

## UN PROBLÈME SPECTRAL ISSU D'UN COUPLAGE ÉLASTO-ACOUSTIQUE

MARIO DURÁN<sup>1, 2</sup> ET JEAN-CLAUDE NÉDÉLEC<sup>1</sup>

**Abstract.** We are interested in the theoretical study of a spectral problem arising in a physical situation, namely interactions of fluid-solid type structure. More precisely, we study the existence of solutions for a quadratic eigenvalue problem, which describes the vibrations of a system made up of two elastic bodies, where a slip is allowed on their interface and which surround a cavity full of an inviscid and slightly compressible fluid. The problem shall be treated like a generalized eigenvalue problem. Thus by using some functional analysis results, we deduce the existence of solutions and prove a spectral asymptotic behavior property, which allows us to compare the spectrum of this coupled model and the spectrum associated to the problem without transmission between the fluid-solid media.

**Résumé.** Nous nous intéressons à l'étude théorique d'un problème spectral d'origine physique se situant dans le domaine des interactions du type fluide-structure. Plus précisément, il s'agit d'étudier l'existence de solutions au problème quadratique de valeurs propres qui décrit les vibrations d'un système formé de deux corps élastiques, ayant entre eux un contact non-rigide et entourant une cavité remplie par un fluide parfait et légèrement compressible. En d'autres termes le problème apparaît comme un problème de valeurs propres généralisé non-standard. Ainsi, en utilisant certains résultats d'analyse fonctionnelle, nous pouvons en déduire l'existence de solutions et démontrer une propriété asymptotique, qui permet d'établir des comparaisons entre le spectre du problème couplé et celui du problème sans transmission entre les milieux fluide et solide (problème découplé).

**Mathematics Subject Classification.** 35P10, 35P20, 73K70.

Reçu : 20 juillet 1999. Révisé : 20 mars 2000.

## INTRODUCTION

Nous nous intéressons à l'étude d'un problème mathématique d'origine physique se situant dans le domaine des interactions du type fluide-structure. Plus précisément, il s'agit d'étudier l'aspect théorique de l'existence de solutions d'un modèle mathématique qui décrit les vibrations d'un système formé de deux corps élastiques ( $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ ), ayant entre eux un contact non-rigide et entourant une cavité ( $\Omega_0$ ) remplie par un fluide parfait et légèrement compressible. L'application industrielle de ce travail est l'utilisation des ultrasons. En particulier, on s'intéresse au contrôle de l'intensité des ondes pour le nettoyage des surfaces. Le but principal de cette étude consiste donc à déterminer les fréquences résonantes de vibration du système. En pratique, on s'intéresse à celles qui correspondent à une importante concentration d'énergie sur une partie bien précise de l'interface fluide-solide  $\gamma \equiv \partial\Omega_0$ . Ce phénomène, observé expérimentalement, s'exprime par la présence d'un certain type

---

*Keywords and phrases.* Couplage élasto-acoustique, problème quadratique de valeurs propres.

<sup>1</sup> Centre de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France.

<sup>2</sup> Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Casilla 306, Santiago 22, Chile. e-mail: mduran@mat.puc.cl; nedelec@cmap.polytechnique.fr

de tourbillon, créant des frottements entre les milieux concernés. Ainsi, nous étudions le problème suivant : Trouver  $\omega \in \mathbb{C}$  pour lequel il existe un couple non-nul  $(\mathbf{u}, \phi)$ , de fonctions  $\mathbf{u} : \Omega_1 \cup \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ ,  $\phi : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{C}$ , et une constante  $\eta \in \mathbb{C}$ , qui satisfont au système d'élasticité

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \omega^2 \rho \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{dans } \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n} &= \mathbf{0} && \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_{2,1}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sur } \Gamma_{2,2}, \\ \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n} &= (-\omega^2 \rho_f \phi + \eta) \mathbf{n} && \text{sur } \gamma, \end{aligned}$$

avec les conditions de transmission sur  $\Gamma_c \equiv \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$  et de conservation de volume

$$\begin{aligned} [u_n] &= 0 && \text{sur } \Gamma_c, \\ [\sigma_n] &= 0 && \text{sur } \Gamma_c, \\ \sigma_{t_1} &= \sigma_{t_2} = \alpha [\mathbf{u}_t] && \text{sur } \Gamma_c, \quad (\alpha > 0) \\ \int_{\gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, ds &= 0, \end{aligned}$$

et à l'équation de Helmholtz

$$\begin{aligned} c^2 \Delta \phi + \omega^2 \phi &= 0 && \text{dans } \Omega_0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} && \text{sur } \gamma. \end{aligned}$$

Sous certaines conditions physiques le phénomène étudié reste local. Dans ce cas, nous considérons des domaines bornés et sommes amenés à résoudre un problème différentiel quadratique de valeurs propres. Ainsi, en utilisant certains résultats d'analyse fonctionnelle, nous décrivons le spectre en question et nous déduisons un comportement asymptotique, qui permet d'établir des comparaisons entre le spectre du problème couplé et celui du problème non-couplé. Cette propriété nous donne, entre autres, la gamme de fréquences pour laquelle le modèle reste valable.

Dans ce travail nous corrigeons et complétons l'interprétation physique du modèle donnée dans [5]. D'autre part, une analyse mathématique approfondie et les démarches pour la simulation numérique peuvent être consultées dans [6] et les références associées.

## 1. POSITION DU PROBLÈME

Dans cette section, nous formulons rigoureusement le modèle mathématique qui décrit le problème physique étudié. D'abord nous fixons toutes les notations à utiliser dans ce travail. Ensuite les hypothèses physiques sont établies, ce qui nous permettra d'écrire le problème différentiel associé et sa formulation variationnelle.

