

RAIRO

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

P. GIBEL

Étude numérique des oscillations des systèmes semi-linéaires 3×3

RAIRO — Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 32, n° 7 (1998), p. 789-815.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1998__32_7_789_0

© SMAI, EDP Sciences, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO — Modélisation mathématique et analyse numérique » (<http://www.esaim-m2an.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



ÉTUDE NUMÉRIQUE DES OSCILLATIONS DES SYSTÈMES SEMI-LINÉAIRES 3×3 (*)

P. GIBEL (**)

Résumé. — Dans cet article on s'intéresse au traitement numérique de systèmes 3×3 semi-linéaires strictement hyperboliques, en une dimension d'espace, ayant comme données initiales des oscillations hautes fréquences.

L'objet de cet article est de montrer que la méthode des caractéristiques, proposée par Engquist et Hou dans [2], dont l'originalité réside dans la construction du maillage, peut être utilisée pour le traitement numérique des systèmes semi-linéaires 3×3 à condition que les trois champs de vecteurs associés vérifient la propriété de fermeture hexagonale. Cette méthode est particulièrement intéressante pour le traitement numérique des interactions d'oscillations hautes fréquences, elle permet en effet de considérer un pas de discrétisation en espace non nécessairement de l'ordre de la période des oscillations permettant ainsi une approximation satisfaisante de la « moyenne numérique » des oscillations. © Elsevier, Paris

Abstract. — In this paper we study the numerical statment of semilinear 3×3 systems, strictly hyperbolic, in one dimensional space, with high frequency oscillating data.

The aim of this paper is to prove that the particular method, proposed by Engquist and Hou in [2], wich originality consists in grid point, is available for the numerical statment of the semilinear 3×3 systems provided that the three vector fields verify the hexagonal closure property.

This method is actually interesting for the numerical statment of high frequency oscillating interactions. It allows to choose a space step not necessarily on the order of the period of oscillating data allowing a good approximation of the averaged solutions. © Elsevier, Paris

1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

On s'intéresse à des problèmes de Cauchy semi-linéaires

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon(t, x) + A(t, x) \partial_x u^\varepsilon(t, x) = b(u^\varepsilon) \\ u^\varepsilon(0, x) = h_0^\varepsilon(x) \end{cases}$$

u^ε est à valeurs dans \mathbb{C}^3 , $(t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$, l'ouvert Ω vérifiant

$$\Omega \cap \{t = 0\} = I$$

où I désigne un intervalle.

Le terme source $b(u^\varepsilon)$ a trois composantes, chacune d'elles est de classe C^1 en les variables u_1^ε , u_2^ε et u_3^ε composantes de u^ε . $A(t, x)$ est une matrice 3×3 dont les coefficients sont de classe C^1 sur Ω .

L'opérateur associé

$$L = \partial_t + A(t, x) \partial_x$$

est supposé strictement hyperbolique et l'on note $\lambda_i(t, x)$, $1 \leq i \leq 3$, les 3 valeurs propres réelles et distinctes de $A(t, x)$ qui sont de classe C^1 sur Ω et vérifient

$$\lambda_1(t, x) < \lambda_2(t, x) < \lambda_3(t, x).$$

(*) Manuscript received October 28, 1994. Revised May 1995, November 1996 and October 1997.

(**) MaB, Université Bordeaux I, 351 cours de la Libération, 33405 Talence Cedex.

On note $r_i(t, x)$ et $l_i(t, x)$ les vecteurs propres à droite et à gauche associés à la valeur propre $\lambda_i(t, x)$. Ils sont normalisés de telle sorte qu'ils vérifient la relation d'orthogonalité

$$\langle l_i(t, x), r_j(t, x) \rangle = \delta_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

On note X_k le champ de vecteurs défini par

$$X_k = \partial_t + \lambda_k(t, x) \partial_x$$

et $\Gamma_k(\cdot; t, x) : s \rightarrow \Gamma_k(s; t, x) = (s, \gamma_k(s; t, x))$ la courbe caractéristique associée au champ X_k passant par le point (t, x) .

La fonction $\gamma_k(s; t, x)$ est la solution maximale dans Ω de

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \gamma_k(s; t, x) = \lambda_k(s, \gamma_k(s; t, x)) \\ \gamma_k(t; t, x) = x. \end{cases}$$

On choisit un intervalle $[y_-, y_+] \subset I$ et $T_0 > 0$ tels que $\gamma_k(s; 0, y)$ existe et appartient à Ω pour tout $s \in [0, T_0]$, pour tout $y \in [y_-, y_+]$ et pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$.

Quitte à diminuer T_0 , on suppose de plus que

$$\gamma_3(T_0; 0, y_-) \leq \gamma_1(T_0; 0, y_+).$$

On définit alors

$$\Omega_0 = \{(t, x) \in \Omega; 0 \leq t \leq T_0, \gamma_3(t; 0, y_-) \leq x \leq \gamma_1(t; 0, y_+)\}.$$

On prend comme donnée initiale une onde oscillante

$$(2) \quad h_0^\varepsilon(x) = U_0\left(x, \frac{\varphi^0(x)}{\varepsilon}\right)$$

$$U_0 \in C^0([y_-, y_+], C_{pp}^0(\theta^0))$$

où $C_{pp}^0(\theta^0)$ désigne l'algèbre des fonctions continues presque-périodiques en la variable θ^0 , c'est-à-dire l'adhérence dans L^∞ des polynômes trigonométriques en la variable θ^0 .

φ^0 est une fonction, appelée phase initiale, définie sur I , à valeurs dans \mathbb{R} .

Nous souhaitons effectuer une étude numérique du comportement asymptotique de la solution u^ε , pour ε tendant vers 0, c'est-à-dire pour des données initiales correspondant à des oscillations hautes fréquences.

Le comportement asymptotique de la solution, u^ε est donné par la fonction $U(t, x, \theta)$ appelée fonction profil, où la variable θ a trois composantes θ_1, θ_2 et θ_3 appelées variables rapides.

Les composantes de U , dans la base $(r_k(t, x))$, notées $U_k(t, x, \theta)$, sont solutions du problème de Cauchy

$$(3) \quad \begin{cases} X_k U_k(t, x, \theta) = E_k(g_k(U)) & 1 \leq k \leq 3 \\ U_k(0, x, \theta) = \langle l_k(0, x), U_0(x, \theta^0) \rangle & 1 \leq k \leq 3 \end{cases}$$

$E_k, 1 \leq k \leq 3$, désignent des opérateurs de moyenne que nous définirons au paragraphe 2, les fonctions $g_k, 1 \leq k \leq 3$, seront définies au paragraphe 4.

On a le résultat de convergence suivant

$$(4) \quad u^\varepsilon(t, x) - U\left(t, x, \frac{\varphi(t, x)}{\varepsilon}\right) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Les composantes de la phase φ , notées φ_k , sont solutions des équations Eikonales de données initiales φ^0 .

Cependant l'étude numérique des équations (3) vérifiées par les profils est onéreuse compte tenu du fait qu'elle nécessite une discrétisation en les variables t, x mais également en les variables $\theta_k, 1 \leq k \leq 3$.

De même, si l'on souhaite obtenir une approximation de la moyenne des oscillations, on s'aperçoit qu'il nous faut également effectuer un traitement numérique de (3) puisqu'il n'y a pas d'équations vérifiées par la moyenne des oscillations compte tenu du terme de couplage non linéaire. La moyenne n'est pas déterminée par la moyenne des données de Cauchy.

Dans [2], Engquist et Hou présentent une méthode numérique permettant d'approcher la moyenne numérique des oscillations en effectuant un traitement numérique approprié du problème (1), évitant ainsi une discrétisation coûteuse des équations des profils (3).

L'intérêt de cette méthode est le suivant : elle permet de choisir un pas de discrétisation en espace, noté h , non nécessairement de l'ordre de la période de l'oscillation, ε , que l'on peut alors choisir aussi petite que l'on souhaite.

Engquist et Hou proposent cette méthode pour le traitement numérique des systèmes semi-linéaires 2×2 ainsi que pour le système de Broadwell 3×3 à coefficients constants

$$(5) \quad \begin{cases} (\partial_t + \partial_x) u_1 = u_3^2 - u_1 u_2 \\ (\partial_t - \partial_x) u_2 = u_3^2 - u_1 u_2 \\ \partial_t u_3 = u_1 u_2 - u_3^2. \end{cases}$$

avec comme données initiales des ondes oscillantes.

L'objet de cet article est de montrer que cette méthode numérique peut également être utilisée pour traiter des systèmes semi-linéaires 3×3 sous la condition que les 3 champs de vecteurs $X_k, 1 \leq k \leq 3$, vérifient une propriété particulière : la propriété de fermeture hexagonale, que nous verrons au paragraphe 3. Le système (5) en est un exemple particulier. Nous démontrerons au paragraphe 7 pour des systèmes la convergence presque uniforme, au sens d'Engquist et Hou, de la solution approchée obtenue par la méthode numérique vers la solution exacte du problème de Cauchy (1).

Nous présenterons à la fin de cet article les résultats obtenus par cette méthode pour ε petit, et nous les comparerons à ceux obtenus en effectuant une discrétisation, certes beaucoup plus coûteuse, des équations (3) vérifiées par les fonctions profils.

Cet article est une partie de ma thèse réalisée sous la direction de Jean-Luc Joly à qui je souhaite adresser mes remerciements.

2. ESPACE DES PHASES. CONDITION DE TRANSVERSALITÉ

On considère une phase initiale φ^0 , de classe C^2 sur I , à valeur dans un espace vectoriel Θ^0 de dimension 1.

Définissons à présent les 3 phases $\varphi_k(t, x), 1 \leq k \leq 3$, obtenues par relèvement de la phase initiale φ^0 par les champs $X_k, 1 \leq k \leq 3$. Les phases $\varphi_k, 1 \leq k \leq 3$, sont solutions des équations Eikonales

$$(6) \quad \begin{cases} X_k \varphi_k(t, x) = 0 & 1 \leq k \leq 3 \\ \varphi_k(0, x) = \varphi^0(x) & 1 \leq k \leq 3 \end{cases}$$

Les phases $\varphi_k, 1 \leq k \leq 3$ sont à valeur dans des espaces de dimension 1 notés Θ_k .

On pose

$$(7) \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

et on définit l'espace

$$\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \Theta_3.$$

On note Φ_k l'espace des fonctions ainsi définies

$$(8) \quad \Phi_k = \{s_{\alpha_k} / \forall (t, x) \in \Omega_0 \quad s_{\alpha_k}(t, x) = \alpha_k \varphi_k(t, x), \alpha_k \in \Theta_k^*\}.$$

où Θ_k^* désigne le dual de Θ_k .

Nous souhaitons effectuer une étude numérique du comportement asymptotique de la solution du problème de Cauchy (1) lorsque l'on fait tendre le paramètre ε vers 0, ceci correspondant à une donnée initiale oscillante haute fréquence.

Intéressons-nous, tout d'abord, à un problème de Cauchy ne faisant intervenir qu'un seul champ X_k .

La présence du terme d'interaction non linéaire dans (1) fait qu'on s'attend à voir apparaître en terme source des oscillations ayant pour phase des combinaisons linéaires des phases φ_k , $1 \leq k \leq 3$, c'est-à-dire des phases ψ de la forme

$$\psi = \langle \alpha, \varphi \rangle$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ appartient à \mathbb{R}^3 .

