \varphi_j)_{m,\Omega'}$, $j = 1, \dots, N$ (avec φ_j défini comme dans la démonstration du théorème précédent), est d'après (4.7) solution de (4.9). D'où le résultat. □

Introduisons maintenant les D^m-splines d'ajustement sur Ω'. Pour tous $\varepsilon > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}^N$, on pose :

$$\forall v \in H^m(\Omega'), \quad J_\varepsilon(v) = \langle \rho v - \beta \rangle^2_{\mathbb{R}^N} + \varepsilon |v|^2_{m,\Omega'} . \tag{4.10}$$

On considère le problème de minimisation : trouver σ_ε tel que

$$\begin{cases} \sigma_\varepsilon \in H^m(\Omega'), \\ \forall v \in H^m(\Omega'), J_\varepsilon(\sigma_\varepsilon) \leqslant J_\varepsilon(v) . \end{cases} \tag{4.11}$$

Toute solution σ_ε de (4.11), s'il en existe, est appelée *D^m-spline d'ajustement sur Ω' relative à ρ, β et ε.*

THÉORÈME 4.4 : *On suppose vérifiées les hypothèses* (4.3) *et* (4.4). *Alors le problème* (4.11) *admet une solution unique* σ_ε *caractérisée par*

$$\begin{cases} \sigma_\varepsilon \in H^m(\Omega'), \\ \forall v \in H^m(\Omega'), \langle \rho\sigma_\varepsilon, \rho v \rangle_{\mathbb{R}^N} + \varepsilon(\sigma_\varepsilon, v)_{m,\Omega'} = \langle \beta, \rho v \rangle_{\mathbb{R}^N} . \end{cases} \tag{4.12}$$

Démonstration : Considérons l'espace $H^m(\Omega')$ muni de la norme $[\![\cdot]\!]_{m,\Omega'}$: d'après la proposition 4.1, c'est un espace de Hilbert. Étant donné que $\rho \in \mathscr{L}(H^m(\Omega') ; \mathbb{R}^N)$, l'application $(u, v) \mapsto \langle \rho u, \rho v \rangle_{\mathbb{R}^N} + \varepsilon(u, v)_{m,\Omega'}$ est une forme bilinéaire, symétrique, continue sur $H^m(\Omega') \times H^m(\Omega')$ puisque :

$$\forall u, v \in H^m(\Omega'), |\langle \rho u, \rho v \rangle_{\mathbb{R}^N} + \varepsilon(u, v)_{m,\Omega'}| \leqslant \max(1, \varepsilon) [\![u]\!]_{m,\Omega'} [\![v]\!]_{m,\Omega'} ,$$

et $H^m(\Omega')$-elliptique puisque :

$$\forall v \in H^m(\Omega'), \langle \rho v \rangle^2_{\mathbb{R}^N} + \varepsilon |v|^2_{m,\Omega'} \geqslant \min(1, \varepsilon) [\![v]\!]^2_{m,\Omega'} .$$

D'autre part, l'application $v \mapsto \langle \beta, \rho v \rangle_{\mathbb{R}^N}$ est linéaire continue sur $H^m(\Omega')$. Le lemme de Lax-Milgram montre alors que (4.11) et (4.12) admettent une même solution unique σ_ε. □

Remarque 4.2 : Raisonnant comme dans R. Arcangéli [3], on peut montrer que les D^m-splines d'interpolation ou d'ajustement sur Ω' relatives à ρ ap-

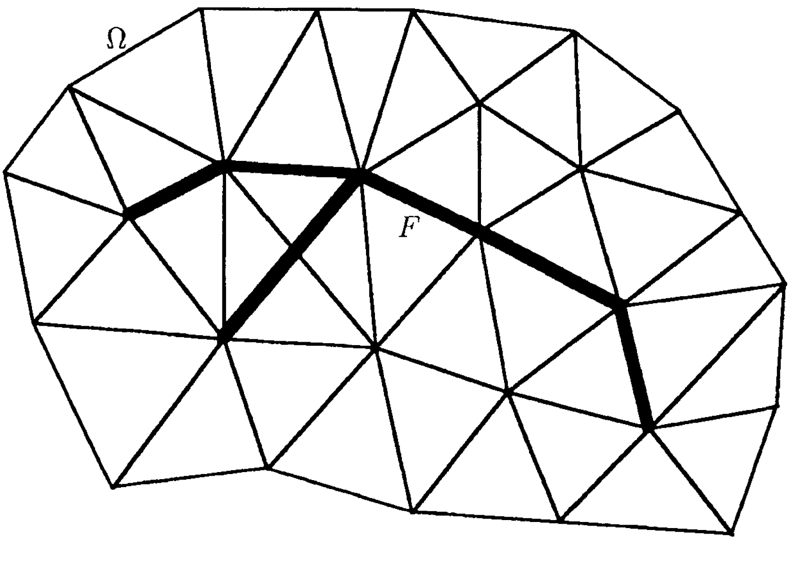


Figure 2. — Exemple de triangulation de l'ensemble $\bar{\Omega}$.

partiennent à l'espace $C^{2m-n-1-\mu}(\Omega')$, donc, en particulier, σ et σ_ε appartiennent à $C^1(\Omega')$ si $m = 2$, $n = 2$ et $\mu = 0$, et à $C^2(\Omega')$ si $m = 3$, $n = 2$ et $\mu = 1$. □

Remarque 4.3 : Si l'on suppose, dans ce paragraphe, que Σ est un ensemble de formes linéaires du type $\phi : v \mapsto v(a)$, avec $a \in \bar{\Omega}$, ou du type (4.1) ou (4.2) avec $|\alpha| = 1$, et que l'on remplace $H^m(\Omega')$ par l'espace $V = H^m(\Omega') \cap C^0(\bar{\Omega})$, alors, compte tenu du théorème 3.4, on définit de la même façon, la D^m-spline d'interpolation (resp. d'ajustement) dans V relative à ρ et β (resp. à ρ, β et ε). □

5. D^m-SPLINES DISCRÈTES

On suppose dorénavant que Ω est un sous-ensemble polyédrique de $\mathbb{R}^n$, que l'ensemble de discontinuité F est réunion finie de faces (fermées) de polyèdres de $\mathbb{R}^n$, que m est un entier positif quelconque et on désigne par k un entier égal à 1 ou 2. On pose $\Omega' = \Omega \backslash F$, on conserve les notations A, Σ, μ, N et ρ du paragraphe 4 et on suppose vérifiée l'hypothèse (4.4).

Soit H un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}_+^*$ admettant 0 pour point d'accumulation. Pour tout $h \in H$, on suppose donnés :

- une triangulation $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$ au moyen de n-simplexes K de diamètres $h_K \leqslant h$, d'intérieurs disjoints, telle que :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \mathring{K} \cap F = \phi \ ; \tag{5.1}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{toute face d'un } n - \text{simplexe } K \in \mathcal{T}_h \text{ est soit une face d'un autre} \\ n - \text{simplexe de } \mathcal{T}_h, \text{ soit une partie de } \partial\Omega, \text{ soit une partie de } F \end{array} \right. \tag{5.2}$$

(voir la *figure* 2) ;

- un espace V_h de type éléments finis construit sur $\mathcal{T}_h$ tel que

$$\left| \begin{array}{l} V_h \text{ est un sous-espace de dimension finie } M = M(h) \text{ de} \\ H^m(\Omega') \cap C_F^k(\Omega'). \end{array} \right. \tag{5.3}$$

Remarque 5.1 : Si k' désigne la classe de l'élément fini générique de l'espace V_h, l'hypothèse (5.3) implique que $k \leqslant k'$ et que $m \leqslant k' + 1$, afin d'obtenir, respectivement, les inclusions $V_h \subset C_F^k(\Omega')$ et $V_h \subset H^m(\Omega')$. Dans le cas des problèmes réels, pour des raisons de coût, on prend $k' = k$.