### 1.1. Notations

Soit  $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$  trois sous-ensembles ouverts, connexes et bornés de  $\mathbb{R}^3$  de frontières localement lipschitziennes (voir [10], Chap. I). Nous supposons que ces ensembles sont géométriquement disposés de façon qu'on puisse regarder  $\Omega_0$  comme une cavité fermée qu'entourent  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Pour bien décrire cette géométrie, on a besoin de fixer quelques notations et en même temps d'établir certaines conditions de régularité du domaine. On commence par caractériser la frontière en définissant

$$\gamma_i \equiv \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_0 \quad \forall i = 1, 2, \quad (1.1a)$$

$$\Gamma_c \equiv \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2, \quad (1.1b)$$

$$\Gamma_i \equiv \partial\Omega_i \setminus (\gamma_i \cup \Gamma_c) \quad \forall i = 1, 2, \quad (1.1c)$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_{2,1} \cup \Gamma_{2,2} \quad \text{tel que mesure}(\Gamma_{2,i}) > 0 \quad \forall i = 1, 2. \quad (1.1d)$$

Pour simplifier l'écriture fonctionnelle, on notera souvent

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma_c, \tag{1.1e}$$

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2. \tag{1.1f}$$

Soit  $S$  un sous ensemble de  $\Omega_1$  de frontière régulière et d'intérieur non vide, qui n'est pas nécessairement connexe. On suppose que  $S$  satisfait la condition de localisation

$$S \cap \partial\Omega_1 = \emptyset. \tag{1.2a}$$

En plus, on suppose que l'ensemble  $\Omega_0$  (cavité) satisfait une condition de non-dégénérescence, donnée par

$$\overline{\Omega}_0 \cap \Gamma_i = \emptyset \quad \forall i = 1, 2. \tag{1.2b}$$

On considère dans  $\gamma_i$  et  $\Gamma_i$ , le vecteur normal  $\mathbf{n}$  dirigé vers l'extérieur de  $\Omega_0$  et  $\Omega_i$ , respectivement,  $\forall i = 1, 2$ . Sur l'interface  $\Gamma_c$ , on considère que le vecteur normal  $\mathbf{n}$  pointe vers l'extérieur du domaine  $\Omega_1$  (voir Fig. 1).

Les espaces fonctionnels seront considérés comme des espaces vectoriels complexes de fonctions définies sur des domaines bornés de  $\mathbb{R}^3$  et à valeurs complexes. Les fonctions vectorielles à valeurs dans  $\mathbb{C}^3$  sont notées  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$ , et leurs composantes par  $u_i, v_i, \dots$ , etc. De plus, ces fonctions définies sur  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  sont notées soit par une seule fonction  $\mathbf{u}$ , soit par un couple  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ . Les tenseurs de deuxième ordre sont notés  $e, \sigma, \dots$ , et leurs composantes  $e_{ij}, \sigma_{ij}, \dots$ , etc. Pour exprimer une condition de contact dans l'interface  $\Gamma_c$ , on a besoin des notations suivantes

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \tag{1.3a}$$

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v} - v_n \mathbf{n}, \tag{1.3b}$$

$$\sigma_n = \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \tag{1.3c}$$

$$\sigma_t = \sigma \mathbf{n} - \sigma_n \mathbf{n}. \tag{1.3d}$$

En outre, le saut à travers cette surface sera noté par

$$[\mathbf{v}] = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1. \tag{1.3e}$$

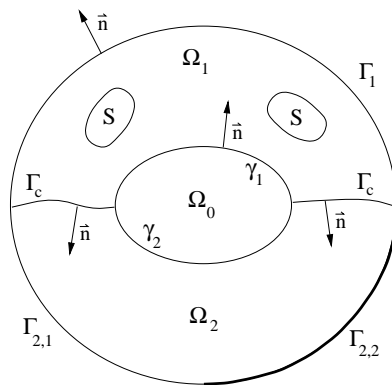


FIGURE 1. Géométrie du domaine.

## 1.2. Formulation du modèle

Ainsi qu'il a été dit, nous étudions les interactions dans un système du type solide-fluide, qui consiste en deux corps solides partageant une cavité remplie d'un fluide. On suppose le système soumis à des forces volumiques s'exerçant sur un des deux corps solides. Sous les hypothèses physiques selon lesquelles les solides sont constitués par des matériaux élastiques, homogènes et isotropes et occupent par ailleurs les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , on a alors les équations du mouvement

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}_1) - \rho_1 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = \mathbf{f}_s \quad \text{dans } \Omega_1, \quad (1.4a)$$

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}_2) - \rho_2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_2}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_2, \quad (1.4b)$$

où  $\mathbf{u}_i$  désigne le déplacement et  $\rho_i$  la densité dans  $\Omega_i$ ,  $\forall i = 1, 2$ . Le vecteur  $\mathbf{f}_s$  représente la force extérieure exercée sur  $\Omega_1$  et  $\sigma$  le tenseur des contraintes donné par la loi de comportement

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}(\mathbf{u}) \quad (\text{Loi de Hooke})$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé,  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker et  $e(\mathbf{u})$  est le tenseur des déformations linéaires, défini par

$$2e(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t.$$

Le fluide sera supposé parfait, légèrement compressible et soumis à un écoulement irrotationnel. Il existe donc un potentiel de déplacement  $\phi$ , tel que la vitesse du fluide est donnée dans  $\Omega_0$  par  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ . Nous allons supposer que le potentiel satisfait l'équation d'ondes suivante

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = 0 \quad \text{dans } \Omega_0, \quad (1.4c)$$

où  $c$  est la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu liquide.

Dans cet article nous nous sommes attachés à traiter la dépendance temporelle en  $e^{-i\omega t}$ ,  $\omega$  (pulsation) étant un nombre complexe différent de zéro. Cela nous conduit à considérer les fonctions inconnues de la forme

$$\mathbf{u}_k(x, t) = \mathbf{u}_k(x) e^{-i\omega t} \quad \forall k = 1, 2, \quad (1.5a)$$

$$\phi(x, t) = \phi(x) e^{-i\omega t}, \quad (1.5b)$$

$$\mathbf{f}_s(x, t) = \mathbf{f}_s(x) e^{-i\omega t}, \quad (1.5c)$$

ce qui nous donne le système des équations stationnaires

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}_1) + \omega^2 \rho_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{f}_s \quad \text{dans } \Omega_1, \quad (1.6a)$$

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}_2) + \omega^2 \rho_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_2, \quad (1.6b)$$

$$\Delta \phi + k^2 \phi = 0 \quad \text{dans } \Omega_0, \quad (1.6c)$$

où  $k$ , le nombre d'onde, est défini par  $k = \omega/c$ .