On est donc amené à considérer le problème de Cauchy

$$(9) \quad \begin{cases} X_k u_\alpha = a_\alpha(t, x) e^{i \langle \alpha, \varphi(t, x) \rangle / \varepsilon} \\ u_\alpha(0, x) = 0 \end{cases}$$

où $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, les φ_k étant solutions des équations Eikonaux (6).

DÉFINITION 1 : On dit que la phase vectorielle φ vérifie l'hypothèse de k -transversalité forte, notée (τ_k) , si pour tout $\alpha \in \Theta^*$ l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée

$$(\tau_{\alpha, k}^1) \quad X_k(\langle \alpha, \varphi \rangle) \equiv 0 \text{ dans } \Omega_0.$$

$(\tau_{\alpha, k}^2) \quad X_k(\langle \alpha, \varphi \rangle) \neq 0$ presque partout sur toutes les courbes caractéristiques du mode k .

On dit que φ vérifie l'hypothèse de transversalité forte si elle vérifie l'hypothèse de k -transversalité forte pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$.

On a le résultat suivant démontré dans [7] par Joly, Métivier et Rauch.

LEMME 1 : On se donne une phase φ , vectorielle, vérifiant l'hypothèse de k -transversalité forte et une fonction a_α continue sur le domaine Ω_0 .

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(10) \quad \begin{cases} X_k u_\alpha = a_\alpha(t, x) e^{i \langle \alpha, \varphi(t, x) \rangle / \varepsilon} \\ u_\alpha(0, x) = 0. \end{cases}$$

Soit u_α solution de (10) alors

Si on est dans le cas où α vérifie la propriété $(\tau_{\alpha, k}^1)$ la solution du système (10) est de la forme

$$u_\alpha(t, x) = b_\alpha(t, x) e^{i \langle \alpha, \varphi(t, x) \rangle / \varepsilon}$$

$$b_\alpha(t, x) = X_k^{-1}(a(t, x)) = \int_0^t a_\alpha(s, \gamma_k(s; t, x)) ds.$$

Si on est dans le cas où α vérifie la propriété $(\tau_{\alpha, k}^2)$ la solution du système (10) est de la forme

$$u_\alpha = o(1) \text{ dans } L^\infty(\Omega_0).$$

On en déduit que la propriété de k -transversalité forte élimine donc, lorsqu'on fait tendre ε vers 0, toutes les phases qui ne vérifient pas l'équation Eikonale.

Remarques :

1) Si α vérifie $(\tau_{\alpha,k}^1)$ alors la phase $\psi = \langle \alpha, \varphi \rangle$ appartient à l'espace Φ_k .
 2) Soit une phase φ vérifiant l'hypothèse de k-transversalité forte on considère $\psi = \langle \alpha, \varphi \rangle$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes

- i) α vérifie $(\tau_{\alpha,k}^1)$.
- ii) Il existe β appartenant à \mathbb{R}^3 avec $(\beta_j = \alpha_j, j \neq k)$ tel que $\langle \beta, \varphi \rangle \equiv 0$.

DÉFINITION 2 : On appelle espace résonnant le sous-espace vectoriel de Θ^* défini par

$$R^* = \{ \beta \in \Theta^* / \langle \beta, \varphi \rangle \equiv 0 \}.$$

De cette définition on déduit que la phase φ est à valeur dans l'espace

$$\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \Theta_3$$

mais plus précisément dans l'espace Ψ

$$\Psi = R^{*\perp}$$

qui est différent de Θ si $R^* \neq \{0\}$ c'est-à-dire s'il existe des relations de résonance.

On définit alors l'espace

$$\Psi_k = (\Theta_k^* + R^*)^\perp = \Psi \cap \{ \theta_k = 0 \}.$$

COROLLAIRE 1 : La solution u_α de (10) est une solution oscillante si et seulement si on a $\alpha \in \Psi_k^\perp = R^* + \Theta_k^*$, étant identifié à l'espace $\{0\} \times \dots \times \Theta_k^* \times \{0\} \times \dots \times \{0\}$.

Définissons à présent les opérateurs de moyenne, $E_k, 1 \leq k \leq 3$, qui apparaissent en terme source dans le système (3).

DÉFINITION 3 : Soit F une fonction continue de la forme

$$F = \sum_{\alpha} a_{\alpha} e^{i \langle \alpha, \theta \rangle}.$$

L'opérateur de moyenne sur le mode k , noté E_k , est défini de la façon suivante

$$E_k(F) = \sum_{\alpha \in \Theta_k^* + R^*} a_{\alpha} e^{i \langle \alpha, \theta \rangle}.$$

Dans [3], Joly, Métivier et Rauch proposent une extension de cette définition aux fonctions continues presque-périodiques.

DÉFINITION 4 : Soit F une fonction continue presque-périodique en θ_1, θ_2 et θ_3

$$E_k F = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^{d_k}} \int_{TB_{\psi_k}} F(\theta + \sigma) d\sigma$$

où B_{ψ_k} désigne la boule unité de l'espace Ψ_k .

TB_{ψ_k} représente l'homothétique de B_{ψ_k} de rapport T .

$$d_k = \dim \Psi_k \quad \text{et} \quad \text{mes} (B_{\psi_k}) \approx 1.$$

Remarques :

- 1) Si $F \in C_{pp}^0(\Psi)$ alors $E_k F$ est uniquement fonction de la variable θ_k .
- 2) De même on définit l'opérateur de moyenne sur l'ensemble des variables θ_i , $1 \leq i \leq 3$, noté E , en remplaçant l'espace Ψ_k par l'espace Ψ tout entier.

3. RÉSONANCE POUR LES SYSTÈMES 3×3

DÉFINITION 5 : On appelle phases résonnantes, relativement aux champs X_k , $1 \leq k \leq 3$, un triplet (s_1, s_2, s_3) vérifiant

$$(11) \quad \begin{cases} X_1 s_1 = 0 \\ X_2 s_2 = 0 \\ X_3 s_3 = 0 \\ s_1 + s_2 + s_3 = 0. \end{cases}$$

On dit alors que les trois champs de vecteurs sont résonnants.

Nous allons à présent énoncer la définition de la fermeture hexagonale.

DÉFINITION 6 : On considère un point $I(x, t)$ quelconque, on trace les trois courbes caractéristiques (Γ_i^0) , $1 \leq i \leq 3$, passant par ce point, cf. figure 1.

On choisit ensuite arbitrairement un point M_i sur l'une des trois courbes Γ_i^0 et l'on trace les deux autres courbes caractéristiques (Γ_j^1) , $j \neq i$, passant par M_i . On obtient ainsi deux points d'intersection. On part de l'un d'eux et l'on trace la troisième famille de caractéristique.

On construit ainsi une spirale en suivant les courbes caractéristiques des champs.

Si pour tout I et pour tout M_i la spirale se referme, formant ainsi un hexagone, on dit que l'ensemble des trois familles de courbes caractéristiques possède la propriété de fermeture hexagonale.

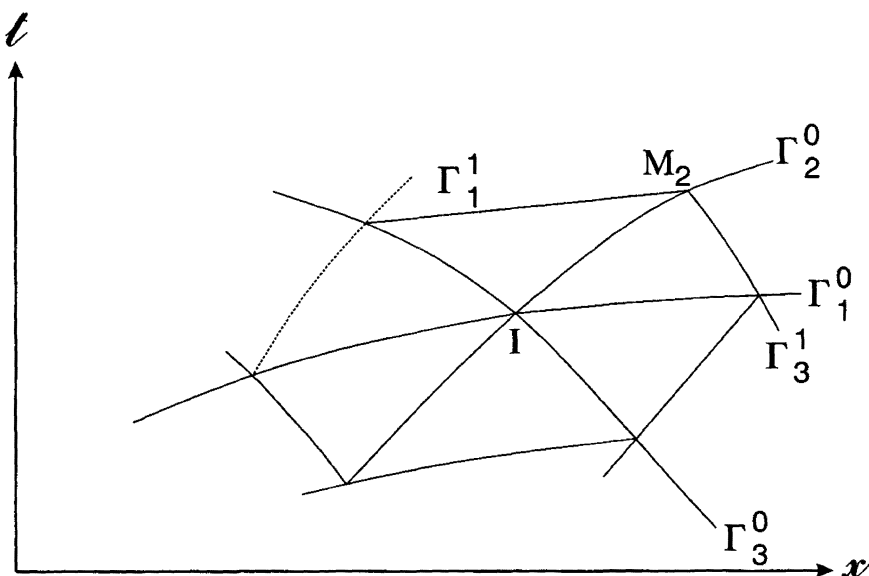


Figure 1. — Fermeture hexagonale.

Le lemme suivant, démontré par Thomsen, établit l'équivalence entre ces deux définitions.

LEMME 2 : *Pour qu'il y ait résonance entre trois champs de vecteurs il faut et il suffit que les trois systèmes de courbes intégrales des champs vérifient la propriété de fermeture hexagonale.*

Par conséquent, lorsqu'il y a résonance entre les 3 champs, on peut alors réaliser un pavage du domaine Ω_0 à partir des 3 familles de courbes caractéristiques qui correspondent au tracé des isovaleurs des phases résonnantes φ_1, φ_2 et φ_3 .

Écrivons à présent les opérateurs de moyenne E_1, E_2 et E_3 agissant sur une fonction F de la variable $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \Psi$ dans le cas où il y a résonance entre les phases.

On suppose F T -périodique en les variables θ_1, θ_2 et θ_3 .

Dans le cas où il y a résonance entre les trois phases φ_1, φ_2 et φ_3 , ces dernières vérifient une relation de la forme

$$\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 + \gamma\varphi_3 = 0$$

par conséquent

$$R^* = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) / \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 \equiv 0\}$$

n'est pas réduit à $\{0\}$; de plus dans [1] Blaschke et Bol démontrent que dans le cas de N champs la dimension de l'espace résonnant vérifie l'inégalité

$$\dim R^* \leq \frac{(N-1)(N-2)}{2}.$$

On en déduit

$$\dim R^* = 1.$$

Cela signifie que le triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \Theta^*$ vérifiant la relation de résonance est unique à une constante multiplicative près.

On a

$$\Psi = \{\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \Theta / \alpha_1 \theta_1 + \alpha_2 \theta_2 + \alpha_3 \theta_3 = 0\}$$

ainsi que

$$\Psi_1 = \left\{ \left(0, \theta_2, -\frac{\alpha_2}{\alpha_3} \theta_2 \right) / \theta_2 \in \Theta_2 \right\}.$$

Par conséquent, l'opérateur E_1 appliqué à F s'écrit

$$(12) \quad E_1 F(\theta_1) = \frac{1}{rT} \int_0^{rT} F\left(\theta_1, s, \frac{-\alpha_1 \theta_1 - \alpha_2 s}{\alpha_3}\right) ds$$

où $r = \max\left(1, \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)$.