En particulier, pour le problème d'approximation de surfaces à partir de données de Lagrange ou d'Hermite d'ordre 1, on prend $k' = k = 1$ ou 2 et $m = 2$ ou 3 (car $n = 2$; *cf.* l'hypothèse (6.2) pour l'étude de la convergence). Lorsque $m = 2$, on peut utiliser des espaces V_h dont l'élément fini générique est

(i) l'élément fini de classe C^1 d'Argyris, de Bell, ou éventuellement de Hsieh-Clough-Tocher, de Hsieh-Clough-Tocher réduit ou de Powell-Sabin ;

(ii) l'élément fini de classe C^2 d'Argyris ou de Bell (*cf.* A. Ženíšek [28], A. Le Méhauté [15]), de Hsieh-Clough-Tocher ou de Powell-Sabin (*cf.* P. Sablonnière [22]).

Lorsque $m = 3$, on peut utiliser des espaces dont l'élément fini générique est de type (ii). □

Remarque 5.2 : Pour la construction des espaces V_h on peut suivre, par exemple, le procédé usuel dans la méthode des éléments finis, avec la modification ci-après : chaque nœud de la triangulation placé sur F est éventuellement « multiplié » en deux (ou plus) nouveaux nœuds, chacun d'eux attaché aux éléments situés d'un même « côté » de F. Ce procédé est détaillé dans [27], par exemple, pour des éléments rectangulaires. □

D'après (5.3) et puisque $\mu \leqslant k$, pour tout $h \in H$, on peut définir sur V_h l'application $[\![\cdot]\!]_{m, \Omega'}$ introduite en (4.5), laquelle, compte tenu de (4.4), est une norme sur V_h. Notons que V_h, muni de cette norme, est un espace de Hilbert, car V_h est de dimension finie.

Pour tous $\beta \in \mathbb{R}^N$ et $h \in H$, on définit l'espace vectoriel

$$K_{0h} = \{ v_h \in V_h | \ \rho v_h = 0 \} ,$$

et la variété linéaire affine

$$K_h = \{ v_h \in V_h | \ \rho v_h = \beta \} .$$

On considère alors le problème : trouver σ_h solution de

$$\begin{cases} \sigma_h \in K_h, \\ \forall v_h \in K_h, \ |\sigma_h|_{m, \Omega'} \leqslant |v_h|_{m, \Omega'}. \end{cases} \tag{5.4}$$

Toute solution σ_h de (5.4) est appelée *D^m-spline d'interpolation discrète dans V_h relative à ρ et β.*

THÉORÈME 5.1 : *On suppose vérifiées les hypothèses* (4.4) *et* (5.1)-(5.3). *On suppose de même que*

$$\forall h \in H, \quad \Sigma \subset \Sigma_h , \tag{5.5}$$

où Σ_h désigne l'ensemble des degrés de liberté de V_h. Alors, pour tout $h \in H$, le problème (5.4) *a une solution unique σ_h, caractérisée par*

$$\begin{cases} \sigma_h \in K_h, \\ \forall v_h \in K_{0h}, \ (\sigma_h, v_h)_{m, \Omega'} = 0 . \end{cases} \tag{5.6}$$

Démonstration : Montrons que K_h est non vide. En effet, soient $\phi_1, ..., \phi_N$ les éléments de Σ et désignons par $w_1, ..., w_M$ les fonctions de base de V_h, lesquelles, d'après (5.5), peuvent être numérotées de façon que : $\forall j = 1, ..., N, \ \ \phi_j(w_j) = 1$. Si $\beta = (\beta_1, ..., \beta_N)$, la fonction $v_h = \sum_{j=1}^{N} \beta_j w_j$ appartient à K_h.

On raisonne alors comme dans le point 2 de la démonstration du théorème 4.2 avec K_h et V_h au lieu de K et $H^m(\Omega')$.

Lorsque (4.3) est vérifiée, il est clair que (5.4) (respectivement (5.6)) constitue une discrétisation de (4.6) (resp. de (4.7)).

Remarque 5.3 : En utilisant les notations de la démonstration précédente, la solution σ_h de (5.4), sous l'hypothèse (5.5), s'exprime sous la forme

$$\sigma_h = \sum_{j=1}^{N} \beta_j w_j + \sum_{j=N+1}^{M} \alpha_j w_j ,$$

avec $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = N+1, ..., M$. D'après (5.6), les coefficients inconnus α_j sont donc solution du système linéaire :

$$\forall i = N+1, ..., M, \ \sum_{j=N+1}^{M} (w_j, w_i)_{m, \Omega'} \alpha_j = - \sum_{j=1}^{N} \beta_j (w_j, w_i)_{m, \Omega'} ,$$

car $\{w_{N+1}, ..., w_M\}$ est une base de K_{0h}. □

Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $\beta \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $h \in H$, on considère maintenant le problème : trouver $\sigma_{\varepsilon h}$ vérifiant

$$\begin{cases} \sigma_{\varepsilon h} \in V_h, \\ \forall v_h \in V_h, J_\varepsilon(\sigma_{\varepsilon h}) \leq J_\varepsilon(v_h) , \end{cases} \tag{5.7}$$

J_ε étant la fonctionnelle introduite en (4.10) (qui est, en fait, définie sur $H^m(\Omega') \cap C_F^\mu(\Omega')$, donc sur V_h).

THÉORÈME 5.2 : *sous les hypothèses* (4.4) *et* (5.1)-(5.3) *pour tout* $h \in H$, *le problème* (5.7) *admet une solution unique* $\sigma_{\varepsilon h}$, *appelée* D^m-spline d'ajustement discrète dans V_h relative à ρ, β et ε, *qui est aussi la solution unique du problème : trouver* $\sigma_{\varepsilon h}$ *tel que*

$$\begin{cases} \sigma_{\varepsilon h} \in V_h, \\ \forall v_h \in V_h, \langle \rho\sigma_{\varepsilon h}, \rho v_h \rangle_{\mathbb{R}^N} + \varepsilon(\sigma_{\varepsilon h}, v_h)_{m, \Omega'} = \langle \beta, \rho v_h \rangle_{\mathbb{R}^N} . \end{cases} \tag{5.8}$$

Démonstration : Analogue à celle du théorème 4.4, compte tenu du fait que V_h est un espace de Hilbert pour la norme $[\![\cdot]\!]_{m, \Omega'}$. □

Sous l'hypothèse (4.3), les problèmes (5.7) et (5.8) sont, respectivement, des discrétisations des problèmes (4.11) et (4.12).

Remarque 5.4 : La solution $\sigma_{\varepsilon h}$ de (5.7) s'écrit comme

$$\sigma_{\varepsilon h} = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j w_j ,$$

$w_1, ..., w_M$ étant les fonctions de base de V_h. Introduisant les matrices

$$\mathscr{A} = (\phi_i(w_j))_{1 \leqslant i \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant M}$$

et

$$\mathscr{R} = ((w_j, w_i)_{m, \Omega'})_{1 \leqslant i, j \leqslant M} ,$$

on voit que (5.8) est équivalent au problème : trouver $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_M)$ tel que

$$\begin{cases} \alpha \in \mathbb{R}^M, \\ (\mathscr{A}^T \mathscr{A} + \varepsilon \mathscr{R})\, \alpha = \mathscr{A}^T \beta , \end{cases}$$

où $\mathscr{A}^T$ désigne la matrice transposée de $\mathscr{A}$. Notons que $\mathscr{A}^T \mathscr{A} + \varepsilon \mathscr{R}$ est une matrice symétrique et définie positive dont la dimension est exactement celle de l'espace d'éléments finis V_h. □

Remarque 5.5 : Lorsque l'espace V_h est défini par (5.3), les D^m-splines discrètes dans V_h conviennent pour représenter les failles verticales en géophysique (*cf.* les résultats numériques et graphiques du paragraphe 7). Pour représenter les failles obliques (directes), il faut utiliser un sous-espace V_h de dimension finie de $H^m(\Omega') \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap C^k_F(\Omega')$. □

6. CONVERGENCE

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la convergence des D^m-splines d'ajustement discrètes, compte tenu de son intérêt pratique majeur. Pour les D^m-splines sur Ω' et les D^m-splines d'interpolation discrètes, on peut obtenir aussi des résultats analogues, par exemple, à ceux de R. Arcangéli [3].