Précisons maintenant les conditions aux limites du problème. Nous imposons sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_{2,1}$  une condition de frontière libre, c'est-à-dire

$$\sigma(\mathbf{u}_1)\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (1.7a)$$

$$\sigma(\mathbf{u}_2)\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_{2,1}. \quad (1.7b)$$

Ceci signifie qu'on néglige les forces surfaciques exercées par le milieu ambiant. Sur le reste de la frontière extérieure nous allons considérer une condition de Dirichlet homogène

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_{2,2}. \quad (1.7c)$$

Les conditions de contact aux interfaces solide-solide, sont établies en supposant qu'il peut y avoir un glissement. Plus précisément, on suppose que ce contact a lieu sans décollement et que le glissement, de nature élastique, est caractérisé par un coefficient  $\alpha > 0$  (voir [9]) de sorte que

$$[u_n] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c, \quad (1.7d)$$

$$[\sigma_n] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c, \quad (1.7e)$$

$$\sigma_{t_1} = \sigma_{t_2} = \alpha [\mathbf{u}_t] \quad \text{sur } \Gamma_c. \quad (1.7f)$$

Dans cette application physique des ultrasons, nous devons considérer une hypothèse de conservation de volume qui s'exprime

$$\int_{\gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, ds = \sum_{k=1}^2 \int_{\gamma_k} (\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k) \, ds = 0. \quad (1.7g)$$

Cette contrainte surdétermine le modèle mathématique et nous laisse un problème spectral non-standard. Le modèle sans cette condition a été aussi étudié dans [6]. Enfin, la relation entre ces deux problèmes, a été établie dans [2].

Les conditions de transmission dues au couplage solide-fluide sont classiques ; d'une part on a la continuité du tenseur de contraintes

$$\sigma(\mathbf{u}_k)\mathbf{n} = (-p + \eta)\mathbf{n} \quad \text{sur } \gamma_k \quad \forall k = 1, 2,$$

où  $p$  est la pression du fluide et  $\eta \in \mathbb{C}$  représente une rigidité supplémentaire imposée par (1.7g). Dans le cas périodique, la pression est reliée au potentiel de déplacement par la relation

$$p = \omega^2 \rho_f \phi \quad \text{sur } \gamma_1 \cup \gamma_2,$$

ce qui nous donne la condition aux limites

$$\sigma(\mathbf{u}_k)\mathbf{n} = (-\omega^2 \rho_f \phi + \eta)\mathbf{n} \quad \text{sur } \gamma_k \quad \forall k = 1, 2. \quad (1.7h)$$

D'autre part, on a la condition traduisant le fait que la composante relative normale du déplacement dans le fluide sur l'interface avec le corps solide est nulle, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \gamma_k \quad \forall k = 1, 2. \quad (1.7i)$$

### 1.3. Problème de valeurs propres associées

Nous nous sommes intéressés à l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions du problème (1.6a-c), (1.7a-i). Nous allons établir plus loin (voir (2.9)) que ce problème différentiel peut s'écrire, d'un point de vue fonctionnel, sous la forme d'un problème non-linéaire de valeurs propres de type :

$$(A_\omega - \omega B_\omega)\mathbf{v} = \mathbf{f}, \quad (1.9a)$$

où  $A_\omega$  et  $B_\omega$  sont des opérateurs linéaires continus définis dans un espace de Hilbert  $H$  et  $\mathbf{v}, \mathbf{f}$  sont des éléments de  $H$ . Nous nous restreignons ici au cas où ces opérateurs sont tous les deux auto-adjoints et dépendent

analytiquement du paramètre  $\omega$ . En plus nous supposons que  $A_\omega$  est un isomorphisme strictement positif et  $B_\omega$  est un opérateur compact.

Pour aborder donc la question d'existence et unicité de la solution de (1.9a), nous sommes amenés à étudier le problème découplé suivant

$$(\lambda A_\omega - B_\omega) \mathbf{v} = \mathbf{f}, \quad (1.9b)$$

où  $\omega$  est un paramètre complexe fixé. D'après l'Alternative de Fredholm (voir [1]), on se limite à étudier l'équation homogène associée et on considère alors

$$(\lambda A_\omega - B_\omega) \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (1.9c)$$

On sait qu'il existe une quantité dénombrable de complexes  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  telle que (1.9c) admette des solutions non-triviales et que, en dehors de ces valeurs, l'opérateur  $(\lambda A_\omega - B_\omega)$  peut être inversé; donc (1.9b) admet une solution unique. Pour revenir au problème originel (1.9a) et en déduire l'existence et l'unicité de solution, on doit donc étudier le problème suivant : Trouver tous les nombres  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tels qu'on ait l'existence d'au moins une valeur propre  $\lambda_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , satisfaisant la relation

$$\lambda_n = \frac{1}{\omega}. \quad (1.9d)$$

Cela nous amène à résoudre un problème de valeurs propres non-standard d'un opérateur compact auto-adjoint du type (voir par exemple [4, 7])

$$A_\omega^{-\frac{1}{2}} B_\omega A_\omega^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v} = \frac{1}{\omega} \mathbf{v}. \quad (1.9e)$$

Évidemment, on relie  $\omega$  aux valeurs caractéristiques de l'opérateur en question. Donc, nous sommes amenés à étudier le problème de valeurs propres ( $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ) suivant : Trouver  $\omega \in \mathbb{C}$  pour lequel il existe un couple non nul  $((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \phi)$ , de fonctions  $\mathbf{u}_k : \Omega_k \rightarrow \mathbb{C}^3, \forall k = 1, 2$ ,  $\phi : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{C}$ , et une constante  $\eta \in \mathbb{C}$ , qui satisfait aux systèmes d'élasticité suivants

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}_1) + \omega^2 \rho_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_1, \quad (1.10a)$$

$$\sigma(\mathbf{u}_1) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad (1.10b)$$

$$\sigma(\mathbf{u}_1) \mathbf{n} = (-\omega^2 \rho_f \phi + \eta) \mathbf{n} \quad \text{sur } \gamma_1, \quad (1.10c)$$