En procédant de façon similaire on obtient

$$(13) \quad E_2 F(\theta_2) = \frac{1}{rT} \int_0^{rT} F\left(s, \theta_2, \frac{-\alpha_2 \theta_2 - \alpha_1 s}{\alpha_3}\right) ds$$

où $r = \max\left(1, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)$ ainsi que

$$(14) \quad E_3 F(\theta_3) = \frac{1}{rT} \int_0^{rT} F\left(s, \frac{-\alpha_3 \theta_3 - \alpha_1 s}{\alpha_2}, \theta_3\right) ds$$

où $r = \max\left(1, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$.

Ces opérateurs permettent d'écrire les équations (3) vérifiées par les fonctions profils qui décrivent le comportement asymptotique de la solution du problème de Cauchy (1).

4. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SOLUTION. ÉQUATIONS DES PROFILS

On réécrit le système initial (1)

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon(t, x) + A(t, x) \partial_x u^\varepsilon(t, x) = b(u^\varepsilon) \\ u^\varepsilon(0, x) = h_0^\varepsilon(x) \end{cases}$$

Dans la base des vecteurs propres $(r_k(t, x))$ la solution $u^\varepsilon(t, x)$ du système (1) se décompose sous la forme

$$(15) \quad u^\varepsilon(t, x) = \sum_{k=1}^3 v_k^\varepsilon(t, x) r_k(t, x)$$

où $v_k^\varepsilon(t, x) = \langle l_k(t, x), u^\varepsilon(t, x) \rangle$.

Les fonctions $v_k^\varepsilon(t, x)$, $1 \leq k \leq 3$, sont solutions du problème de Cauchy

$$(16) \quad \begin{cases} X_k v_k^\varepsilon = g_k(v^\varepsilon) & 1 \leq k \leq 3 \\ v_k^\varepsilon(0, x) = \langle l_k(0, x), h_0^\varepsilon(x) \rangle & 1 \leq k \leq 3 \end{cases}$$

avec

$$g_k(v^\varepsilon) = \langle b\left(\sum_{k=1}^3 v_k^\varepsilon r_k\right), l_k \rangle + \sum_{l=1}^3 \langle X_k l_k, r_l \rangle v_l^\varepsilon.$$

La fonction h_0^ε est une donnée oscillante, elle appartient à l'espace $C^0([y_-, y_+]; C_{pp}^0(\Theta^0))$. Nous allons, à présent, énoncer le théorème sur le comportement asymptotique de la solution $u^\varepsilon(t, x)$ du système initial (1) pour ε tendant vers 0, énoncé et démontré dans [7] par Joly, Métivier et Rauch.

THÉORÈME 1 : *Supposons que la condition de transversalité forte soit satisfaite et que la condition initiale U_0 appartienne à l'espace $C^0([y_-, y_+]; C_{pp}^0(\Theta^0))$ alors*

1) *Il existe $T_1 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$ la solution du système (1), u^ε , existe et est bornée sur $\Omega_1 = \Omega_0 \cap \{t \leq T_1\}$.*

2) *Il existe des fonctions $V_k(t, x, \theta) \in C^0(\Omega_0; C^0(\Theta_k))$ définies et bornées sur un domaine $\Omega_2 = (\Omega_0 \cap \{t \leq T_2\}) \times \Theta_k$ $0 < T_2 \leq T_1$ telles que*

$$u^\varepsilon(t, x) - \sum_{k=1}^3 V_k(t, x, \varphi_k(t, x)/\varepsilon) r_k(t, x) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L_\infty(\Omega_2).$$

3) Les V_k sont les uniques solutions de

$$(17) \quad \begin{cases} X_k V_k = E_k(g_k(V)) \\ V_k(0, x, \theta_k) = \langle l_k(0, x), U_0(x, \theta_k) \rangle . \end{cases}$$

L'étude numérique du système des profils (17) nécessite une discrétisation des variables rapides, d'où un coût assez élevé en place mémoire mais aussi en temps. Cette discrétisation nous permettra, cependant, de valider les résultats obtenus en discrétisant (16) par une méthode des caractéristiques que nous présenterons au paragraphe suivant.

5. PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE PARTICULAIRE

Dans [2], Engquist et Hou présentent, pour les systèmes 2×2 à coefficients variables et pour le système de Broadwell 3×3 à coefficients constants (5), une méthode des caractéristiques adaptée au traitement numérique des interactions d'oscillations hautes fréquences, dont l'originalité réside dans la construction du maillage. En effet les nœuds du maillage se trouvent à l'intersection des N ($N = 2$ ou $N = 3$) familles de courbes caractéristiques.

Nous souhaitons étendre aux systèmes semi-linéaires 3×3 , à coefficients variables la méthode proposée par Engquist et Hou exposée dans [2]. La difficulté réside dans le fait que pour un système 3×3 semi-linéaire quelconque les trois familles de courbes caractéristiques ne permettent pas nécessairement d'obtenir un pavage du plan. Cependant lorsque les trois champs de vecteurs satisfont à la propriété de fermeture hexagonale alors on peut réaliser un pavage du domaine Ω_0 . Les nœuds du maillage se trouvent à l'intersection des trois familles de courbes caractéristiques.

Il est alors possible de discrétiser chacune des équations du système (1) en mettant en place une méthode des caractéristiques s'appuyant sur ce maillage.

L'erreur que l'on commet en utilisant cette méthode numérique est due au fait que l'on approche l'intégrale du terme source par la somme de Riemann calculée à partir des nœuds du maillage.

Lorsque l'on veut majorer ce terme d'erreur, deux paramètres h , le pas du maillage, et ε , la période de l'oscillation que l'on souhaite faire tendre vers 0, jouent un rôle important. En effet, nous souhaiterions majorer ce terme d'erreur uniformément en ε ; ceci n'est pas réalisable cependant le maillage proposé permet d'obtenir une majoration presque-uniforme du terme d'erreur, dans le sens où l'on obtient une majoration satisfaisante pour presque tous les couples $(h, \varepsilon) \in [0, 1] \times]0, 1]$.

Nous serons donc amenés à énoncer la définition de la convergence presque-uniforme due à Engquist; ce sera l'objet du paragraphe 6.

Nous démontrerons ensuite au paragraphe 7, que la solution approchée obtenue par la méthode des caractéristiques converge presque-uniformément en ε vers la solution du problème continu (1).

La figure 2 représente un exemple de maillage ainsi obtenu, les nœuds du maillage se trouvent à l'intersection des trois familles de courbes caractéristiques. On constate que les nœuds du maillage initial ne se trouvent pas nécessairement sur l'axe des abscisses.

Nous démontrerons que ce maillage permet un traitement numérique approprié des termes sources que l'on intègre sur les caractéristiques; il permet, en effet, d'obtenir la moyenne numérique du terme source ceci pour presque tous les couples (h, ε) appartenant à $[0, 1] \times]0, 1]$.

On note x_i^n et t_i^n les abscisses et les ordonnées des nœuds du maillage ainsi que $v_{k,i}^n$ l'approximation de la solution continue v_k au nœud (x_i^n, t_i^n) .

Le maillage initial est formé de nœuds $(x_{i_e}^0, t_i^0)$ est strictement positive, or nous avons comme données du problème de Cauchy les fonctions v_k , $1 \leq k \leq 3$, à l'instant $(t = 0)$.

Par conséquent, nous allons affecter aux nœuds du maillage initial des valeurs approchées des solutions v_k obtenues par la méthode des caractéristiques.

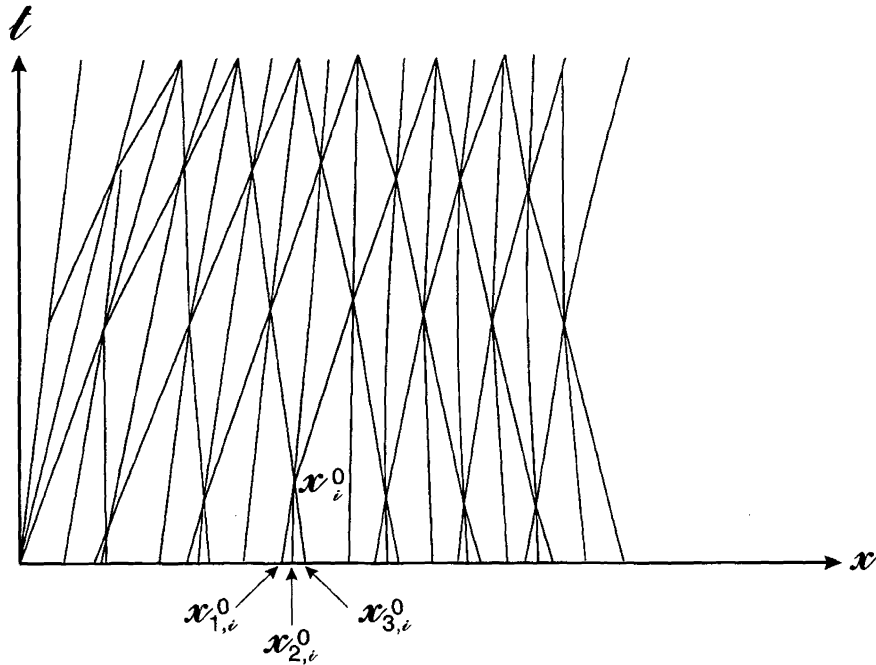


Figure 2. — Représentation du maillage initial.

Les $v_{k,i}^0$, $1 \leq k \leq 3$, désignent les valeurs des solutions discrètes aux nœuds du maillage initial (x_i^0, t_i^0) .

$$(18) \quad (1 \leq k \leq 3) \quad v_{k,i}^0 = V_k^0 \left(x_{k,i}^0, \frac{\varphi^0(x_{k,i}^0)}{\varepsilon} \right) + t_i^0 g_k \left(\left(V_j^0 \left(x_{k,i}^0, \frac{\varphi^0(x_{k,i}^0)}{\varepsilon} \right) \right)_{j=1}^n \right).$$

L'algorithme correspondant à la méthode des caractéristiques associée au maillage précédemment défini est

$$(19) \quad \begin{cases} v_{1,i}^{n+1} = v_{1,i-1}^n + (t_i^{n+1} - t_{i-1}^n) g_1(v_{1,i-1}^n, v_{2,i-1}^n, v_{3,i-1}^n) \\ v_{2,i}^{n+1} = v_{2,i+1}^n + (t_i^{n+1} - t_{i+1}^n) g_2(v_{1,i+1}^n, v_{2,i+1}^n, v_{3,i+1}^n) \\ v_{3,i}^{n+1} = v_{3,i}^n + (t_i^{n+1} - t_i^n) g_3(v_{1,i}^n, v_{2,i}^n, v_{3,i}^n). \end{cases}$$

Nous démontrons la convergence de la solution discrète obtenue par (19) vers la solution exacte du problème de Cauchy (16) lorsque h tend vers 0 presque uniformément en ε .

6. NOTION DE CONVERGENCE PRESQUE UNIFORME

Énonçons tout d'abord la définition de la convergence presque uniforme due à Engquist et Hou présentée dans [2].

DÉFINITION 7 : Soit S une fonction de 2 variables h et ε définie sur $[0, 1] \times]0, 1]$.