Dans la suite, on garde les notations Ω, Ω', F, k et μ du paragraphe 5, on considère une famille d'ouverts quelconque $\{R_1, ..., R_I\}$ représentant F dans Ω et on pose, comme au paragraphe 3.1, $R = \cup_{i=1}^{I} R_i$. De même, on suppose donnés :

- deux ensembles bornés D et H de $\mathbb{R}^*_+$ admettant 0 pour point d'accumulation ;

• pour tout $d \in D$, un ensemble A^d de points de $\bar{\Omega}$ et un ensemble Σ^d de $N = N(d)$ formes linéaires sur $C^{\mu}_F(\Omega')$ du type (4.1) ou (4.2) associées aux points de A^d, vérifiant :

$$\sup_{x \in \Omega'} \delta(x, A^d_L) = d \tag{6.1}$$

où δ désigne la distance euclidienne dans $(\mathbb{R}^n)$, A^d_L étant l'ensemble des nœuds de Lagrange de Σ^d (i.e. l'ensemble des points de A^d pour lesquels il existe un élément de Σ^d du type (4.1) ou (4.2) avec $(|\alpha| = 0)$;

• pour tout $d \in D$, l'opérateur linéaire continu $\rho^d : C^{\mu}_F(\Omega') \to \mathbb{R}^N$ donné par

$$\rho^d v = (\phi(v))_{\phi \in \Sigma^d} ;$$

• pour tout $h \in H$, une triangulation $\mathcal{T}_h$ de $\bar{\Omega}$ au moyen de n-simplexes K de diamètres $h_K \leqslant h$, d'intérieurs disjoints, vérifiant (5.1) et (5.2) ;

• pour tout $h \in H$, un espace V_h de type éléments finis construits sur $\mathcal{T}_h$ satisfaisant à (5.3), où m est maintenant un entier tel que

$$m > \frac{n}{2} . \tag{6.2}$$

On suppose en outre que la famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h \in H}$ satisfait à l'hypothèse inverse (*cf.* P. G. Ciarlet [9])

$$\exists \nu > 0, \forall h \in H, \forall K \in \mathcal{T}_h, \frac{h}{h_K} \leqslant \nu , \tag{6.3}$$

et que les familles $(A^d)_{d \in D}$ et $(\mathcal{T}_h)_{h \in H}$ sont liées par la relation :

$$\exists C > 0, \forall d \in D, \forall h \in H, \forall K \in \mathcal{T}_h : \operatorname{card} A^d \cap K \leqslant C \frac{h^n}{d^n} . \tag{6.4}$$

Remarque 6.1 : L'hypothèse (6.4) traduit une propriété de régularité asymptotique de la répartition des points de A^d suivant les éléments K de $\mathcal{T}_h$. On peut montrer plus précisément que (6.4) signifie que les points de A^d sont distribués sur les différents éléments K en sous-ensembles dont le cardinal est en $O(N_h(d))$ quand $(d, h) \to (0, 0)$, où $N_h(d)$ désigne le nombre moyen de points de A^d par élément K.

Soit m' un entier tel que

$$m' > \max \left\{ \frac{n}{2} + \mu, m - 1 \right\} . \tag{6.5}$$

On suppose que la famille $(V_h)_{h \in H}$ et m' sont tels que l'on ait le résultat suivant (*cf.* P. Clément [10]) :

Pour tout $h \in H$, il existe un opérateur linéaire $\Pi_h : L^2(\Omega') \to V_h$ vérifiant les relations :

(i) $\exists C > 0, \forall h \in H, \forall l = 0, \dots, m' - 1, \forall v \in H^{m'}(\Omega')$,

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v - \Pi_h v|^2_{l,K} \right)^{1/2} \leq C h^{m'-l} |v|_{m',\Omega'} ; \tag{6.6}$$

(ii) $\forall v \in H^{m'}(\Omega')$, $\lim_{h \to 0} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v - \Pi_h v|^2_{m',K} \right)^{1/2} = 0$.

Remarque 6.2 : Le résultat (6.6) *ne nécessite pas* l'hypothèse classique de régularité de la méthode des éléments finis : $H^{m'}(\Omega') \subset C^s_F(\Omega')$, où s désigne l'ordre maximal des dérivées intervenant dans la définition des degrés de liberté de l'élément fini générique de la famille $(V_h)_{h \in H}$, mais suppose évidemment que

$$(\mathcal{T}_h)_{h \in H} \text{ est régulière} \tag{6.7}$$

(*cf.* P. G. Ciarlet [9]). Ce résultat suppose de surcroît que l'élément fini générique (K, P_K, Σ_K) de la famille $(V_h)_{h \in H}$ vérifie la condition :

$$P_{m'}(K) \subset P_K \subset H^{m'}(K) \tag{6.8}$$

(en fait (i) utilise seulement l'hypothèse $(P_{m'-1}(K) \subset P_K \subset H^{m'}(K))$, ainsi qu'une propriété « d'uniformité » des fonctions de base (*cf.* P. Clément [10], G. Strang [25]) satisfaite dans les cas usuels (par exemple, pour les éléments d'Argyris et de Bell). □

LEMME 6.1 : *On suppose vérifiées les hypothèses* (6.3)-(6.6). *Alors, il existe* $C > 0$ *et* $h_0 > 0$ *tels que*

$$\forall v \in H^{m'}(\Omega'), \forall d \in D, \forall h \in H,$$

$$h \leq h_0 : \langle \rho^d (\Pi_h v - v) \rangle^2_{\mathbb{R}^N} \leq C \frac{h^{2(m'-\mu)}}{d^n} |v|^2_{m',\Omega'} .$$

Démonstration : 1) Soient $h \in H$, $K \in \mathcal{T}_h$, $a \in K$ et $u \in C^{m'}(K)$ fixés. Pour $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant \mu$, et pour tout $x \in K$, on a (formule de Taylor avec reste intégral au point a et à l'ordre $m' - r - 1$ pour la fonction $D^r u$) :

$$D^r u(a) = \sum_{l=0}^{m'-r-1} \frac{1}{l!} D^{l+r} u(x) \,.\, (a-x)^l$$
$$+ \frac{1}{(m'-r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m'-r-1} D^{m'} u(x + t(a-x)) \,.\, (a-x)^{m'-r} \, dt \,.$$

D'où, pour $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant \mu$, et pour tout $x \in K$:

$$\| D^r u(a) \| \leqslant \sum_{l=0}^{m'-r-1} \frac{h^l}{l!} \| D^{l+r} u(x) \|$$
$$+ \frac{h^{m'-r}}{(m'-r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m'-r-1} \| D^{m'} u(x + t(a-x)) \| \, dt \,.$$

Prenant les normes $L^2_x(K)$ des deux membres, il vient pour $r \leqslant \mu$ (*cf.* C. B. Morrey [18] et aussi R. Arcangéli et J.-L. Gout [5]) :

$$\| D^r u(a) \| \leqslant (mes\, K)^{-1/2} \sum_{l=0}^{m'-r-1} \frac{h^l}{l!} \left(\int_K \| D^{l+r} u(x) \|^2 \, dx \right)^{1/2}$$
$$+ \frac{h^{m'-r}}{(m'-r-1)!\,(m'-r-n/2)} \left(\int_K \| D^{m'} u(x) \|^2 \, dx \right)^{1/2} .$$

Utilisant alors un résultat classique d'équivalence de semi-normes, les hypothèses (6.3) et (6.7) (implicitement supposée par (6.6)), et la densité de $C^{m'}(K)$ dans $H^{m'}(K)$, on en déduit qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tous $h \in H$, $K \in \mathcal{T}_h$, $u \in H^{m'}(K)$ et $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant \mu$,

$$\max_{a \in K} \| D^r u(a) \|^2 \leqslant C h^{-n} \sum_{l=0}^{m'-r} h^{2l} |u|^2_{l+r,K} \,. \tag{6.9}$$