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}_2) + \omega^2 \rho_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_2, \quad (1.11a)$$

$$\sigma(\mathbf{u}_2) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_{2,1}, \quad (1.11b)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_{2,2}, \quad (1.11c)$$

$$\sigma(\mathbf{u}_2) \mathbf{n} = (-\omega^2 \rho_f \phi + \eta) \mathbf{n} \quad \text{sur } \gamma_2, \quad (1.11d)$$

avec les conditions de transmission et de conservation de volume

$$[u_n] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c, \quad (1.12a)$$

$$[\sigma_n] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c, \quad (1.12b)$$

$$\sigma_{t_1} = \sigma_{t_2} = \alpha [\mathbf{u}_t] \quad \text{sur } \Gamma_c, \quad (1.12c)$$

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\gamma_k} (\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{n}_k) \, ds = 0, \quad (1.12d)$$

et à l'équation de Helmholtz

$$c^2 \Delta \phi + \omega^2 \phi = 0 \quad \text{dans } \Omega_0, \quad (1.13a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \gamma_1, \quad (1.13b)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \gamma_2. \quad (1.13c)$$

#### 1.4. Formulation variationnelle de (1.10)–(1.13)

Pour obtenir la formulation variationnelle, nous commençons par fixer les espaces fonctionnels du travail. Tout d'abord, on s'intéresse à définir l'espace fonctionnel qui représente les déplacements des corps solides, cinématiquement admissibles. Pour cela, on considère l'espace produit  $(H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2))^3$  muni de la norme

$$\|(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\|_1 = \left( \|\mathbf{v}_1\|_{1,\Omega_1}^2 + \|\mathbf{v}_2\|_{1,\Omega_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où  $H^1(\Omega_k)^3$  sont les espaces de Sobolev standards

$$H^1(\Omega_k)^3 = \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega_k)^3 \mid \nabla \mathbf{v} \in L^2(\Omega_k)^9 \},$$

munis de la norme

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega_k} = \left( \int_{\Omega_k} |\mathbf{v}|^2 dx + \int_{\Omega_k} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall k = 1, 2.$$

Plus généralement, nous adoptons les notations habituelles pour le produit scalaire, la norme et la semi-norme dans  $H^s(\Omega)^3 : \langle \cdot, \cdot \rangle_{s,\Omega}, \|\cdot\|_{s,\Omega}$  et  $|\cdot|_{s,\Omega}, \forall s \in \mathbb{R}$ . Comme nous l'avons déjà dit, nous dénotons les déplacements par  $\mathbf{v}$  ou  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ , indifféremment.

Par une application directe de l'inégalité de Korn (voir [11], théorème 2.4.1), la norme  $\|\cdot\|_1$  définie ci-dessus est équivalente à la norme

$$\|\mathbf{v}\|_E = \left( \sum_{k=1}^2 \left( \int_{\Omega_k} |\mathbf{v}_k|^2 dx + \int_{\Omega_k} \sigma(\mathbf{v}_k) : e(\bar{\mathbf{v}}_k) dx \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On appelle cette dernière, la norme de l'énergie, et c'est elle que nous retiendrons pour l'espace produit. Si l'on prend en considération la condition aux limites (1.11c) et la condition de transmission (1.12a), on est conduit à définir le sous-espace suivant

$$V = \{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in (H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2))^3 \mid [v_n] = 0 \text{ sur } \Gamma_c \text{ et } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_{2,2} \}.$$

Il est assez facile de voir que  $V$  est un sous-espace fermé de  $(H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2))^3$ , et donc lui-même un espace de Hilbert pour la norme induite. Le lemme suivant montre que la forme bilinéaire définie par

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \sigma(\mathbf{u}_k) : e(\bar{\mathbf{v}}_k) dx + \alpha \int_{\Gamma_c} [\mathbf{u}_t] \cdot [\bar{\mathbf{v}}_t] ds,$$

où  $\alpha$  est la constante strictement positive qui apparaît dans (1.12c), donne sur  $V$  une norme équivalente à celle de l'énergie.

**Lemme 1.1.** *La forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  a les propriétés suivantes :*

(i)  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  est hermitienne et strictement positive sur  $V \times V$ .

(ii)  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  induit une norme sur  $V$ , notée  $\| \cdot \|_V$ , équivalente à la norme d'énergie.

*Preuve.* En utilisant les expressions du tenseur des contraintes et du tenseur des déformations linéaires, on peut écrire

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \sum_{k=1}^2 \left( 2\mu_k \int_{\Omega_k} e(\mathbf{u}) : e(\bar{\mathbf{v}}) dx + \lambda_k \int_{\Omega_k} \operatorname{div}(\mathbf{u}) \operatorname{div}(\bar{\mathbf{v}}) dx \right) + \alpha \int_{\Gamma_c} [\mathbf{u}_t] \cdot [\bar{\mathbf{v}}_t] ds,$$

où apparaît nettement le caractère hermitien. Si  $\mathbf{u} \in V$  satisfait

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_V = 0$$

alors

$$e(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_k \quad \forall k = 1, 2,$$

donc, il existe des vecteurs  $\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k \in \mathbb{C}^3$  tels que

$$\mathbf{u}_k(x) = \mathbf{a}_k + \mathbf{b}_k \wedge x \quad \text{dans } \Omega_k \quad \forall k = 1, 2,$$

c'est-à-dire que dans chaque domaine nous avons ce qu'on appelle un déplacement rigide. Mais lorsque  $\mathbf{u} \in V$ , la trace de  $\mathbf{u}$  restreinte à  $\Gamma_{2,2}$  est nulle et il s'ensuit que  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ . La condition de transmission, portant sur  $\Gamma_c$  dans la définition de l'espace  $V$ , donne  $u_{1n} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_c$ . De plus le terme de transmission qui apparaît dans  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  nous laisse  $\mathbf{u}_{1t} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_c$ , ce qui nous permet de conclure que  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ , et donc la norme  $\| \cdot \|_V$  est bien définie.