On dit que $S(h, \varepsilon)$ converge vers s lorsque h tend vers 0 presque uniformément en ε si

Pour tout $\delta > 0$ il existe $h_0(\delta) > 0$ et $R(h_0) \subset]0, h_0(\delta)] \times]0, 1]$ tels que

1) Pour tout $(h, \varepsilon) \in [0, h_0] \times]0, 1] - R(h_0)$ on ait

$$|S(h, \varepsilon)| < \delta.$$

2) Pour tout ε fixé, $\varepsilon \in]0, 1]$ on ait

$$\text{mes} (\{h \in]0 ; h_0] / (\varepsilon, h) \in R(h_0)\}) < \delta h_0.$$

Nous allons démontrer deux lemmes, que nous utiliserons pour démontrer la convergence presque uniforme de la solution discrète donnée par (19) vers la solution du problème continu (16).

LEMME 3 : Soit $U(x, \theta)$ appartenant à $C^1([0, \alpha] ; C_{pp}^0(\Theta))$, h un entier strictement positif désignant le pas d'un maillage régulier de l'intervalle $[0, \alpha]$ et k_0 et k_1 deux entiers tels que $0 \leq k_0 h \leq k_1 h \leq \alpha$. On définit

$$S(h, \varepsilon, U) = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} hU\left(kh, \frac{kh}{\varepsilon}\right)$$

et

$$I_M = \int_{k_0 h}^{k_1 h} EU(x) dx$$

Alors $S(h, \varepsilon, U) - I_M \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$ presque uniformément en ε et uniformément en k_0 et k_1 .

Preuve : Soit $\delta > 0$, il existe P polynôme trigonométrique dont le degré est noté ν_0

$$P(x, \theta) = \sum_{|\nu| \leq \nu_0} a_\nu(x) e^{i\nu\theta}$$

vérifiant la relation

$$(20) \quad \text{Sup}_{[0, \alpha] \times \mathbb{R}} (|U(x, \theta) - P(x, \theta)|) \leq \frac{\delta}{3\alpha}.$$

De (20) on déduit

$$(21) \quad |EU(x) - EP(x)| \leq \frac{\delta}{3\alpha}.$$

En posant

$$S(h, \varepsilon, P) = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} hP\left(kh, \frac{kh}{\varepsilon}\right)$$

$$\Delta_1 = S(h, \varepsilon, U) - S(h, \varepsilon, P)$$

$$\Delta_2 = S(h, \varepsilon, P) - \int_{k_0 h}^{k_1 h} EP(x) dx$$

$$\Delta_3 = \int_{k_0 h}^{k_1 h} EP(x) - EU(x) dx$$

on a la décomposition suivante

$$S(h, \varepsilon, U) - \int_{k_0 h}^{k_1 h} EU(x) dx = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3.$$

D'après (21) on a

$$|A_3| \leq \frac{\delta}{3}.$$

De plus en utilisant (20) on parvient à

$$|A_1| \leq \frac{\delta}{3}.$$

Compte tenu du fait que

$$EP(x) = a_0(x)$$

on a

$$P(x, \theta) = EP(x) + \sum_{0 < |v| \leq v_0} a_v(x) e^{iv\theta}.$$

On souhaite effectuer une majoration de la quantité A_2 , pour cela on pose

$$S(h, \varepsilon, P) = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} h [a_0(kh) + \sum_{0 < |v| \leq v_0} a_v(kh) e^{iv \frac{kh}{\varepsilon}}].$$

La fonction a_0 étant continue sur $[0, \alpha]$, il existe $h_0(\delta) > 0$ tel que pour tout $h \leq h_0$ on ait

$$\left| \sum_{k=k_0}^{k_1-1} h a_0(kh) - \int_{k_0 h}^{k_1 h} EP(x) dx \right| < \frac{\delta}{6}.$$

Intéressons-nous à présent aux $2v_0$ termes oscillants, qui sont de la forme

$$S(h, \varepsilon, a_v) = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} h a_v(kh) e^{iv_0 \frac{kh}{\varepsilon}}, \quad 1 \leq |v| \leq v_0.$$

Montrons qu'ils convergent vers 0 lorsque h tend vers 0 presque uniformément en ε et uniformément en k_0 et k_1 .

Explicitons pour chacun d'eux, c'est-à-dire à v fixé, les quantités h_v et R_v indépendamment de k_0 et k_1 .

On prend

$$h_v = \frac{\delta^2}{96 v_0^2 (|a_v|_{L^\infty} + \alpha |a'_v|_{L^\infty})}$$

$$R_v(h_v) = \left\{ (h, \varepsilon) \in]0, h_v] \times]0, 1] \mid d\left(v \frac{h}{\varepsilon}, 2\pi\mathbb{Z}\right) \leq \frac{\delta}{2v_0} \right\}$$

en utilisant la règle d'Abel

$$S(h, \varepsilon, a_v) = h \sum_{k=j_0}^{k_1-1} (a_v(kh) - a_v((k+1)h)) \left[\sum_{j=k_0}^k e^{iv \frac{jh}{\varepsilon}} \right] + h \left(\sum_{j=k_0}^{k_1-1} e^{iv \frac{jh}{\varepsilon}} \right) a_v(k_1 h)$$

d'où la majoration

$$|S(h, \varepsilon, a_\nu)| \leq h \frac{2(|a'|_{L^\infty} \alpha + |a|_{L^\infty})}{|e^{i\nu \frac{h}{\varepsilon}} - 1|}.$$

Si $(h, \varepsilon) \notin R_\nu(h_\nu)$ alors on peut minorer le dénominateur

$$|e^{i\nu \frac{h}{\varepsilon}} - 1| \geq \delta / (4 \nu_0)$$

et l'on peut ainsi majorer $|S(h, \varepsilon, a_\nu)|$

$$|S(h, \varepsilon, a_\nu)| \leq h \frac{2(|a'|_{L^\infty} \alpha + |a|_{L^\infty})}{\delta / (4 \nu_0)}.$$

Si $(h, \varepsilon) \notin R_\nu(h_\nu)$ et $h \leq h_\nu$ alors on a

$$|S(h, \varepsilon, a_\nu)| \leq \frac{\delta}{12 \nu_0}, \quad 1 \leq |\nu| \leq \nu_0.$$

Vérifions à présent la condition sur l'ensemble R_ε^ν

$$R_\varepsilon^\nu = \{h \in]0, h_\nu] \mid (h, \varepsilon) \in R_\nu(h_\nu)\}$$

on a

$$mes(R_\varepsilon^\nu) \leq 2 \left(\frac{\delta}{2 \nu_0} \right) \frac{\varepsilon}{\nu} \left[\frac{h_\nu}{\frac{2 \pi \varepsilon}{\nu}} \right]$$

d'où

$$mes(R_\varepsilon^\nu) \leq h_\nu \frac{\delta}{2 \nu_0}.$$

On choisit

$$h_0 = \text{Min}_{|\nu| \leq \nu_0} h_\nu$$

$$R(h_0) = \bigcup_{0 < |\nu| \leq \nu_0} R_\varepsilon^\nu.$$

Si $(h, \varepsilon) \notin R(h_0)$ on a

$$\left| S(h, \varepsilon, P) - \sum_{k=k_0}^{k_1-1} h a_0(kh) \right| \leq \frac{\delta}{6}.$$

Donc pour tout $(h, \varepsilon) \in]0, h_0] \times]0, 1] \setminus R(h_0)$ on a la majoration uniforme en k_0 et k_1

$$A_2 = \left| S(h, \varepsilon, P) - \int_{k_0 h}^{k_1 h} EP(x) dx \right| \leq \frac{\delta}{3}.$$

En tenant compte des majorations obtenues pour Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 on a pour tout $(h, \varepsilon) \in [0, h_0] \times]0, 1] \setminus \mathcal{R}(h_0)$

$$\left| S(h, \varepsilon, U) - \int_{k_0 h}^{k_1 h} EU(x) dx \right| \leq \delta.$$

D'après (22) la condition sur la mesure de $\mathcal{R}(h_0)$ est vérifiée.

Le lemme est donc démontré. ♣

Soient $U(x, \theta) \in C^1([0, \alpha]; C_{pp}^0(\theta))$ et une phase φ de classe C^2 sur $[0, \alpha]$ à valeurs dans $[\varphi_-, \varphi_+]$. On construit un maillage régulier de l'intervalle $[\varphi_-, \varphi_+]$ de pas h , entier strictement positif. On détermine pour chacun des nœuds de ce maillage leurs antécédents pour φ , on obtient r points notés x_i , $0 \leq i \leq r-1$, qui constituent le maillage initial. Soient k_0 et k_1 tels que $0 \leq k_0 \leq k_1 \leq r-1$.

Notons $S(h, \varepsilon)$ la somme de Riemann ainsi définie

$$S(h, \varepsilon) = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} (x_{k+1} - x_k) U\left(x_k, \frac{\varphi(x_k)}{\varepsilon}\right).$$

On a le résultat suivant :

LEMME 4 : $S(h, \varepsilon) - \int_{x_{k_0}}^{x_{k_1}} EU(x) dx \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$ presque uniformément en ε et uniformément en k_0 et k_1 .

Preuve : On peut se ramener au cas où

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} \varphi(x) > 0 \quad \text{pour tout } x.$$

On pose

$$y_k = \varphi(x_k).$$

On note ψ l'inverse de la fonction φ et l'on a

$$x_k = \psi(y_k).$$

On réécrit alors la somme de Riemann $S(h, \varepsilon)$ sous la forme

$$S(h, \varepsilon) = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} (\psi(y_{k+1}) - \psi(y_k)) U\left(\psi(y_k), \frac{kh}{\varepsilon}\right).$$

En effectuant un développement de Taylor de $\psi(y_{k+1})$ au voisinage de y_k on obtient

$$S(h, \varepsilon) = S_1 + S_2$$

$$S_1(h, \varepsilon) = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} h \frac{d}{dx} \psi(y_k) U\left(\psi(y_k), \frac{kh}{\varepsilon}\right)$$

$$S_2(h, \varepsilon) = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} \psi(y_k + \tau h) U\left(\psi(y_k), \frac{kh}{\varepsilon}\right) \quad \tau \in]0, 1[.$$

La fonction φ étant de classe C^2 sur l'intervalle $[0, \alpha]$

$$\exists B > 0 \quad \forall x \in [0, \alpha] \quad \left| \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) \right| < B$$

et l'on a pour tout ε , pour tout k_0 et k_1 la majoration suivante

$$|S_2(h, \varepsilon)| \leq B(Mh) \left(\frac{h}{2}\right) \text{Max}_{[0, \alpha] \times [0, 1]} (|U|).$$

On en déduit que pour tout ε , pour tout k_0 et k_1

$$S_2(h, \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0.$$

D'autre part en utilisant le lemme 3 on montre que $S_1(h, \varepsilon) \rightarrow \int_{x_{k_0}}^{x_{k_1}} EU(x) dx$ lorsque $h \rightarrow 0$ presque uniformément en ε et uniformément en k_0 et k_1 .

On en déduit donc que $S(h, \varepsilon) \rightarrow \int_{x_{k_0}}^{x_{k_1}} EU(x) dx$ lorsque $h \rightarrow 0$ presque uniformément en ε et uniformément en k_0 et k_1 . ♣

7 CONVERGENCE PRESQUE UNIFORME DE LA MÉTHODE NUMÉRIQUE

La démonstration du théorème utilise le lemme suivant énoncé et démontré dans [2].