2) D'autre part, pour tous $d \in D$, $h \in H$ et $v \in H^{m'}(\Omega')$, on a évidemment :

$$\langle \rho^d(\Pi_h v - v) \rangle^2_{\mathbb{R}^N} \leqslant nI \sum_{r=0}^{\mu} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{a \in A^d \cap K} \| D^r(\Pi_h v - v)(a) \|^2 \,,$$

où I est le cardinal de la famille d'ouverts représentant F dans Ω et où, si $a \in F$, on a mis $v(a)$ pour $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in K}} v(x)$. Donc :

$$\langle \rho^d(\Pi_h v - v) \rangle^2_{\mathbb{R}^N} \leqslant nI \max_{K \in \mathcal{T}_h} (\operatorname{card} A^d \cap K)$$

$$\times \sum_{r=0}^{\mu} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \max_{a \in K} \| D^r(\Pi_h v - v)(a) \|^2 .$$

Compte tenu de (6.4) et de (6.9) avec $u = (\Pi_h v - v)|_K$, il vient :

$$\langle \rho^d(\Pi_h v - v) \rangle^2_{\mathbb{R}^N} \leqslant CnId^{-n} \sum_{r=0}^{\mu} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l=0}^{m'-r} h^{2l} |\Pi_h v - v|^2_{l+r,K} .$$

En permutant les sommations sur K et l et utilisant (6.6), on obtient :

$$\langle \rho^d(\Pi_h v - v) \rangle^2_{\mathbb{R}^N} \leqslant CnI(m'+1)\, d^{-n} |v|^2_{m',\Omega'} \sum_{r=0}^{\mu} h^{2(m'-r)} ,$$

d'où le résultat. □

Nous aurons besoin aussi du résultat ci-après, adapté de M. C. López de Silanes et R. Arcangéli [16, proposition 2.1].

PROPOSITION 6.2 : *Soit* $B_0 = \{b_{01}, \dots, b_{0\Delta}\}$ *un sous-ensemble* $\tilde{P}_{m-1}(\Omega')$*-unisolvant de points de* R. *Alors il existe* $\eta > 0$ *tel que, si* $\mathcal{B}_\eta$ *désigne l'ensemble des* Δ*-uplets* $B = \{b_1, \dots, b_\Delta\}$ *de points de* Ω' *satisfaisant à la condition*

$$\forall j = 1, \dots, \Delta, \langle b_j - b_{0j} \rangle_{\mathbb{R}^n} \leqslant \eta , \tag{6.10}$$

l'application $[\![\cdot]\!]_{B,m,\Omega'}$ *définie pour tout* $B \in \mathcal{B}_\eta$ *par*

$$[\![v]\!]_{B,m,\Omega'} = \left(\sum_{j=1}^{\Delta} |v(b_j)|^2 + |v|^2_{m,\Omega'} \right)^{1/2} ,$$

soit une norme sur $H^m(\Omega')$ *uniformément équivalente sur* $\mathcal{B}_\eta$ *à la norme* $\| \cdot \|_{m,\Omega'}$.

Démonstration : 1) D'après l'injection continue de $H^m(\Omega')$ dans $C^0_F(\Omega')$ (*cf.* théorème 3.2),

$$\exists C > 0, \forall B \in \mathcal{B}_\eta, \forall v \in H^m(\Omega') : [\![v]\!]_{B,m,\Omega'} \leqslant [\![v]\!]_{m,\Omega'} .$$

2) Puisque $B_0 \subset R$, et, il existe $\eta' > 0$ et, pour $j = 1, \ldots, \Delta$, il existe $i_j \in \{1, \ldots, I\}$ tels que

$$B(b_{0j}, \eta') \subset R_{i_j} . \tag{6.11}$$

De même, pour tout $v \in H^m(\Omega')$ et pour $B \in \mathscr{B}_\eta$, on a évidemment :

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\Delta} v(b_{0j})^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\Delta} (v(b_{0j}) - v(b_j))^2 + \sum_{j=1}^{\Delta} v(b_j)^2 .$$

De (6.10), (6.11) et du théorème d'immersion hölderienne pour chaque espace $H^m(R_{i_j})$ (*cf.*, par exemple, R. Adams [1, théorème 5.4, partie II]), il résulte que

$$\begin{cases} \forall \gamma > 0, \exists \eta \in (0, \eta'], \forall B \in \mathscr{B}_\eta, \forall v \in H^m(\Omega') : \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{\Delta} (v(b_{0j}) - v(b_j))^2 \leqslant \gamma^2 \| v \|_{m, \Omega'}^2 , \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \forall \gamma > 0, \exists \eta \in (0, \eta'], \forall B \in \mathscr{B}_\eta, \forall v \in H^m(\Omega') : \\ \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\Delta} v(b_{0j})^2 + | v |_{m, \Omega'}^2 - \gamma^2 \| v \|_{m, \Omega'}^2 \leqslant [\![v]\!]_{B, m, \Omega'}^2 . \end{cases}$$

Or, en raisonnant comme dans J. Nečas [19, théorème 2.7.1], compte tenu du théorème 3.3 et du fait que B_0 soit $\tilde{P}_{m-1}(\Omega')$-unisolvant, on montre aisément que l'application

$$v \mapsto \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\Delta} v(b_{0j})^2 + | v |_{m, \Omega'}^2 \right)^{1/2}$$

est une norme sur $H^m(\Omega')$ équivalente à la norme $[\![\cdot]\!]_{m, \Omega'}$. On en déduit que

$$\begin{cases} \exists C' > 0, \forall \gamma > 0, \exists \eta \in (0, \eta'], \forall B \in \mathscr{B}_\eta, \forall v \in H^m(\Omega') : \\ (C'^2 - \gamma^2) \, \| v \|_{m, \Omega'}^2 \leqslant [\![v]\!]_{B, m, \Omega'}^2 , \end{cases}$$

et le résultat suit en fixant η à partir de la condition $\gamma < C'$. □

Enfin, on suppose données deux fonctions $\varepsilon : D \to \mathbb{R}_+^*$ et $h : D \to H$ (i.e. on considère que ε et h sont fonction de d) telles que

$$\varepsilon = o(d^{-n}), d \to 0 , \tag{6.12}$$

et que

$$\frac{h^{2(m'-\mu)}}{d^n \varepsilon} = o(1), d \to 0 . \quad (6.13)$$

Il résulte de (6.5), de (6.12) et de (6.13) que $d \to 0$ implique $h \to 0$. Pour simplifier les notations, on écrira dorénavant ε et h au lieu de $\varepsilon(d)$ et $h(d)$.

Le théorème suivant constitue un résultat général de convergence des D^m-splines d'ajustement discrètes (*cf.* M. C. López de Silanes et R. Arcangéli [16, théorème 4.1], où est traité le cas des D^m-splines sur $\mathbb{R}^n$).