Nous regardons l'équivalence des normes, ce qui nous donnera aussi la positivité. Une des deux estimations est directe. En effet en utilisant la continuité de l'application trace on peut établir directement l'inégalité

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} |[\mathbf{u}_t]|^2 ds &\leq 2 \left( \int_{\Gamma_c} |\mathbf{u}_{1t}|^2 ds + \int_{\Gamma_c} |\mathbf{u}_{2t}|^2 ds \right), \\ &\leq 2 \left( \int_{\partial\Omega_1} |\mathbf{u}_{1t}|^2 ds + \int_{\partial\Omega_2} |\mathbf{u}_{2t}|^2 ds \right), \\ &\leq 2C \left( \|\mathbf{u}_1\|_{1,\Omega_1} + \|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega_2} \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\|\mathbf{u}\|_V^2 \leq (1 + 2C\alpha) \|\mathbf{u}\|_E^2 \quad \forall \mathbf{u} \in V.$$

Pour obtenir une autre constante  $C > 0$ , telle que

$$\|\mathbf{u}\|_E^2 \leq C \|\mathbf{u}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u} \in V,$$

on fait un raisonnement par l'absurde, c'est-à-dire que l'on suppose l'existence d'une suite  $\{\mathbf{u}_n\}_{n \geq 1}$  dans  $V$  avec les propriétés

$$\|\mathbf{u}_n\|_E^2 = 1 \quad \forall n \geq 1, \tag{1.14a}$$

$$\|\mathbf{u}_n\|_V^2 \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1. \tag{1.14b}$$

Comme la suite  $\{\mathbf{u}_n\}_{n \geq 1}$  est bornée dans  $(H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2))^3$ , il existe une fonction  $\mathbf{u}$  appartenant à  $(H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2))^3$  et une sous-suite extraite  $\{\mathbf{u}_{n'}\}_{n' \geq 1}$  telles que

$$\mathbf{u}_{n'} \longrightarrow \mathbf{u} \quad \text{dans } (L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2))^3 \text{ - fort.} \tag{1.15a}$$



Puisque l'espace  $V$  est un Hilbert muni de la norme  $\|\cdot\|_E$ , on déduit de (1.14b) et (1.15a) que

$$\mathbf{u}_{n'} \longrightarrow \mathbf{u} \quad \text{fort dans } V \text{ muni de la norme } \|\cdot\|_E \quad (1.15b)$$

et alors

$$\|\mathbf{u}\|_E = 1. \quad (1.15c)$$

D'autre part (1.14b) entraîne que

$$e(\mathbf{u}) = 0$$

et donc  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , puisque le seul déplacement rigide dans  $V$  est le déplacement nul, ce qui contredit (1.15c) et achève la démonstration.  $\square$

On considère l'espace  $V$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$  et la norme induite  $\|\cdot\|_V$ . On va alors chercher des solutions pour le déplacement appartenant à  $V$ , solutions qui satisfont la condition (1.12d) de conservation du volume de la cavité. Donc, nous définissons l'espace

$$V_0 = \left\{ \mathbf{v} \in V \mid \int_{\gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, ds = 0 \right\}, \quad (1.16)$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme induite  $\|\cdot\|_V$ , et nous le retenons pour la formulation variationnelle.

Pour l'équation de Helmholtz, l'espace naturel dans ce type de formulation est  $H^1(\Omega_0)$ . On précisera un peu plus en considérant  $H$  le sous-espace des fonctions à moyenne nulle, c'est-à-dire

$$H = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega_0) \mid \int_{\Omega_0} \varphi \, dx = 0 \right\}. \quad (1.17a)$$

On munit  $H$  de la norme du gradient

$$|\varphi|_{1,\Omega_0} = \left( \int_{\Omega_0} |\nabla \varphi|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.17b)$$

Il est bien connu que dans l'espace précédent, cette norme est équivalente à la norme standard de  $H^1(\Omega_0)$ . Dans la proposition suivante, on rappelle quelques propriétés liées à ces espaces. Ici, on identifie  $\mathbb{C}$  au sous-espace des fonctions constantes de  $H^1(\Omega_0)$ .

**Proposition 1.2.** *Les espaces  $H$  et  $\mathbb{C}$  décomposent orthogonalement  $H^1(\Omega_0)$ , c'est-à-dire satisfont aux conditions suivantes*

$$H^1(\Omega_0) = H \oplus \mathbb{C}, \quad (1.18a)$$

$$H \perp \mathbb{C}. \quad (1.18b)$$

La démonstration de cette proposition est classique, aussi l'omettrons-nous.

Une fois établi le cadre fonctionnel, nous allons présenter la formulation variationnelle du problème (1.10)–(1.13). En multipliant (1.10a) et (1.11a) par  $\bar{\mathbf{v}}$  dans  $V_0$  et en intégrant par parties sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , on obtient

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \sigma(\mathbf{u}) : e(\bar{\mathbf{v}}) \, dx - \omega^2 \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, dx - \sum_{k=1}^2 \int_{\partial\Omega_k} \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, ds = 0.$$

En considérant les conditions aux limites (1.10b,c, 1.11b-d), en remarquant que le vecteur normal pointe vers l'extérieur du domaine  $\Omega_0$  et que  $\gamma = \partial\Omega_0$  est une surface fermée, l'équation devient

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \sigma(\mathbf{u}) : e(\bar{\mathbf{v}}) \, dx - \omega^2 \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, dx - \omega^2 \rho_f \int_{\gamma} \phi \overline{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})} \, ds - \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_c} \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n}_k \cdot \bar{\mathbf{v}} \, ds = 0.$$

Prenant en compte les conditions de transmission entre les deux solides (1.12a-c), on s'aperçoit que le terme sur  $\Gamma_c$  est égal à

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_c} \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n}_k \cdot \bar{\mathbf{v}} \, ds = -\alpha \int_{\Gamma_c} [\mathbf{u}_t] \cdot [\bar{\mathbf{v}}_t] \, ds,$$

d'où l'on tire

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \sigma(\mathbf{u}) : e(\bar{\mathbf{v}}) \, dx + \alpha \int_{\Gamma_c} [\mathbf{u}_t] \cdot [\bar{\mathbf{v}}_t] \, ds - \omega^2 \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, dx - \omega^2 \rho_f \int_{\gamma} \phi \overline{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})} \, ds = 0. \quad (1.19a)$$

En multipliant (1.13a) par  $\bar{\varphi}$  dans  $H_1(\Omega_0)$ , en intégrant par parties sur  $\Omega_0$  et en prenant en compte (1.13b,c), on obtient l'équation

$$\int_{\Omega_0} \nabla \phi \cdot \nabla \bar{\varphi} \, dx - \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega_0} \phi \bar{\varphi} \, dx - \int_{\gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \bar{\varphi} \, ds = 0. \quad (1.19b)$$