LEMME 5 : On considère E_n et $R_{m,n}$ appartenant à l_∞ et vérifiant les propriétés suivantes

$$E_{n+1} = (P + \Delta t_n A_n) E_n + R_{n,n+1} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$E_0 = 0$$

On suppose de plus que les opérateurs P et A_n vérifient les propriétés suivantes

$$\|P\| = 1 \quad \text{et} \quad \|A_n\| \leq C$$

ainsi que

$$0 \leq m \leq n \quad R_{n,n+1} + PR_{m,n} = R_{m,n+1}.$$

On a alors la majoration

$$\|E_n\| \leq e^{Ct_n} \text{Max}_{0 < m < k < n} (\|R_{m,k}\|)$$

THÉORÈME 2 : On considère le problème de Cauchy (1). Supposons que la condition de transversalité forte soit satisfaite, que la donnée initiale appartienne à $C^0([y_-, y_+]; C_{pp}^0(\Theta^0))$ et que les trois champs vérifient la propriété de fermeture hexagonale.

Alors la situation discrète donnée par l'algorithme (19) converge presque uniformément en ε vers la solution exacte du problème continu (1) lorsque h tend vers 0.

Démonstration : Les problèmes (1) et (16) étant équivalents, nous démontrerons la convergence presque-uniforme en ε de la solution discrète donnée par l'algorithme (19) vers la solution du problème continu (16). Soit $\delta > 0$.

L'intégration de la première équation de (16) le long de la courbe caractéristique Γ_1 , issue du point x_{i-1-n} , entre les instants t_{i-1}^n et t_i^{n+1} nous donne

$$(23) \quad v_1(t_i^{n+1}, x_i^{n+1}) = v_1(t_{i-1}^n, x_{i-1}^n) + \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^{n+1}} g_1(v_j(s, \gamma_1(s; 0, x_{i-n-1}^0))) ds.$$

En intégrant la seconde équation de (16) le long de la courbe caractéristique Γ_2 , issue du point x_{i+n+1} , entre les instants t_{i+1}^n et t_i^{n+1} on obtient

$$(24) \quad v_2(t_i^{n+1}, x_i^{n+1}) = v_1(t_{i+1}^n, x_{i+1}^n) + \int_{t_{i+1}^n}^{t_i^{n+1}} g_2(v_j(s, \gamma_2(s; 0, x_{i+n+1}^0))) ds.$$

De même on intègre la troisième équation (16) le long de Γ_3 , issue du point x_i , entre les instants t_i^n et t_i^{n+1}

$$(25) \quad v_3(t_i^{n+1}, x_i^{n+1}) = v_3(t_i^n, x_i^n) + \int_{t_i^n}^{t_i^{n+1}} g_3(v_j(s, \gamma_3(s; 0, x_i^0))) ds.$$

Intéressons-nous à présent aux vecteurs E_k^n , $1 \leq k \leq 3$, dont les composantes sont définies de la façon suivante

$$e_{k,i}^n = v_k(t_i^n, x_i^n) - v_{k,i}^n.$$

En soustrayant la première équation de (19) à (23) on obtient

$$e_{1,i}^{n+1} = e_{1,i-1}^n + (t_i^{n+1} - t_{i-1}^n) [g_1(v_j(t_{i-1}^n, x_{i-1}^n)) - g_1(v_{j,i-1}^n)] \\ - \left[\int_{t_{i-1}^n}^{t_i^{n+1}} g_1(v_j(s, \gamma_1(s; 0, x_{i-n-1}^0))) ds - (t_i^{n+1} - t_{i-1}^n) g_1(v_j(t_{i-1}^n, x_{i-1}^n)) \right]$$

en procédant de façon similaire on obtient

$$e_{2,i}^{n+1} = e_{2,i+1}^n + (t_i^{n+1} - t_{i+1}^n) [g_2(v_j(t_{i+1}^n, x_{i+1}^n)) - g_2(v_{j,i+1}^n)] \\ - \left[\int_{t_{i+1}^n}^{t_i^{n+1}} g_2(v_j(s, \gamma_2(s; 0, x_{i+n+1}^0))) ds - (t_i^{n+1} - t_{i+1}^n) g_2(v_j(t_{i+1}^n, x_{i+1}^n)) \right]$$

ainsi que

$$e_{3,i}^{n+1} = e_{3,i}^n + (t_i^{n+1} - t_i^n) [g_3(v_j(t_i^n, x_i^n)) - g_3(v_{j,i}^n)] \\ - \left[\int_{t_i^n}^{t_i^{n+1}} g_3(v_j(s, \gamma_3(s; 0, x_i^0))) ds - (t_i^{n+1} - t_i^n) g_3(v_j(t_i^n, x_i^n)) \right].$$

On pose alors

$$T_1 = g_1(v_j(t_{i-1}^n, x_{i-1}^n)) - g_1(v_{j,i-1}^n)$$

que l'on réécrit sous la forme

$$T_1 = g_1(v_{j,i-1}^n + (v_j(t_{i-1}^n, x_{i-1}^n) - v_{j,i-1}^n)) - g_1(v_{j,i-1}^n)$$

et en utilisant la formule des accroissements finis on obtient

$$T_1 = \sum_{j=1}^3 e_{j,i-1}^n \tilde{g}_{1,j}(v_{j,i-1}^n, v_j(t_{i-1}^n, x_{i-1}^n))$$

d'où

$$T_1 = \sum_{j=1}^3 e_{j,i-1}^n \tilde{g}_{1,i-1,j}, \quad T_2 = \sum_{j=1}^3 e_{j,i+1}^n \tilde{g}_{2,i+1,j}, \quad T_3 = \sum_{j=1}^3 e_{j,i}^n \tilde{g}_{3,i,j}.$$

En posant

$$I_{1,i}^{m,n}(w) = \int_{t_{i-n+m}^n}^{t_i^n} w(s, \gamma_1(s; 0, x_{i-n})) ds - \sum_{k=m}^{n-1} (t_{i-n+k+1}^{k+1} - t_{i-n+k}^k) w(x_{i-n+k}^k, t_{i-n+k}^k)$$

$$I_{2,i}^{m,n}(w) = \int_{t_{i+n-m}^n}^{t_i^n} w(s, \gamma_2(s; 0, x_{i+n})) ds - \sum_{k=m}^{n-1} (t_{i+n-k-1}^{k+1} - t_{i+n-k}^k) w(x_{i+n-k}^k, t_{i+n-k}^k)$$

$$I_{3,i}^{m,n}(w) = \int_{t_i^n}^{t_i^n} w(s, \gamma_3(s; 0, x_i)) ds - \sum_{k=m}^{n-1} (t_i^{k+1} - t_i^k) w(x_i^k, t_i^k)$$

on a

$$e_{1,i}^{n+1} = e_{1,i-1}^n + (t_i^{n+1} - t_{i-1}^n) \sum_{j=1}^3 e_{j,i-1}^n \tilde{g}_{1,j} + I_{1,i}^{n,n+1}(g_1(v_j))$$

$$e_{2,i}^{n+1} = e_{2,i+1}^n + (t_i^{n+1} - t_{i+1}^n) \sum_{j=1}^3 e_{j,i+1}^n \tilde{g}_{2,j} + I_{2,i}^{n,n+1}(g_2(v_j))$$

$$e_{3,i}^{n+1} = e_{3,i}^n + (t_i^{n+1} - t_i^n) \sum_{j=1}^3 e_{j,i}^n \tilde{g}_{3,j} + I_{3,i}^{n,n+1}(g_3(v_j)).$$

Soit

$$E_n = (\dots, e_{3,i-1}^n, e_{2,i-1}^n, e_{1,i-1}^n, e_{3,i}^n, e_{2,i}^n, e_{1,i}^n, \dots)$$

P , opérateur de permutation, est défini ainsi

$$PE_n = (\dots, e_{3,i-1}^n, e_{2,i}^n, e_{1,i-2}^n, e_{3,i}^n, e_{2,i+1}^n, e_{1,i-1}^n, \dots).$$

On définit

$$(\Delta t_n A_n) E_n = \left(\dots, (t_i^{n+1} - t_i^n) \sum_{j=1}^3 e_{j,i}^n \tilde{g}_{3,j}, (t_i^{n+1} - t_{i+1}^n) \sum_{j=1}^3 e_{j,i+1}^n \tilde{g}_{2,j}, (t_i^{n+1} - t_i^n) \sum_{j=1}^3 e_{j,i}^n \tilde{g}_{3,j}, \dots \right)$$

et

$$R_{m,n} = (\dots, I_{3,i}^{m,n}(g_3(v_j)), I_{2,i}^{m,n}(g_2(v_j)), I_{1,i}^{m,n}(g_1(v_j)), \dots).$$

On a la relation

$$E_{n+1} = (P + \Delta t_n A_n) E_n + R_{n,n+1}.$$

Les hypothèses du lemme 5 sur les opérateurs P et A_n sont vérifiées et on a la relation

$$0 \leq m \leq n \quad R_{n,n+1} + PR_{m,n} = R_{m,n+1}.$$

Donc d'après le lemme 5 pour établir que $\text{Sup}_n (E_n)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0 presque uniformément en ε il nous suffit de démontrer que

$$0 \leq m < k < n \quad \|R_{m,k}\| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0 \text{ presque uniformément en } \varepsilon.$$

On souhaite établir

$$\text{Sup}_{m,n} (I_{1,i}^{m,n}(g_1(v_j))) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0 \text{ presque uniformément en } \varepsilon.$$

Les fonctions $g_i((v_j)_{j=1}^3)$, $1 \leq i \leq 3$, étant de classe C^1 , elles peuvent être approchées par des polynômes P_i , $1 \leq i \leq 3$, en les variables v_j , $1 \leq j \leq 3$

$$P_i(v_j) = \sum_{0 \leq k,l,m \leq l_i} \alpha_{i;k,l,m} v_1^k v_2^l v_3^m.$$

Or $I_{1,i}^{m,n}(P_1(v_j))$ peut s'écrire sous la forme

$$I_{1,i}^{m,n}(P_1(v_j)) = \sum_{0 \leq k,l,m \leq l_1} \left[\int_{t_{i-n+m}}^{t_i^n} v_1^k v_2^l v_3^m(s, \gamma_1(s; 0; x_{i-n})) ds - \sum_{k=m}^{n-1} v_1^k v_2^l v_3^m(t_{i-n+k}^k, x_{i-n+k}^k) \right].$$

Il nous suffit donc de démontrer que pour $0 \leq k, l, p \leq l_1$

$$\text{Sup}_{m,n} (I_{1,i}^{m,n}(v_1^k v_2^l v_3^p)) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0 \text{ presque uniformément en } \varepsilon, \varepsilon \in]0; 1].$$

La difficulté est d'établir ce résultat pour ε voisin de 0, $\varepsilon \in]0; \varepsilon(\delta)]$.

Pour $\varepsilon \in [\varepsilon(\delta); 1]$ on a

$$I_{1,i}^{m,n}(v_1^k v_2^l v_3^p) \leq C \frac{h}{\varepsilon}.$$

Pour $\varepsilon \geq h^{3/4}$ on a la majoration

$$I_{1,i}^{m,n}(v_1^k v_2^l v_3^p) \leq Ch^{\frac{1}{4}}$$

donc $I_{1,i}^{m,n}(v_1^k v_2^l v_3^p)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

Pour $\varepsilon \in]0; \varepsilon(\delta)]$ on utilise le théorème 1, on a

$$1 \leq j \leq 3 \quad v_j(t, x) - V_j\left(t, x, \frac{\varphi_j(t, x)}{\varepsilon}\right) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0$$

où les profils V_j sont solutions de (17).