THÉORÈME 6.3 : *On suppose vérifiées les hypothèses* (5.1)-(5.3), (6.1)-(6.6), (6.12) *et* (6.13). *Soit f une fonction donnée de $H^{m'}(\Omega')$. Pour tout $d \in D$, on désigne par $\sigma^d_{\varepsilon h}$ la D^m-spline d'ajustement discrète dans V_h relative à ρ^d, $\rho^d f$ et ε. Alors :*

$$\lim_{d \to 0} \| \sigma^d_{\varepsilon h} - f \|_{m, \Omega'} = 0 .$$

Démonstration : 1) Notons, d'abord, que, d'après (6.1), il existe $d_0 > 0$ tel que, pour tout $d \in D$, $d \leqslant d_0$, A^d_L contienne un sous-ensemble P_{m-1}-unisolvant dans chaque composante connexe de Ω', et donc

$$\ker \rho^d \cap \tilde{P}_{m-1}(\Omega') = \{0\} .$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $d_0 = \sup D$. On déduit alors du théorème 5.2 que, pour tout $d \in D$, il existe $\sigma^d_{\varepsilon h}$. De plus, par définition de $\sigma^d_{\varepsilon h}$, on a, pour tout $d \in D$:

$$\langle \rho^d(\sigma^d_{\varepsilon h} - f) \rangle^2_{\mathbb{R}^N} + \varepsilon | \sigma^d_{\varepsilon h} |^2_{m, \Omega'} \leqslant \langle \rho^d(\Pi_h f - f) \rangle^2_{\mathbb{R}^N} + \varepsilon | \Pi_h f |^2_{m, \Omega'} . \quad (6.14)$$

D'autre part, compte tenu de (5.3) et (6.5), il résulte de (6.6) (concrètement, du point (i) lorsque $m' > m$ et du point (ii) lorsque $m' = m$) que

$$| \Pi_h f |_{m, \Omega'} = |f|_{m, \Omega'} + o(1), h \to 0 . \quad (6.15)$$

De même, du lemme 6.1 il vient, pour d assez petit :

$$\langle \rho^d(\Pi_h f - f) \rangle^2_{\mathbb{R}^N} \leqslant C \frac{h^{2(m'-\mu)}}{d^n} |f|^2_{m', \Omega'} . \quad (6.16)$$

Alors on déduit de (6.13), (6.14), (6.15) et (6.16) que la famille $(\sigma^d_{\varepsilon h})_{d \in D}$ vérifie les relations

$$| \sigma^d_{\varepsilon h} |_{m, \Omega'} = |f|_{m, \Omega'} + o(1), d \to 0 , \quad (6.17)$$

et

$$\langle \rho^d(\sigma_{\varepsilon h}^d - f)\rangle_{\mathbb{R}^N}^2 = O(\varepsilon),\, d \to 0\,. \tag{6.18}$$

2) Soit $B_0 = \{b_{01}, ..., b_{0\Delta}\}$ un sous-ensemble $\tilde{P}_{m-1}(\Omega')$-unisolvant de points de R et soit η la constante de la proposition 6.2. Evidemment, puisque R est ouvert, il existe $\eta' \in (0, \eta]$ tel que

$$\forall j = 1, ..., \Delta,\, \bar{B}(b_{0j}, \eta') \subset \bar{R} = \bar{\Omega}\,.$$

D'après (6.1), pour tout $d \in D$, $d < \eta'$, et pour $j = 1, ..., \Delta$, on a :

$$\bar{B}(b_{0j}, \eta' - d) \subset \bigcup_{a \in A_L^d \cap B(b_{0j}, \eta')} \bar{B}(a, d)\,.$$

Posant $\mathcal{N}_j = \operatorname{card}(A_L^d \cap \bar{B}(b_{0j}, \eta'))$, il vient :

$$\forall d \in D,\, d < \eta',\, \forall j = 1, ..., \Delta,\, (\eta' - d)^n \leqslant \mathcal{N}_j\, d^n\,,$$

d'où, pour $d_0 \in (0, \eta')$ quelconque,

$$\forall d \in D,\, d \leqslant d_0,\, \forall j = 1, ..., \Delta,\, \mathcal{N}_j \geqslant (\eta' - d_0)^n\, d^{-n}\,. \tag{6.19}$$

Or on déduit de (6.12) et de (6.18) que

$$\forall j = 1, ..., \Delta, \quad \sum_{a \in A_L^d \cap \bar{B}(b_{0j}, \eta')} |(\sigma_{\varepsilon h}^d - f)(a)|^2 = o(d^{-n}),\, d \to 0\,. \tag{6.20}$$

Si b_j^d est un point de $A_L^d \cap \bar{B}(b_{0j}, \eta')$ tel que

$$|(\sigma_{\varepsilon h}^d - f)(b_j^d)| = \min_{a \in A_L^d \cap \bar{B}(b_{0j}, \eta')} |(\sigma_{\varepsilon h}^d - f)(a)|\,,$$

il résulte de (6.19) et de (6.20) que

$$\forall j = 1, ..., \Delta,\, |(\sigma_{\varepsilon h}^d - f)(b_j^d)| = o(1),\, d \to 0\,. \tag{6.21}$$

Notant B^d l'ensemble $\{b_1^d, ..., b_\Delta^d\}$ et appliquant la proposition 6.2 avec $B = B^d$, pour d assez petit, les relations (6.17) et (6.21) impliquent alors que

$$\exists C > 0,\, \exists d^* > 0,\, \forall d \in D,\, d \leqslant d^*,\, \|\sigma_{\varepsilon h}^d\|_{m,\Omega'} \leqslant C\,.$$

La famille $(\sigma^d_{\varepsilon h})_{\substack{d \in D \\ d \leqslant d^*}}$ étant bornée dans $H^m(\Omega')$, il existe une suite $(\sigma^{d_l}_{\varepsilon_l h_l})_{l \in \mathbb{N}}$, avec, pour tout $l \in \mathbb{N}$, $d_l \in D$, $d_l \leqslant d^*$, $\varepsilon_l = \varepsilon(d_l)$, $h_l = h(d_l)$ et

$$\lim_{l \to +\infty} d_l = \lim_{l \to +\infty} \varepsilon_l \, d_l^n = \lim_{l \to +\infty} \frac{h_l^{2(m'-\mu)}}{d_l^n \, \varepsilon_l} = 0$$

(et donc $\lim\limits_{l \to +\infty} h_l = 0$), extraite de la famille $(\sigma^d_{\varepsilon h})$, et un élément $f^* \in H^m(\Omega')$ tels que

$$f^* = \lim_{l \to +\infty} \text{faible } \sigma^{d_l}_{\varepsilon_l h_l} \text{ dans } H^m(\Omega') . \tag{6.22}$$

3) Montrons maintenant que $f = f^*$. Pour cela raisonnons par l'absurde : supposons que $f^* \neq f$. D'après l'injection continue de $H^m(\Omega')$ dans $C^0_F(\Omega')$ (*cf.* théorème 3.2), il existe $\gamma > 0$ et un ouvert non vide $\omega \subset \Omega'$ tels que

$$\forall x \in \omega, \; |f^*(x) - f(x)| > \gamma .$$

Puisque une telle injection est, de plus, compacte, il vient d'après (6.22) :

$$\exists l_0 \in \mathbb{N}, \forall l \geqslant l_0, \forall x \in \omega, \; |\sigma^{d_l}_{\varepsilon_l h_l}(x) - f^*(x)| \leqslant \tfrac{\gamma}{2} ,$$

d'où, pour tout $l \leqslant l_0$ et pour tout $x \in \omega$,

$$|\sigma^{d_l}_{\varepsilon_l h_l}(x) - f(x)| \geqslant |f^*(x) - f(x)| - |\sigma^{d_l}_{\varepsilon_l h_l}(x) - f^*(x)| > \tfrac{\gamma}{2} . \tag{6.23}$$

Or le raisonnement du 2) montre que, pour tout $l \in \mathbb{N}$ assez grand, il existe un point $b^{d_l} \in A^d_L \cap \omega$ tel que

$$|\sigma^{d_l}_{\varepsilon_l h_l}(b^{d_l}) - f(b^{d_l})| = o(1), \; l \to +\infty ,$$

ce qui contredit (6.23). Donc $f^* = f$.