Dans (1.19), on voit bien que le couplage entre milieu solide et fluide est pris en compte comme une intégrale de surface portant sur la frontière de la cavité. On observe aussi que la partie non-couplée de chacune de ces équations est une forme bilinéaire classique, celle de l'élasticité (1.19a) d'une part, celle de Helmholtz (1.19b) d'autre part. On sait que si la partie imaginaire de  $\omega$  est non-nulle alors ces formes bilinéaires deviennent coercives. Il s'ensuit que le problème couplé, sous cette condition, est aussi coercif. En effet, écrivons

$$\omega = \omega_R + i \omega_I \quad \text{avec } \omega_I > 0,$$

et prenons  $\varphi = \phi$  dans (1.19b), ce qui nous donne

$$\|\nabla \phi\|_{0,\Omega_0}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \|\phi\|_{0,\Omega_0}^2 - \int_{\gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \bar{\phi} \, ds = 0. \quad (1.20)$$

D'autre part, si on prend  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  dans l'expression (1.19a) et si l'on remplace le terme croisé en utilisant (1.20), on obtient

$$\|\mathbf{u}\|_V^2 - \omega^2 \sum_{k=1}^2 \rho_k \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega_k}^2 - \omega^2 \rho_f \|\nabla \phi\|_{0,\Omega_0}^2 + \frac{|\omega|^4}{c^2} \rho_f \|\phi\|_{0,\Omega_0}^2 = 0.$$

Alors la forme bilinéaire induite sur  $(V_0 \times H^1(\Omega_0))^2$ , notée  $a(\cdot, \cdot)$ , nous donne un problème coercif, puisque

$$\operatorname{Re}(i\bar{\omega} a((\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{u}, \phi))) \geq C \omega_I \|(\mathbf{u}, \phi)\|_{V \times H^1(\Omega_0)}^2,$$

où  $C$  est une constante qui dépend de  $\omega, c$  et des densités. D'un point de vue physique, le fait que  $\omega_I$  soit non-nul signifie qu'on a un terme d'amortissement, et donc il est naturel d'avoir la  $(V_0 \times H^1(\Omega_0))$ -ellipticité.

On se limitera à considérer le cas  $\omega$  réel et non négatif. En effet, il est assez facile de voir que si  $(\omega, \mathbf{u}, \phi, \eta)$ ,  $\omega \geq 0$ , est une solution du problème (1.10)–(1.13) alors le triplet  $(-\omega, \mathbf{u}, \phi, \eta)$  est aussi une solution. Donc, la formulation variationnelle du problème de valeurs propres est :

$$\text{Trouver } \omega \in \mathbb{R}, \omega \geq 0 \quad (1.21a)$$

et

$$(\mathbf{u}, \phi) \in V_0 \times H^1(\Omega_0), (\mathbf{u}, \phi) \neq (\mathbf{0}, 0), \text{ tels que } \forall (\mathbf{v}, \varphi) \in V_0 \times H^1(\Omega_0), \quad (1.21b)$$

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \sigma(\mathbf{u}) : e(\bar{\mathbf{v}}) dx + \alpha \int_{\Gamma_c} [\mathbf{u}_t] \cdot [\bar{\mathbf{v}}_t] ds - \omega^2 \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} dx - \omega^2 \rho_f \int_{\gamma} \phi \overline{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})} ds = 0, \quad (1.21c)$$

$$\int_{\Omega_0} \nabla \phi \cdot \nabla \bar{\varphi} dx - \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega_0} \phi \bar{\varphi} dx - \int_{\gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \bar{\varphi} ds = 0. \quad (1.21d)$$

On note que (1.21) admet une solution triviale, celle donnée par  $(\omega = 0, \mathbf{u} = \mathbf{0}, \phi = \text{cte})$ . Donc  $\omega = 0$  est une valeur propre du problème (1.21) de sous-espace propre associé  $\{\mathbf{0}\} \times \mathbb{C}^2$ . Évidemment ce cas ne nous intéresse pas et on l'éliminera en prenant  $\varphi = \text{cte}$  dans (1.21d), ce qui nous laisse

$$\omega^2 \int_{\Omega_0} \phi dx = 0, \quad (1.22)$$

d'où l'on déduit que pour tout  $\omega$  non-nul la fonction  $\phi$  appartient à l'espace  $H$ . Dans ce cas on définit la fonction  $\tilde{\phi}$  par

$$\tilde{\phi} = \omega \sqrt{\rho_f} \phi \quad (1.23)$$

et il en résulte la conséquence suivante : si le triplet  $(\omega, \mathbf{u}, \phi)$  est une solution de (1.21) et  $\omega \neq 0$ , alors  $(\omega, \mathbf{u}, \tilde{\phi})$  est une solution du problème variationnel

$$\text{Trouver } \omega \in \mathbb{R}, \omega > 0 \quad (1.24a)$$

et

$$(\mathbf{u}, \tilde{\phi}) \in V_0 \times H, (\mathbf{u}, \tilde{\phi}) \neq (\mathbf{0}, 0), \text{ tels que } \forall (\mathbf{v}, \varphi) \in V_0 \times H, \quad (1.24b)$$

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \sigma(\mathbf{u}) : e(\bar{\mathbf{v}}) dx + \alpha \int_{\Gamma_c} [\mathbf{u}_t] \cdot [\bar{\mathbf{v}}_t] ds - \omega^2 \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} dx - \omega \sqrt{\rho_f} \int_{\gamma} \tilde{\phi} \overline{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})} ds = 0, \quad (1.24c)$$

$$\int_{\Omega_0} \nabla \tilde{\phi} \cdot \nabla \bar{\varphi} dx - \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega_0} \tilde{\phi} \bar{\varphi} dx - \omega \sqrt{\rho_f} \int_{\gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \bar{\varphi} ds = 0. \quad (1.24d)$$

Inversement, en considérant la proposition 1.2, l'égalité (1.23) et la définition de l'espace  $V_0$ , on prouve directement que toute solution du problème (1.24) est aussi une solution de (1.21). Donc, les deux problèmes ont le même spectre, sauf évidemment la valeur propre nulle, et les mêmes vecteurs propres, à une normalisation près.