Par conséquent il nous suffit de montrer que

$$\text{Sup}_{m,n} (I_{1,i}^{m,n}(V_1^k V_2^l V_3^p)) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0 \text{ presque uniformément en } \varepsilon.$$

Posons pour simplifier les notations

$$\gamma_1(s) = \gamma_1(s; 0, x_{i-n})$$

et

$$\tilde{\varphi}(s) = (\varphi_1(s, \gamma_1(s)), \varphi_2(s, \gamma_1(s)), \varphi_3(s, \gamma_1(s)))$$

on définit alors

$$W(s, \gamma_1(s), \tilde{\varphi}(s)) = V_1^k \left(s, \gamma_1(s), \frac{\varphi_1^0(x_{i-n}^0)}{\varepsilon} \right) V_2^l \left(s, \gamma_1(s), \frac{\varphi_2(s, \gamma_1(s))}{\varepsilon} \right) V_3^p \left(s, \gamma_1(s), \frac{\varphi_3(s, \gamma_1(s))}{\varepsilon} \right).$$

On a la formulation suivante

$$I_{1,i}^{m,n} (V_1^k V_2^l V_3^m) = \int_{t_{i-n+m}}^{t_i^i} W(s, \gamma_1(s), \tilde{\varphi}(s)) ds - \sum_{k=m}^{n-1} (t_{i-n+k+1}^k - t_{i-n+k}^k) W(t_{i-n+k}^k, \gamma_1(t_{i-n+k}^k), \tilde{\varphi}(t_{i-n+k}^k)).$$

En utilisant le lemme 1 on montre que

$$\text{Sup}_{m,n} \left(\int_{t_{i-n+m}}^{t_i^i} W(s, \gamma_1(s), \tilde{\varphi}(s)) ds - \int_{t_{i-n+m}^m}^{t_i^i} E_1(W(s, \gamma_1(s), \tilde{\varphi})) ds \right) \rightarrow 0 \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Posons

$$S(h, \varepsilon, W) = \sum_{k=m}^{n-1} (t_{i-n+k+1}^k - t_{i-n+k}^k) W(t_{i-n+k}^k, \gamma_1(t_{i-n+k}^k), \tilde{\varphi}(t_{i-n+k}^k)).$$

On a

$$\tilde{\varphi}(t_{i-n+k}^k) = (\varphi^0(x_{i-n}), \varphi_2(t_{i-n+k}^k, \gamma_1(t_{i-n+k}^k)), \varphi_3(t_{i-n+k}^k, \gamma_1(t_{i-n+k}^k))).$$

Or nous avons construit un maillage tel que lorsque l'on se déplace sur l'une des caractéristiques Γ_k les phases φ_i et $\varphi_j, i \neq j \neq k$ aux nœuds du maillage sont régulièrement espacées d'un pas h .

De plus la phase φ vérifie l'hypothèse de transversalité forte, par conséquent on peut appliquer le lemme 3.

On en déduit qu'il existe $h_0 > 0$ et $R(h_0) \subset [0; h_0] \times]0; \varepsilon(\delta)]$ tels que

$$\forall (h, \varepsilon) \in [0, h_0[\times]0; \varepsilon(\delta)] - R(h_0) \quad \left| S(h, \varepsilon, W) - \int_{t_{i-n+m}^m}^{t_i^i} EW(s) ds \right| \leq \delta$$

et $R(h_0)$ vérifiant à ε fixé

$$\text{mes}(\{h, (h, \varepsilon) \in R(h_0)\}) \leq \delta h_0$$

$$S(h, \varepsilon, W) - \int_{t_{i-n+m}^m}^{t_i^i} EW(s) ds \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0 \text{ presque uniformément en } \varepsilon.$$

Il nous faut à présent démontrer que l'on a

$$E_1 W = EW.$$

Il existe P , polynôme trigonométrique dont le degré est noté ν

$$P(s, \gamma(s), \tilde{\varphi}(s)) = \sum_{|\alpha| \leq \nu} a_\alpha(s, \gamma_1(s)) e^{i((\alpha_1 \varphi_1^0 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3)(s, \gamma_1(s)))/\varepsilon}$$

vérifiant

$$(26) \quad \text{Max}_{\Omega \times \Theta} |P - W| \leq \delta.$$

On a

$$P(s, \gamma_1(s), \tilde{\varphi}(s)) = \sum_{|\alpha| \leq \nu} a_\alpha(s, \gamma_1(s)) e^{i \langle \alpha, \tilde{\varphi}(s) \rangle / \varepsilon}.$$

Les termes non oscillants sont obtenus pour les valeurs de α suivantes

$$\alpha \in R^* + \Theta_1^*.$$

Par conséquent on a

$$EP = E_1 P.$$

et l'on déduit de (26) que

$$E_1 W = EW.$$

Pour tout $\delta > 0$ il existe $h_0 > 0$ et $R(h_0) \subset [0, h_0] \times]0, 1]$ tels que pour tout $(h, \varepsilon) \in [0, h_0] \times [0, 1] - R(h_0)$ on ait

$$\left| S(h, \varepsilon, W) - \int_{t_{i-n+m}^m}^{t_i^m} E_1 W(s) ds \right| \leq \delta$$

avec

$$\text{mes}(\{h \in [0; h_0] \mid (h, \varepsilon) \in R(h_0)\}) \leq \delta h_0.$$

Nous avons ainsi démontré que

$$\text{Sup}_{m,n}(I_{1,i}^{m,n}(P_1(v_k))) \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0 \text{ presque uniformément en } \varepsilon.$$

en procédant de façon similaire on démontre qu'il en est de même pour $\text{Sup}_{m,n}(I_{2,i}^{m,n}(P_2(v_k)))$ et $\text{Sup}_{m,n}(I_{3,i}^{m,n}(P_3(v_k)))$. Donc pour toutes fonctions g_j $1 \leq j \leq 3$ suffisamment régulières on a

$$\text{Sup}_{m,n}(I_{j,i}^{m,n}(g_j(v_k))) \rightarrow 0 \quad h \rightarrow 0 \text{ presque uniformément en } \varepsilon.$$

Le théorème est donc démontré. ♣

Cette méthode numérique permet d'obtenir une approximation satisfaisante de la solution u^ε , aux nœuds du maillage, en prenant un pas de discrétisation h qui ne soit pas nécessairement de l'ordre de ε , la période de l'oscillation initiale. Ceci ne nous permet pas d'obtenir une approximation globale de l'oscillation, mais nous allons à partir de cette solution discrète approcher, de façon satisfaisante, la régularisée de la solution continue u^ε pour des couples (h, ε) convenablement choisis.

Soit θ une fonction de classe C_1 à support compact sur $[-1, 1]$ telle que

$$\int_{-1}^1 \theta(x) dx = 1 .$$

On définit pour tout $\sigma > 0$ fixé

$$\theta_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma} \theta\left(\frac{x}{\sigma}\right) .$$

On note $(v_k)_\sigma$ la régularisée de la solution v_k

$$(v_k)_\sigma(t, x) = (v_k * \theta_\sigma)(t, x) = \int_{-1}^1 v_k(t, z) \theta_\sigma(x - z) dz .$$

Définissons, à présent, la régularisée de la solution discrète de la façon suivante

$$(\tilde{v}_k)_\sigma(t_i^n, x_i^n) = \sum_j \tilde{v}_k(t_j^n, x_j^n) \theta_\sigma(x_i^n - x_j^n) (x_{j+1}^n - x_j^n)$$

on démontre le résultat de convergence suivant :

COROLLAIRE 2 : *On considère le problème de Cauchy (1). Supposons que la condition de transversalité forte soit satisfaite, que la donnée initiale appartienne à $C^0([y_-, y_+]; C_{pp}^0(\Theta^0))$ et que les trois champs vérifient la propriété de fermeture hexagonale.*

La régularisée discrète de la solution discrète obtenue par la méthode des caractéristiques converge vers la régularisée de la solution du problème (1) lorsque h tend vers 0 presque uniformément en ε .

La démonstration de ce corollaire utilise le résultat de convergence suivant

$$(v_k)_\sigma \rightarrow (EV_k)_\sigma \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{dans } L_\infty(\Omega_2) .$$

Nous allons donc comparer la régularisée discrète obtenue par la méthode de Engquist et Hou pour des couples (h, ε) convenablement choisis à la régularisée discrète de la moyenne des profils obtenue à partir du même maillage.

8. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Nous allons discrétiser le système semi-linéaire 3×3 avec terme source de type Broadwell suivant

$$(27) \quad \begin{cases} \partial_t v_1 + \lambda_1(t, x) \partial_x v_1 = 2(v_2 v_3 - v_1^2) \\ \partial_t v_2 + \lambda_2(t, x) \partial_x v_2 = v_1^2 - v_2 v_3 \\ \partial_t v_3 + \lambda_3(t, x) \partial_x v_3 = v_1^2 - v_2 v_3 \end{cases}$$

avec

$$(28) \quad \begin{cases} \lambda_1(t, x) = \frac{3 - \gamma}{\gamma + 1} \frac{x - a}{t - b} + 2\beta \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \\ \lambda_2(t, x) = \frac{x - a}{t - b} \\ \lambda_3(t, x) = -\frac{2}{\gamma + 1} \frac{x - a}{t - b} + 2\beta \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \end{cases}$$

Ces trois champs de vecteurs sont proposés dans [7] par Joly, Métivier et Rauch, ils vérifient la propriété de fermeture hexagonale.

Les données initiales considérées sont des ondes oscillantes

$$(29) \quad \begin{cases} v_1(0, x) = 0 \\ v_2(0, x) = \frac{1}{2} \sin^4\left(\pi \frac{x}{2}\right) \left[1 - \cos 2\pi \frac{\varphi^0(x)}{\varepsilon}\right] \chi_{[0, 1.5]} \\ v_3(0, x) = \frac{1}{2} \sin^4\left(\pi \frac{x}{2}\right) \left[1 - \cos 2\pi \frac{\varphi^0(x)}{\varepsilon}\right] \chi_{[1.5, 3]} \end{cases}$$

Les phases φ_k solutions des équations Eikoniales sont

$$(30) \quad \begin{cases} \varphi_1(t, x) = \text{Log} \left[\left(\left| \frac{x - a}{t - b} \right| - \beta \right) |t - b|^{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \right] \\ \varphi_2(t, x) = \text{Log} \left[\left(\left| \frac{x - a}{t - b} \right| - \beta \right) \right] \\ \varphi_3(t, x) = \text{Log} \left[\left(\left| \frac{x - a}{t - b} \right| - \beta \right) |t - b|^{2\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \right] \end{cases}$$

La relation de résonance entre les phases est la suivante

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} (\varphi_2 + \varphi_3).$$

On a choisi comme valeurs pour les paramètres γ, β, a, b

$$\gamma = 1,4 \quad \beta = -1 \quad a = 3,4 \quad b = 2,4.$$

Nous allons tout d'abord discrétiser ce système par la méthode proposée par Engquist et Hou.