4) Montrons que $\lim\limits_{l \to +\infty} \|\sigma^{d_l}_{\varepsilon_l h_l} - f\|_{m, \Omega'} = 0$. On a évidemment, pour tout $l \in \mathbb{N}$:

$$|\sigma^{d_l}_{\varepsilon_l h_l} - f|^2_{m, \Omega'} = |\sigma^{d_l}_{\varepsilon_l h_l}|^2_{m, \Omega'} + |f|^2_{m, \Omega'} - 2(\sigma^{d_l}_{\varepsilon_l h_l}, f)_{m, \Omega'} .$$

Alors il résulte de (6.17) et de (6.22) que

$$\lim_{l \to +\infty} |\sigma^{d_l}_{\varepsilon_l h_l} - f|_{m, \Omega'} = 0 .$$

D'autre part, le théorème 3.3 implique que $(\sigma^{d_l}_{\varepsilon_l h_l})$ tend vers f dans $H^{m-1}(\Omega')$ fort, d'où

$$\lim_{l \to +\infty} \|\sigma^{d_l}_{\varepsilon_l h_l} - f\|_{m, \Omega'} = 0 .$$

5) Achevons la démonstration en raisonnant par l'absurde. Supposons que, sous les hypothèses de l'énoncé, $\|\sigma^{d}_{\varepsilon h} - f\|_{m, \Omega'}$ ne tende pas vers 0 quand $d \to 0$. Cela revient à dire qu'il existe $\alpha > 0$ et trois suites $(d'_l) \subset D$, (ε'_l) et (h'_l), avec, pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\varepsilon'_l = \varepsilon(d'_l)$, $h'_l = h(d'_l)$ et

$$\lim_{l \to +\infty} d'_l = \lim_{l \to +\infty} \varepsilon'_l (d'_l)^n = \lim_{l \to +\infty} \frac{(h'_l)^{2(m'-\mu)}}{(d'_l)^n \varepsilon'_l} = 0 ,$$

vérifiant

$$\forall l \in \mathbb{N}, \ \|\sigma^{d'_l}_{\varepsilon'_l h'_l} - f\|_{m, \Omega'} > \alpha . \tag{6.24}$$

Mais la suite $(\sigma^{d'_l}_{\varepsilon'_l h'_l})_{l \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^m(\Omega')$. Argumentant alors comme dans les points précédents, on déduit que, de cette suite, on peut extraire une sous-suite convergente vers f dans $H^m(\Omega')$, ce qui contredit (6.24). □

Remarque 6.3 : L'énoncé du théorème 6.3 peut être formulé de la manière plus générale suivante : sous les hypothèses (5.1)-(5.3) et (6.1)-(6.6), étant donné une fonction f de $H^{m'}(\Omega')$, la D^m-spline $\sigma^d_{\varepsilon h}$ d'ajustement discrète relative à ρ^d, $\rho^d f$ et ε converge vers f dans $H^m(\Omega')$ suivant la base de filtre $\mathscr{B} = \{B_{\alpha\beta\gamma} \mid \alpha, \beta, \gamma > 0\}$ avec

$$B_{\alpha\beta\gamma} = \{(d, \varepsilon, h) \in D \times \mathbb{R}^*_+ \times H \mid d \leqslant \alpha, d^n \varepsilon \leqslant \beta, h^{2(m'-\mu)}/(d^n \varepsilon) \leqslant \gamma\} . \quad □$$

Remarque 6.4 : Même quand $\mu = 1$ (i.e. même en présence de conditions d'Hermite d'ordre 1), *la convergence ne requiert que la condition* $m > n/2$, et non la condition $m > n/2 + 1$ qu'imposerait l'inclusion $H^m(\Omega') \subset C^1_F(\Omega')$: le théorème 6.3 montre qu'il suffit en réalité que $V_h \subset C^1_F(\Omega')$. Ce résultat est très important en pratique pour l'approximation de surfaces à partir de données de Lagrange ou d'Hermite d'ordre 1 : il justifie le fait que l'on puisse se contenter d'utiliser des espaces de type éléments finis de classe C^1. □

7. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

On a utilisé 4 fonctions de 2 variables définies sur le même domaine $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ et ayant pour ensemble de discontinuité F le même chemin polygonal connexe de sommets (0.2, 0.2), (0.35, 0.225), (0.42, 0.3), (0.48, 0.4), (0.49, 0.53), (0.5, 0.65), (0.65, 0.725), (0.8, 0.75), (0.9, 0.725) (*cf.*

annexe 1). Les fonctions testées ont été construites par addition d'une fonction continue et d'une même fonction discontinue g (*cf.* annexes 2 à 5, où ω désigne la partie du rectangle de sommets (0.2, 0.2) et (0.9, 0.8) située au-dessus de la faille).

Pour simplifier la mise en œuvre de la méthode, on s'est donné uniquement des données de Lagrange et on a pris $m = 2$.

Dans les 4 exemples envisagés, l'espace V_h est l'espace de type éléments finis d'Argyris de classe C^1 correspondant à la triangulation donnée en annexe 1. Le calcul des fonctions de base a été effectué par la méthode de M. Bernadou [8]. Le nombre et la distribution des points de données (aléatoirement répartis) sont indiqués en annexe 1. Enfin le paramètre ε a été fixé dans tous les cas à la valeur $\varepsilon = 10^{-6}$.

Dans les annexes 2 à 5 on donne, pour chaque fonction testée f, une représentation graphique de la fonction f, de l'approximation $\sigma_{\varepsilon h}$ et de la fonction erreur $\sigma_{\varepsilon h} - f$. Enfin on a calculé l'erreur relative en norme euclidienne

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{10^4} (\sigma_{\varepsilon h}(m_i) - f(m_i))^2}{\sum_{i=1}^{10^4} f(m_i)^2} \right)^{1/2},$$

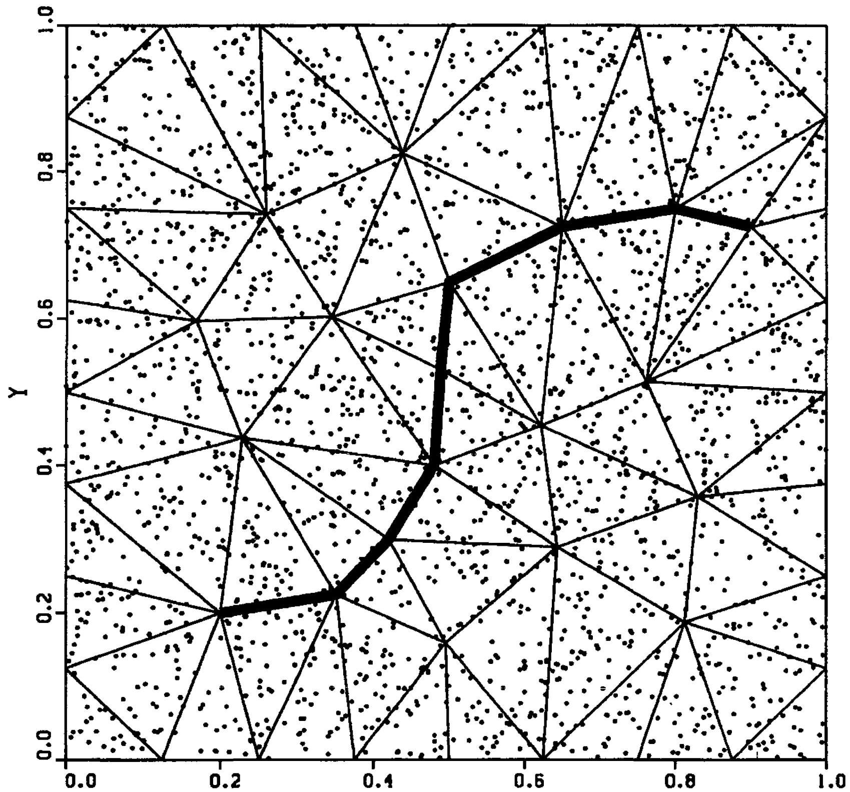
où les m_i constituent un échantillon fixe de 10 000 points de $\bar{\Omega}$ régulièrement répartis.

Le programme a été développé sur VAX 3500 au Centre de Calcul de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour, en utilisant la bibliothèque graphique CA-DISSPLA.

Remerciements. Ce travail a été partiellement réalisé dans le cadre d'un projet de recherche (BON n. 3-18/3/94) financé par le Gouvernement de Navarre (Espagne).