Il est clair que (1.21) (ou (1.24)), nous donne directement les inconnues  $(\omega, \mathbf{u}, \phi)$ . Pour récupérer la valeur de la constante  $\eta \in \mathbb{C}$  associée, il faut travailler un peu plus. On commence par définir la fonction auxiliaire  $\hat{\mathbf{u}}$  comme l'unique solution du problème classique d'élasticité (voir par exemple [11])

$$-\operatorname{div} \sigma(\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (1.25a)$$

$$\sigma(\hat{\mathbf{u}})\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_{2,1}, \quad (1.25b)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_{2,2}, \quad (1.25c)$$

$$\sigma(\hat{\mathbf{u}})\mathbf{n} = \mathbf{n} \quad \text{sur } \gamma, \quad (1.25d)$$

$$[\hat{u}_n] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c, \quad (1.25e)$$

$$[\sigma_n] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c, \quad (1.25f)$$

$$\sigma_{t_1} = \sigma_{t_2} = \alpha [\hat{\mathbf{u}}_t] \quad \text{sur } \Gamma_c. \quad (1.25g)$$

L'interprétation mécanique de  $\hat{\mathbf{u}}$  est tout simplement la réponse (déformations) du corps élastique soumis à une force unitaire sur l'interface solide-fluide  $\gamma$ .

Ensuite, l'on s'intéresse à la fonction  $\tilde{\mathbf{u}}$  définie comme l'unique solution du problème sans restriction de volume (voir (1.7g))

$$-\operatorname{div} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) = \omega^2 \mathbf{u} \quad \text{dans } \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (1.26a)$$

$$\sigma(\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_{2,1}, \quad (1.26b)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_{2,2}, \quad (1.26c)$$

$$\sigma(\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{n} = -\omega^2 \rho_f \phi \mathbf{n} \quad \text{sur } \gamma, \quad (1.26d)$$

$$[\tilde{u}_n] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c, \quad (1.26e)$$

$$[\sigma_n] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c, \quad (1.26f)$$

$$\sigma_{t_1} = \sigma_{t_2} = \alpha [\tilde{\mathbf{u}}_t] \quad \text{sur } \Gamma_c, \quad (1.26g)$$

d'où l'on déduit la décomposition de la fonction propre  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \eta \hat{\mathbf{u}}, \quad (1.27)$$

et donc la valeur de la constante  $\eta$  puisque

$$\int_{\gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, ds = 0 \Leftrightarrow \eta = - \left( \int_{\gamma} (\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) \, ds \right)^{-1} \int_{\gamma} (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) \, ds. \quad (1.28)$$

Nous citons le travail de Conca et Durán [2], où une interprétation spectrale plus approfondie de la constante  $\eta$  peut être trouvée.

Par la suite et pour des raisons techniques, on se consacrera à l'étude du problème (1.24) et on considèrera l'espace de Hilbert  $V_0 \times H$  muni du produit scalaire

$$\langle (\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \varphi) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V + \langle \phi, \varphi \rangle_H \quad \forall (\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \varphi) \in V_0 \times H, \quad (1.29a)$$

et de la norme induite

$$\|(\mathbf{u}, \phi)\| = \left( \|\mathbf{u}\|_V^2 + \|\phi\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall (\mathbf{u}, \phi) \in V_0 \times H. \quad (1.29b)$$

On remarque que le produit scalaire et la norme dans  $V_0 \times H$  sont notés simplement par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $\|\cdot\|$ .

## 2. EXISTENCE DE VALEURS ET VECTEURS PROPRES

Notre but dans cette section est de donner le théorème d'existence de solution du problème (1.24). Pour cela, on définit rigoureusement les opérateurs liés au problème et on étudie leurs propriétés. Ensuite, nous abordons la question de l'existence en étudiant un problème de valeurs propres généralisé non-standard, ce qui nous permettra d'obtenir le résultat désiré. Plus précisément, on donne une formulation équivalente de (1.24) en utilisant des opérateurs linéaires, compacts et auto-adjoints, ce qui conduit à un problème de valeurs propres du type décrit dans (1.9). On a donc à résoudre un problème spectral qui fait apparaître l'inconnue  $\omega$  (pulsation) dans la définition des opérateurs concernés. En utilisant une technique classique de découplage, on aboutit à une famille de problèmes de valeurs propres paramétré continuellement par  $\omega$ ; donc, pour revenir au problème originel, on est amené à étudier les fonctions définies ponctuellement par les valeurs propres de l'opérateur en question. Grâce au principe du Min-Max, on est capable de caractériser d'une façon précise leurs variations en fonction de la pulsation  $\omega$ , et par suite on peut en déduire le résultat cherché.

## 2.1. Les opérateurs associés au problème (1.24)

Nous commençons par définir les opérateurs qui interviennent dans la suite. Soient les opérateurs linéaires  $A_1, A_2, B_1$  et  $B_2$  ainsi définis

$$A_1 : V_0 \rightarrow V_0, \quad (2.1a)$$

$$A_1 \mathbf{u} = \varphi_1 \quad \forall \mathbf{u} \in V_0; \quad (2.1b)$$

$$A_2 : H \rightarrow H, \quad (2.2a)$$

$$A_2 \phi = \varphi_2 \quad \forall \phi \in H; \quad (2.2b)$$

$$B_1 : H \rightarrow V_0, \quad (2.3a)$$

$$B_1 \phi = \psi_1 \quad \forall \phi \in H; \quad (2.3b)$$

$$B_2 : V_0 \rightarrow H, \quad (2.4a)$$

$$B_2 \mathbf{u} = \psi_2 \quad \forall \mathbf{u} \in V_0. \quad (2.4b)$$

Dans les définitions antérieures, les fonctions  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont les uniques solutions des problèmes variationnels suivants :

$$\text{Trouver } \varphi_1 \in V_0 \text{ tel que} \quad (2.5a)$$

$$\sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, dx = \langle \varphi_1, \mathbf{v} \rangle_V \quad \forall \mathbf{v} \in V_0. \quad (2.5b)$$

$$\text{Trouver } \varphi_2 \in H \text{ tel que} \quad (2.6a)$$

$$\frac{1}{c^2} \int_{\Omega_0} \phi \bar{\varphi} \, dx = \langle \varphi_2, \varphi \rangle_H \quad \forall \varphi \in H. \quad (2.6b)$$

Trouver  $\psi_1 \in V_0$  tel que (2.7a)

$$\sqrt{\rho_f} \int_{\gamma} \phi (\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) ds = \langle \psi_1, \mathbf{v} \rangle_V \quad \forall \mathbf{v} \in V_0. \quad (2.7b)$$

et

Trouver  $\psi_2 \in H$  tel que (2.8a)

$$\sqrt{\rho_f} \int_{\gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \bar{\varphi} ds = \langle \psi_2, \varphi \rangle_H \quad \forall \varphi \in H. \quad (2.8b)$$

Le Théorème de Lax-Milgram nous montre que tous les problèmes (2.5–2.8) sont bien posés, autrement dit, ils ont une solution unique.