Les couples $(h, \varepsilon) \in [0, 1] \times]0, 1]$ pour lesquels la méthode ne permet pas d'obtenir une approximation satisfaisante de la solution sont définis ainsi

$$R = \left\{ (h, \varepsilon), \frac{\varepsilon}{h} = \frac{\nu}{N}, \nu \in \{1; 2; 4\}, N \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

On choisit un couple (h_0, ε_1) n'appartenant pas à R

$$h_0 = 0,01 \quad \varepsilon_1 = 0,00137.$$

Les différents nœuds du maillage sont obtenus à partir du tracé des isovaleurs des phases $\varphi_k, 1 \leq k \leq 3$ régulièrement espacées d'un pas $h = h_0$.

L'algorithme (19), associé au maillage s'écrit

$$(31) \quad \begin{cases} v_{1,i}^{n+1} = v_{1,i}^n + 2(t_i^{n+1} - t_i^n) [v_{2,i}^n v_{3,i}^n - (v_{1,i-1}^n)^2] \\ v_{2,i}^{n+1} = v_{2,i-1}^n + (t_i^{n+1} - t_{i-1}^n) [(v_{1,i-1}^n)^2 - v_{2,i-1}^n v_{3,i-1}^n] \\ v_{3,i}^{n+1} = v_{3,i+1}^n + (t_i^{n+1} - t_{i+1}^n) [(v_{1,i+1}^n)^2 - v_{2,i+1}^n v_{3,i+1}^n] \end{cases}$$

La *figure 3* représente le tracé des isovaleurs des phases φ_1 , φ_2 et φ_3 , régulièrement espacées d'un pas $h_0 = 0,01$, on constate que l'on obtient bien un pavage hexagonal de l'ouvert Ω_0 permettant ainsi la mise en place de la méthode numérique.

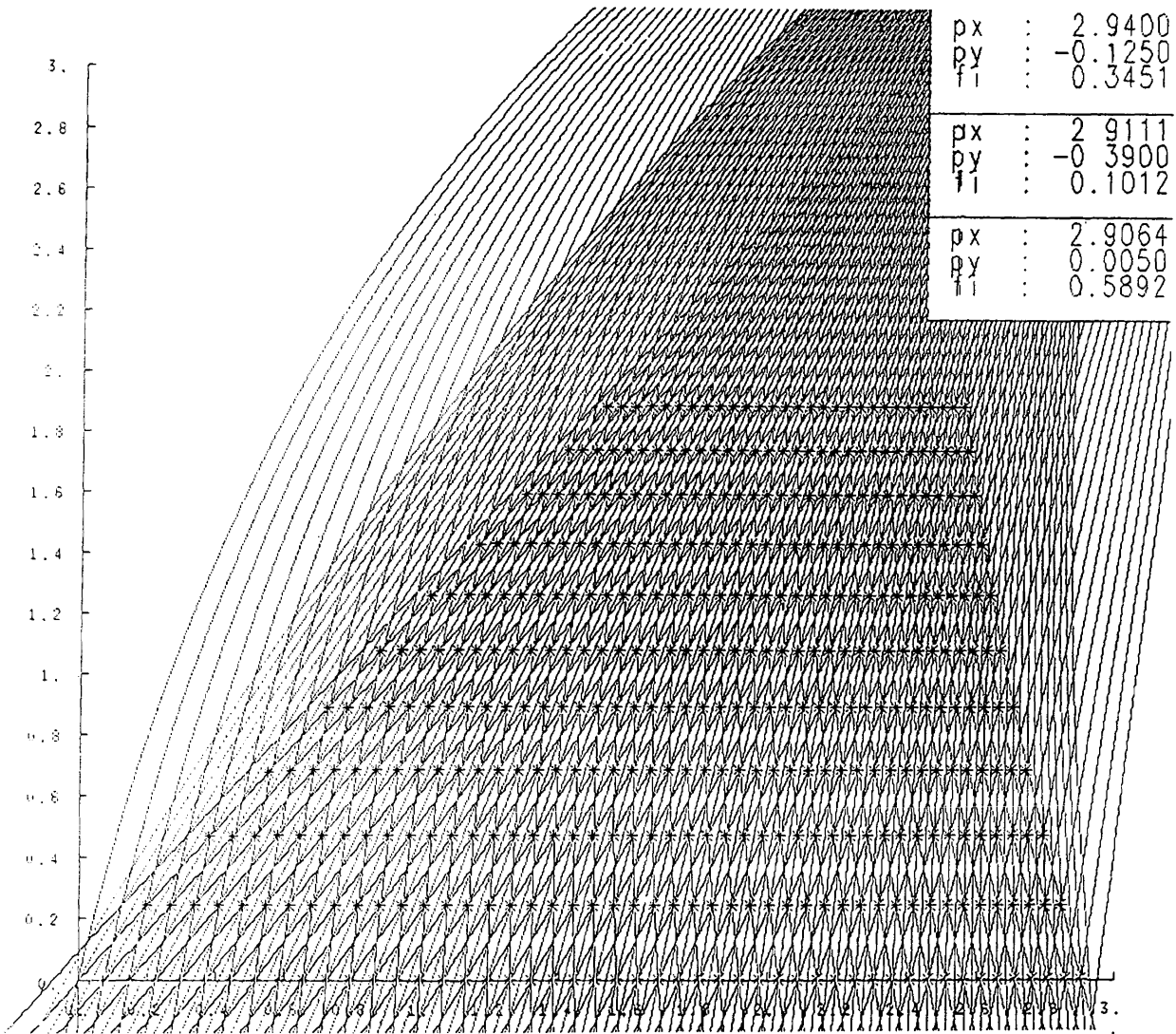


Figure 3

Les *figures 4, 5 et 6* représentent les valeurs approchées des solutions v_1 , v_2 et v_3 aux nœuds du maillage après respectivement 1, 7 et 8 itérations ; ces valeurs sont représentées par le symbole (*). A partir des valeurs ainsi obtenues on calcule la régularisée discrète, aux nœuds du maillage, représentée par le symbole (X) qui compte tenu du choix du couple (h_0, ε_1) doit nous permettre d'obtenir une bonne approximation de la régularisée de la moyenne des profils.

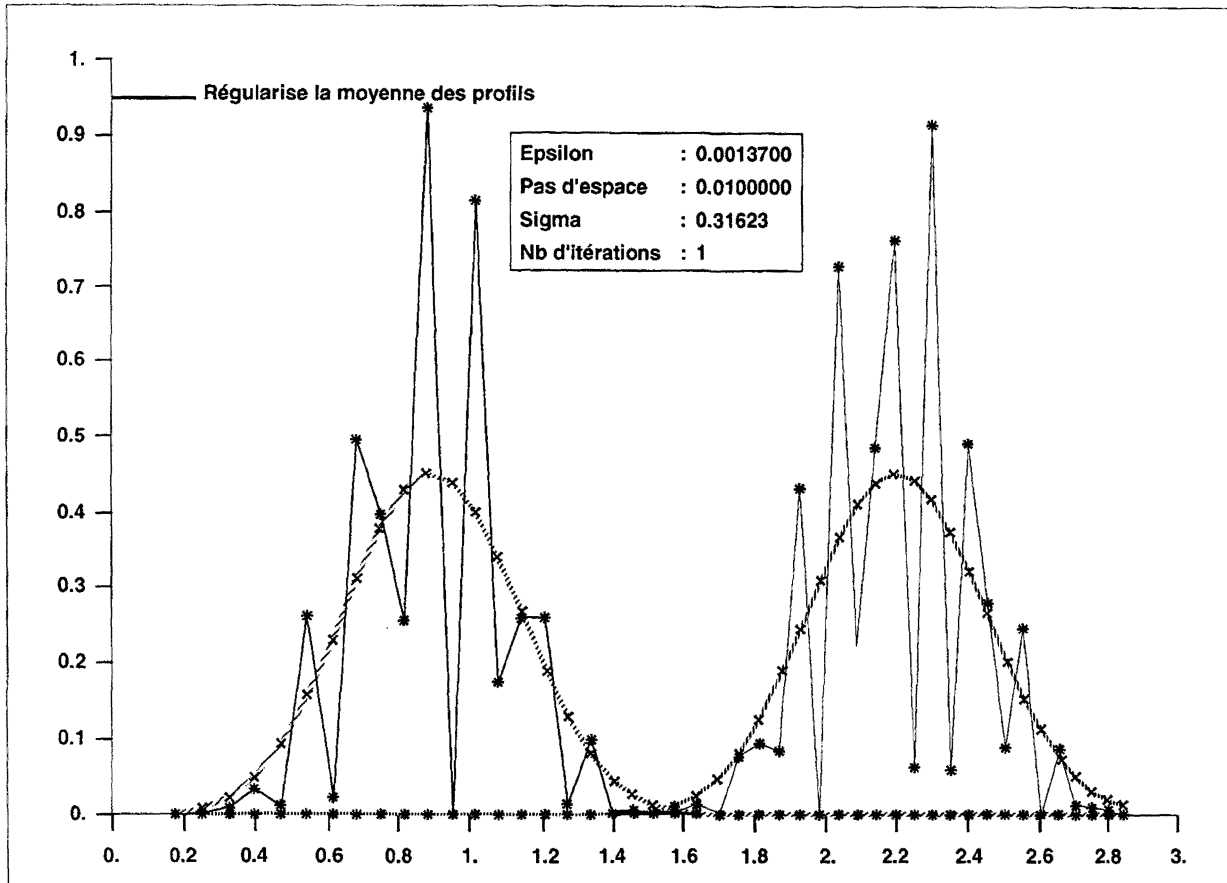


Figure 4

Il est alors intéressant de valider ce résultat en discrétisant le système des profils

$$(32) \quad \begin{cases} \partial_t V_1 + \lambda_1(t, x) \partial_x V_1 = 2(E_1(V_2 V_3) - V_1^2) \\ \partial_t V_2 + \lambda_2(t, x) \partial_x V_2 = E_2(V_1^2) - V_2 E_2(V_3) \\ \partial_t V_3 + \lambda_3(t, x) \partial_x V_3 = E_3(V_1^2) - V_3 E_3(V_2) \end{cases}$$

avec comme données initiales

$$(33) \quad \begin{cases} V_1(0, x, \theta_1) = 0 \\ V_2(0, x, \theta_2) = \frac{1}{2} \sin^4\left(\pi \frac{x}{2}\right) [1 - \cos(2\pi\theta_2)] \chi_{[0, 1.5]} \\ V_3(0, x, \theta_3) = \frac{1}{2} \sin^4\left(\pi \frac{x}{2}\right) [1 - \cos(2\pi\theta_3)] \chi_{[1.5, 3]} \end{cases}$$

Nous souhaitons obtenir une approximation satisfaisante des fonctions profils $V_k(t, x, \theta_k)$ solutions du système (32). Les données initiales sont des fonctions 1-périodiques en les variables θ_k , on met en place un maillage régulier de l'intervalle $[0; 1]$ en prenant comme pas de discrétisation, en θ , $h_\theta = 0,01$. On discrétise alors, à θ fixé, en les variables t et x par une méthode des caractéristiques similaire à celle proposée par Engquist et Hou en prenant comme pas de discrétisation en espace $h = 0,005$. On calcule ensuite les moyennes des fonctions