Annexe 1

TRIANGULATION ET
DISTRIBUTION DES POINTS DE DONNEES



LIGNE DE DISCONTINUITE

· POINT DE DONNEES

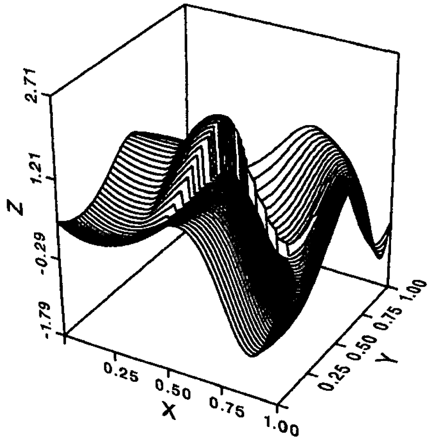
NOMBRE DE POINTS DE DONNEES = 2500

NOMBRE DE TRIANGLES = 70

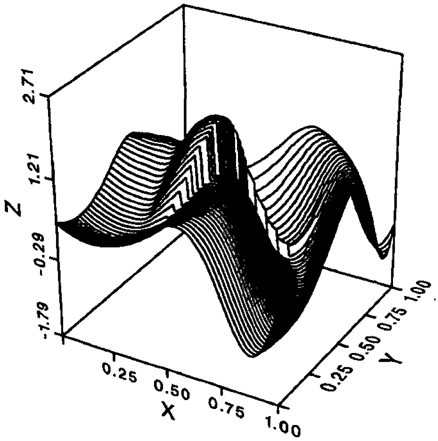
DIMENSION DE V_h = 483

Annexe 2

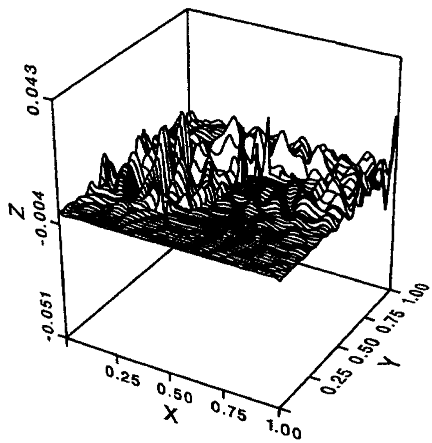
FONCTION



APPROXIMATION



ERREUR



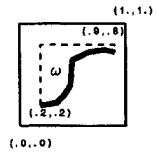
FONCTION :

$$\sin\left((3.x-0.5)^2 + (3.y-0.5)^2 \right) + g(x,y)$$

$\varepsilon = 10^{-6}$

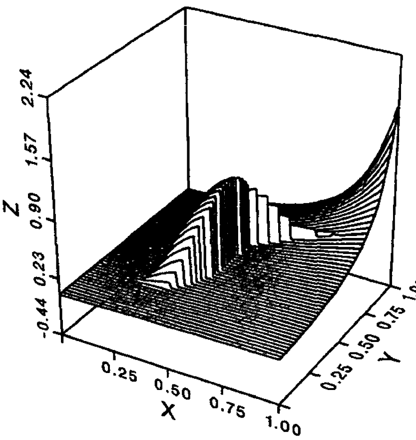
ERREUR RELATIVE EN
NORME EUCLIDIENNE = 4.959289e-03

$$g(x,y) = \begin{cases} \exp\left[2. + .35^2\left((x-0.55)^2-(.35)^2\right)^{-1} + .3^2\left((y-0.6)^2-(.3)^2\right)^{-1}\right], & si\ (x,y) \in \omega \\ 0. & , sinon \end{cases}$$

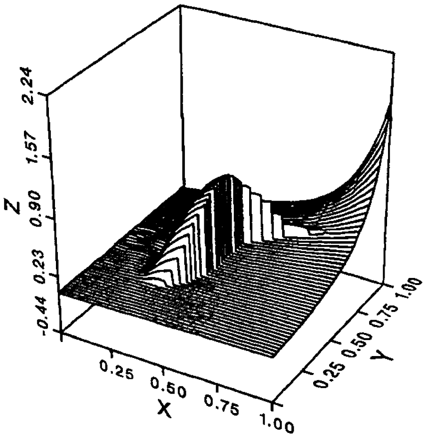


Annexe 3

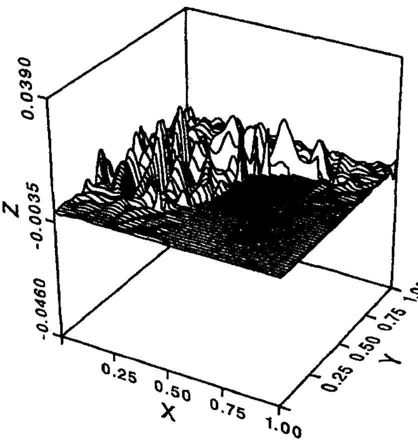
FONCTION



APPROXIMATION



ERREUR



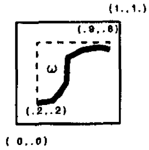
FONCTION :

$$\left((3.x-3.5)^2 + (3.y-3.5)^2 \right)^{-1} + g(x,y)$$

$\varepsilon = 10^{-6}$

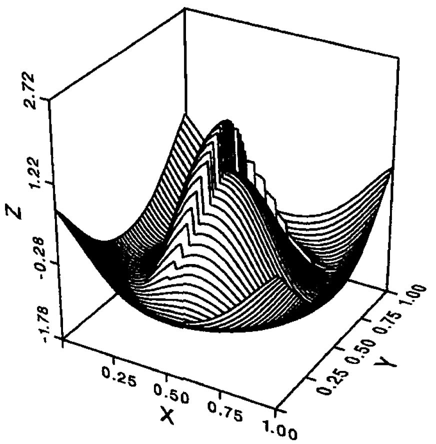
ERREUR RELATIVE EN
NORME EUCLIDIENNE = 1.080671e-02

$$g(x,y) = \begin{cases} \exp\left[2. + .35^2\left((x-0.55)^2-(.35)^2\right)^{-1} + .3^2\left((y-0.5)^2-(.3)^2\right)^{-1}\right] & si\ (x,y) \in \omega \\ 0. & , sinon \end{cases}$$

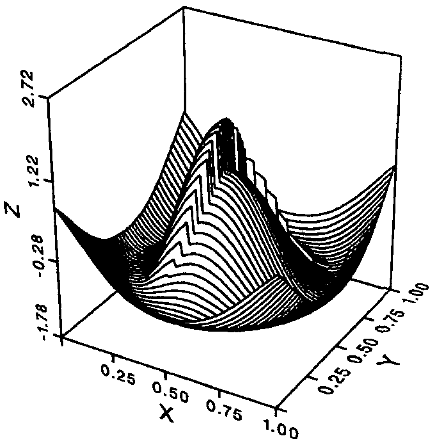


Annexe 4

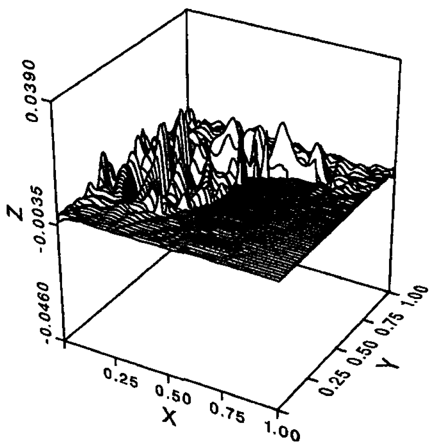
FONCTION



APPROXIMATION



ERREUR



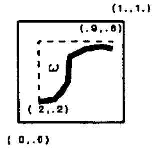
FONCTION :

$$\cos\left(8.\left[(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2\right]^{1/2} \right) + g(x,y)$$

$\varepsilon = 10^{-6}$

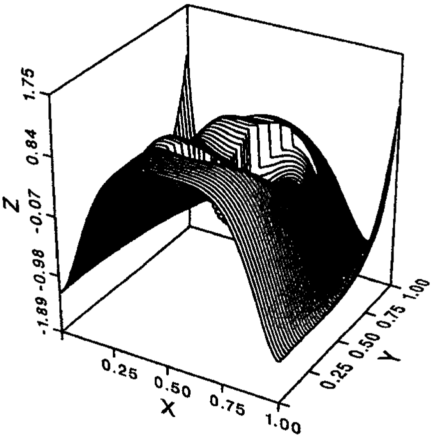
ERREUR RELATIVE EN
NORME EUCLIDIENNE = 4.546116e-03

$$g(x,y) = \begin{cases} \exp\left[2. + .35^2\left((x-0.55)^2 - (.35)^2\right)^{-1} + .3^2\left((y-0.5)^2 - (.3)^2\right)^{-1}\right] & \text{si } (x,y) \in \omega \\ 0. & \text{, sinon} \end{cases}$$

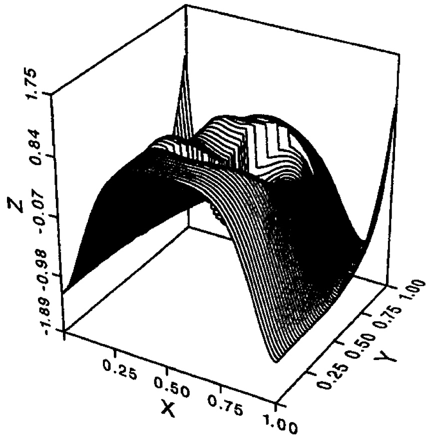


Annexe 5

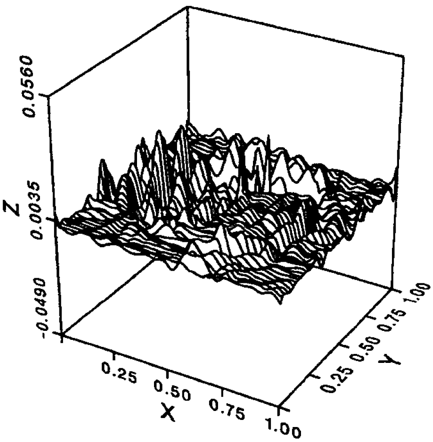
FONCTION



APPROXIMATION



ERREUR



FONCTION :

$$1.-u(x,y)^2(3.-u(x,y)^2)-w(x,y)$$

ou: $u(x,y)=[(3.x-1.5)^2+((3.y-0.5)/2.5)^2]/1.8$

$$w(x,y)=\begin{cases}1.5(1.-v(x,y)^2(3.-2.v(x,y)), & si\ v(x,y)\leq 1.\\ 0. & ,\ sinon\end{cases}$$

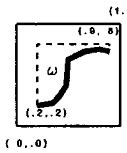
$$v(x,y)=[(3.x-1.5)^2+(3.y-1.5)^2]^{1/2}$$

$\varepsilon = 10^{-8}$

ERREUR RELATIVE EN

NORME EUCLIDIENNE = 5.924899e-03

$$g(x,y)=\begin{cases}\exp[2.+.35^2((x-0.55)^2-(.35)^2)^{-1} & \\ \quad +.3^2((y-0.5)^2-(.3)^2)^{-1}], & si\ (x,y)\in\omega\\ 0. & ,\ sinon\end{cases}$$



RÉFÉRENCES

[1] R. A. ADAMS, 1975, *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York.

[2] D. APPRATO, 1987, *Approximation de surfaces paramétrées par éléments finis.* Thèse d'État, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

[3] R. ARCANGÉLI, 1986, *D^m-splines sur un domaine borné de $\mathbb{R}^n$.* Publication UA 1204 CNRS n° 1986/2.

[4] R. ARCANGÉLI, 1989, Some Applications of Discrete D^m Splines. Dans *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design,* T. Lyche et L. L. Schumaker (éditeurs), Academic Press, 35-44.

[5] R. ARCANGÉLI et J.-L. GOUT, 1976, Sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$. *RAIRO Anal. Numér.,* **10,** 5-27.

[6] E. ARGE et M. FLOATER, 1994, Approximating scattered data with discontinuities. *Numerical Algorithms,* **8,** 149-166.

[7] M. ATTÉIA, 1968, Fonctions splines définies sur un ensemble convexe. *Numerische Mathematik,* **12,** 192-210.

[8] M. BERNADOU, 1978, *Sur l'analyse numérique du modèle linéaire de coques minces de W. T. Koiter.* Thèse, Université Paris VI.

[9] P. G. CIARLET, 1978, *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* North-Holland.

[10] P. CLÉMENT, 1975, Approximation by finite element functions using local regularization. *RAIRO R-2,* 77-84.

[11] R. FRANKE et G. NIELSON, 1983, Surface Approximation with Imposed Conditions. Dans *Surfaces in CAGD,* R. E. Barnhill et W. Boehm (éditeurs), North-Holland, 135-146.

[12] D. GIRARD et P. J. LAURENT, 1989, Splines and Estimation of Nonlinear Parameters. Dans *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design,* T. Lyche et L. L. Schumaker (éditeurs), Academic Press, 273-298.

[13] P. KLEIN, 1987, *Sur l'approximation et la représentation de surfaces explicites en présence de singularités.* Thèse de 3^c cycle, Université Joseph Fourier-Grenoble I.

[14] P. J. LAURENT, 1986, Inf-convolution spline pour l'approximation de données discontinues. *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique,* **20**(1), 89-111.

[15] A. LE MÉHAUTÉ, 1984, *Interpolation et approximation par des fonctions polynomiales par morceaux dans $\mathbb{R}^n$.* Thèse d'État, Université de Rennes.

[16] M. C. LÓPEZ DE SILANES et R. ARCANGÉLI, 1991, Sur la convergence des D^m-splines d'ajustement pour des données exactes ou bruitées. *Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid,* **4**(2-3), 279-294.

[17] R. MANZANILLA, 1986, *Sur l'approximation de surfaces définies par une équation explicite.* Thèse, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

[18] C. B. MORREY, 1966, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*. Springer-Verlag, New York.

[19] J. NEČAS, 1967, *Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques*. Masson.

[20] M. C. PARRA, M. C. LÓPEZ DE SILANES et J. J. TORRENS, 1996, Vertical fault detection from scattered data. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **73**, 225-239.

[21] M. J. D. POWELL et M. A. SABIN, 1977, Piecewise quadratic approximations on triangles. *ACM Trans. Math. Software*, **3**(4), 316-325.

[22] P. SABLONNIÈRE, 1985, Composite finite elements of class C^k. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **12-13**, 541-550.

[23] C. SERRES, 1992, *Sur la reconstruction de surfaces de type explicite présentant des failles*. Thèse, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

[24] J. SPRINGER, 1994, Modeling of Geological Surfaces Using Finite Elements. Dans *Wavelets, Images and Surface Fitting*, P. J. Laurent, A. Le Méhauté et L. L. Schumaker (éditeurs), A. K. Peters, Wellesley, 467-474.

[25] G. STRANG, 1972, Approximation in the finite element method. *Numerische Mathematik*, **19**, 81-98.

[26] J. J. TORRENS, 1992, *Interpolación de superficies paramétricas con discontinuidades mediante elementos finitos. Aplicaciones*. Tesis doctoral, Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano, Serie II, Sección 2, n° 24, Universidad de Zaragoza.

[27] J. J. TORRENS, 1994, Approximation of Parametric Surfaces with Discontinuities by Discrete Smoothing D^m-splines. Dans *Wavelets, Images and Surface Fitting*, P. J. Laurent, A. Le Méhauté et L. L. Schumaker (éditeurs), A. K. Peters, Wellesley, 485-492.

[28] A. ŽENÍŠEK, 1974. A general theorem on triangular finite $C^{(m)}$-elements. *RAIRO R-2*, 119-127.