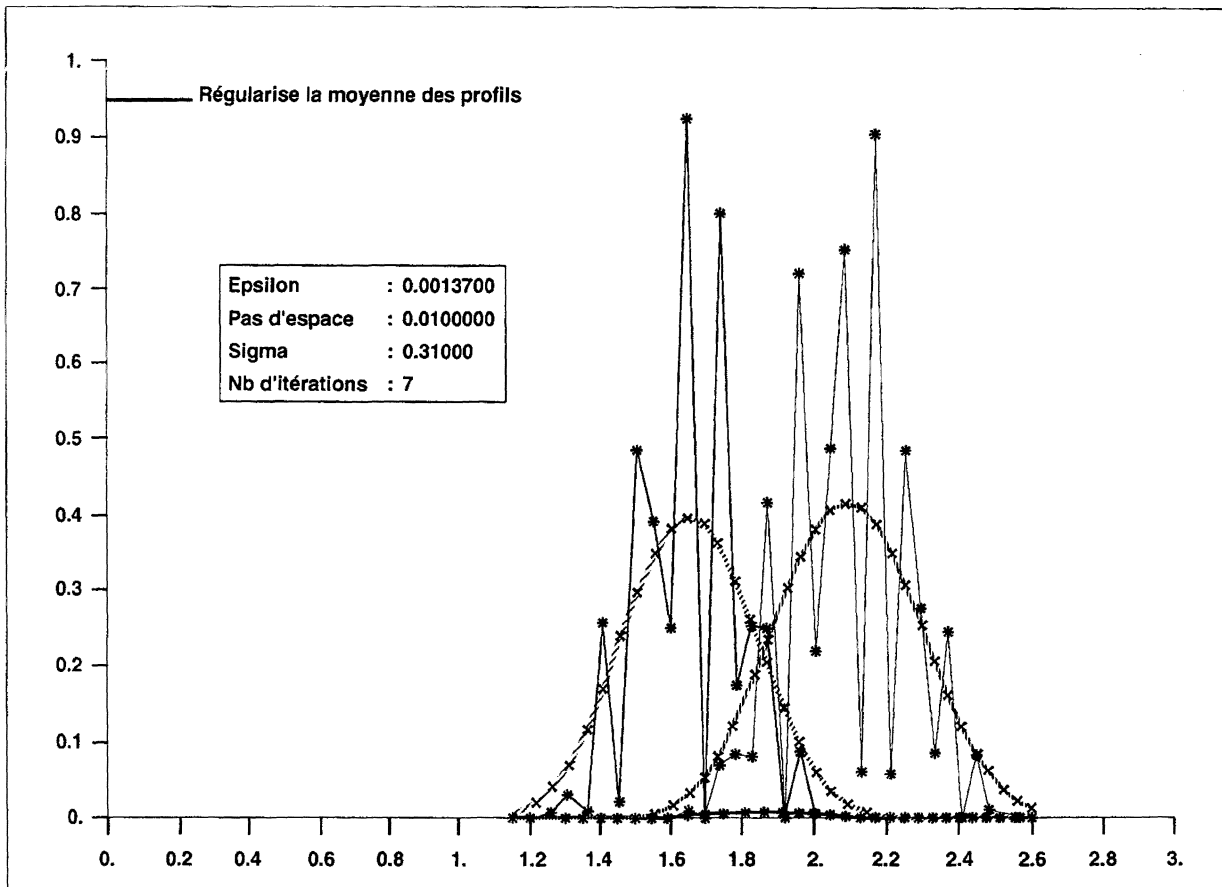


Figure 5

profils $EV_1(t, x)$, $EV_2(t, x)$ et $EV_3(t, x)$ aux nœuds du maillage. Il nous reste alors à calculer pour chacune de ces fonctions la régularisée discrète à partir des valeurs ainsi obtenues. Les valeurs de la régularisée discrète de la moyenne des profils ainsi obtenues sont reliées entre elles par un trait continu épais sur les figures 4, 5 et 6.

Le tableau 7 représente la différence, en norme L^1 , L^2 et L^∞ , entre la régularisée discrète de la moyenne des profils obtenue par discrétisation du système des profils précédemment décrite et celle obtenue à partir de la méthode d'Engquist et Hou pour le couple (h_0, ε_1) . On constate que la méthode d'Engquist et Hou permet d'obtenir une très bonne approximation de la régularisée de la moyenne des profils évitant ainsi une discrétisation coûteuse du système (32).

Tableau 7

| ERREUR | L^∞ | L^1 | L^2 |
|-----------------|--------------------|----------------------|--------------------|
| $(EU_1)_\sigma$ | 2×10^{-3} | $1,5 \times 10^{-3}$ | 2×10^{-3} |
| $(EU_2)_\sigma$ | 4×10^{-3} | $1,6 \times 10^{-3}$ | 3×10^{-3} |
| $(EU_3)_\sigma$ | 4×10^{-3} | $1,6 \times 10^{-3}$ | 3×10^{-3} |

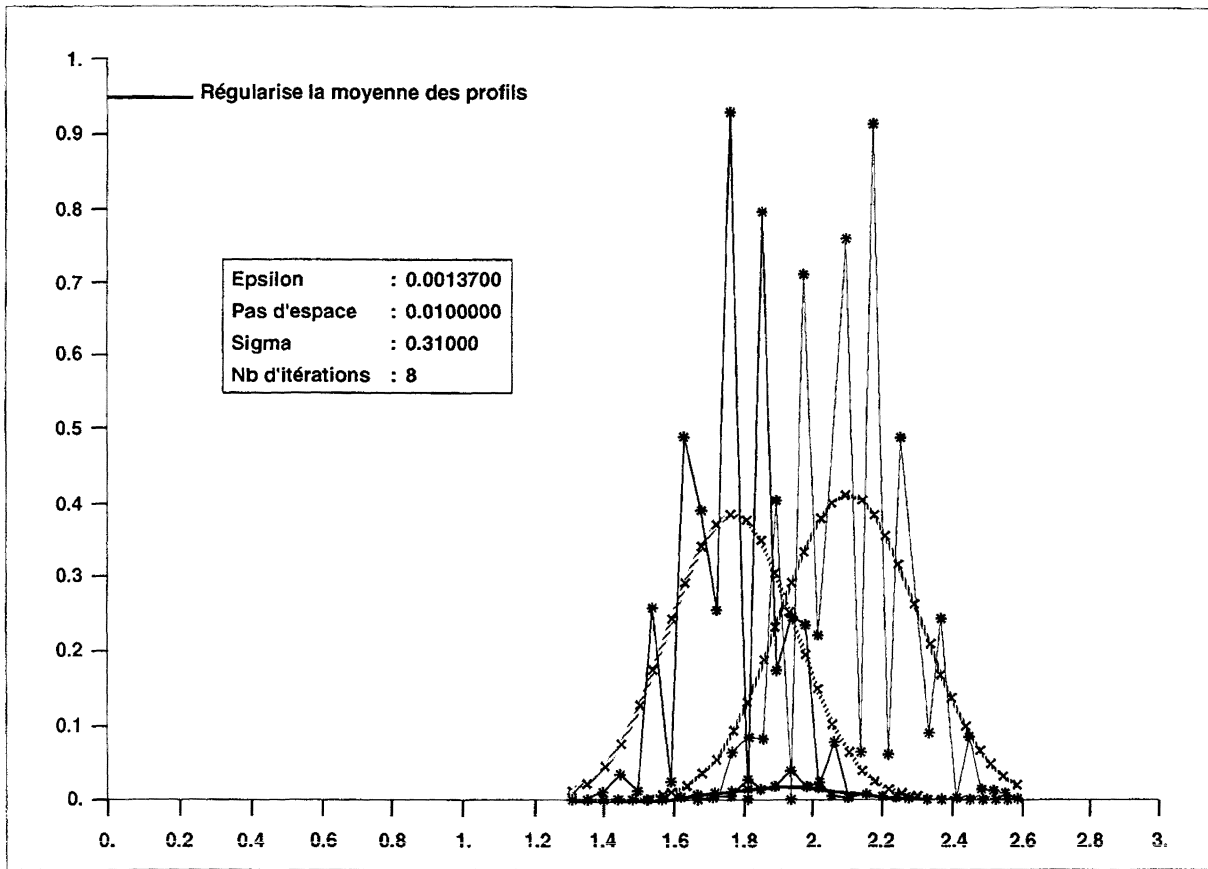


Figure 6

Le tableau 8 représente la différence, en norme L^1 et en norme L^2 entre la régularisée discrète de la moyenne des profils obtenue par discrétisation du système des profils et celle obtenue à partir de la méthode d'Engquist et Hou pour le couple (h_1, ε_1) en prenant

$$h_1 = 2 h_0 .$$

Tableau 8

| ERREUR | L^1 | L^2 |
|-----------------|----------------------|----------------------|
| $(EU_1)_\sigma$ | $1,8 \times 10^{-3}$ | $2,5 \times 10^{-3}$ |
| $(EU_2)_\sigma$ | $2,6 \times 10^{-3}$ | 4×10^{-3} |
| $(EU_3)_\sigma$ | $2,6 \times 10^{-3}$ | 4×10^{-3} |

On constate que même si la précision est moins bonne que précédemment les résultats obtenus demeurent satisfaisants.

On remarque figures 5 et 6 l'apparition de l'onde v_1 , nulle à l'instant initial, qui provient de l'interaction des ondes v_2 et v_3 .

RÉFÉRENCES

- [1] W. BLASCHKE, G. BOL, *Geometrie der Gewebe*, Springer-Verlag, 1937.
- [2] B. ENGQUIST, T. Y. HOU, *Particle method approximation of oscillatory solutions to hyperbolic differential equations*, SIAM, J. Numer. Anal., 1989, 289-319.
- [3] J. L. JOLY, J. RAUCH, *Non linear high frequency hyperbolic waves*, Collection Nonlinear hyperbolic equations and field theory, 1990, 121-143.
- [4] J. L. JOLY, J. RAUCH, *High frequency semi-linear oscillations*, in Wave motion, Theory, Modelling and Computation, Springer Verlag, 1986, 202--216.
- [5] J. L. JOLY, G. METIVIER, J. RAUCH, *Resonant one dimensionnal nonlinear geometric optics*, J. Funct. Anal. 114, 1993, 106-231.
- [6] J. L. JOLY, G. METIVIER, J. RAUCH, *Coherent and focusing multidimensional nonlinear geometric optics*, Preprint.
- [7] J. L. JOLY, G. METIVIER, J. RAUCH, *Generic rigorous asymptotic expansions for weakly non-linear multidimensional oscillatory waves*, Duke Math. J. 70, 1993, 373-404.
- [8] A. MAJDA, R. ROSALES, *Resonantly interacting weakly non linear hyperbolic waves 1 : a single space variable*, Stud. Appl. Math. 71, 1987.
- [9] A. MAJDA, R. ROSALES, SCHOEMBECK, *A canonical system of integrodifferential equations arising in resonant nonlinear acoustics*, Stud. Appl. Math. 79, 1988, 263-270.
- [10] G. B. WHITAM, *Linear and non linear waves*, Wiley, 1974.
- [11] P. GIBEL, *Étude numérique d'ondes oscillantes non linéaires*, Thèse Université Bordeaux I.