Soit le triplet  $(\omega, \mathbf{u}, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times V_0 \times H$  solution de (1.24). En utilisant les opérateurs définis ci-dessus on montre que  $(\omega, \mathbf{u}, \phi)$  est encore solution du système

$$\mathbf{u} - \omega^2 A_1 \mathbf{u} - \omega B_1 \phi = \mathbf{0}, \quad (2.9a)$$

$$\phi - \omega B_2 \mathbf{u} - \omega^2 A_2 \phi = 0. \quad (2.9b)$$

Inversement, si  $(\omega, \mathbf{u}, \phi) \in \mathbb{R} \times V_0 \times H$  est une solution de (2.9) et si  $\omega > 0$ , alors en multipliant (2.9a) par  $\bar{\mathbf{v}} \in V_0$  et (2.9b) par  $\bar{\varphi} \in H$ , et en utilisant en outre les définitions des opérateurs, on vérifie que  $(\omega, \mathbf{u}, \phi)$  est solution de (1.24).

## 2.2. Propriétés des opérateurs

Dans cette partie, nous nous sommes attachés à établir les principales propriétés des opérateurs dont nous avons besoin pour énoncer le résultat d'existence de solutions de (1.24). Par la suite, on résumera ces propriétés.

**Proposition 2.1.** *L'opérateur  $A_1$  satisfait aux conditions suivantes :*

- (i)  $A_1$  est un opérateur linéaire, compact et auto-adjoint sur  $V_0$ .
- (ii)  $A_1$  est un opérateur strictement positif, en effet

$$\langle A_1 \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_V = \sum_{k=1}^2 \rho_k \|\mathbf{v}\|_{0, \Omega_k}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V_0. \quad (2.10)$$

On appelle souvent  $A_1$  l'opérateur d'élasticité associé à (1.24). La démonstration de cette proposition est classique et fondée sur la compacité de l'injection canonique de  $(H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2))^3$  dans  $L^2(\Omega)^3$ ; aussi l'omettrons-nous.

**Proposition 2.2.** *L'opérateur  $A_2$  satisfait aux conditions suivantes :*

- (i)  $A_2$  est un opérateur linéaire, compact et auto-adjoint sur  $H$ .
- (ii)  $A_2$  est un opérateur strictement positif, en effet

$$\langle A_2 \varphi, \varphi \rangle_H = \frac{1}{c^2} \|\varphi\|_{0, \Omega_0}^2 \quad \forall \varphi \in H. \quad (2.11)$$

On l'appelle opérateur de Helmholtz associé à (1.24). Le commentaire fait au sujet de la démonstration de la proposition 2.1 restant encore valable, nous l'omettrons.

Maintenant, abordons les termes de couplage présents dans les équations (2.9) ; on montre qu'il s'agit bien d'un couplage auto-adjoint.

**Proposition 2.3.** *Les opérateurs  $B_1$  et  $B_2$  satisfont aux conditions suivantes :*

- (i)  $B_1$  et  $B_2$  sont des opérateurs linéaires et compacts de  $H$  dans  $V_0$  et de  $V_0$  dans  $H$ , respectivement.  
(ii) Les opérateurs adjoints associés sont donnés par

$$B_1^* = B_2, \quad (2.12a)$$

$$B_2^* = B_1. \quad (2.12b)$$

*Preuve.* La continuité des applications traces nous donne

$$\left| \int_{\gamma} \varphi(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) \, ds \right| \leq C \|\varphi\|_H \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall (\mathbf{v}, \varphi) \in V_0 \times H,$$

d'où l'on déduit que  $B_1$  et  $B_2$  sont continus. Puis, la compacité de l'injection canonique de  $H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$  nous donne la compacité des opérateurs concernés.

Soit  $\mathbf{v} \in V_0$  et  $\varphi \in H$ , alors on peut écrire (2.7b) et (2.8b) sous la forme

$$\begin{aligned} \langle B_1 \varphi, \mathbf{v} \rangle_V &= \sqrt{\rho_f} \int_{\gamma} \varphi(\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n}) \, ds, \\ \langle B_2 \mathbf{v}, \varphi \rangle_H &= \sqrt{\rho_f} \int_{\gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \bar{\varphi} \, ds, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$\langle B_1 \varphi, \mathbf{v} \rangle_V = \langle \varphi, B_2 \mathbf{v} \rangle_H \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \forall \varphi \in H,$$

ce qui nous montre (2.12) et achève la démonstration.  $\square$

### 2.3. Le spectre du problème (1.24)

#### 2.3.1. Le problème de valeurs propres non standard associé à (1.24)

Une fois que le cadre fonctionnel est bien fixé, nous pouvons nous en servir pour démontrer le résultat d'existence cherché. Tout d'abord, on adopte une notation matricielle sur l'espace  $V_0 \times H$  et on définit l'opérateur  $T_\omega$  qui va nous aider à décrire le spectre du problème (1.24).

On voit directement que le système (2.9) peut s'écrire de la façon suivante

$$\begin{bmatrix} I_{V_0} & 0 \\ 0 & I_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} \omega A_1 & B_1 \\ B_2 & \omega A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \phi \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

où  $I_{V_0}$  et  $I_H$  sont les opérateurs identités de  $V_0$  et  $H$ , respectivement. En définissant l'opérateur  $T_\omega$  comme celui qui apparaît à droite dans (2.13) et en sachant que  $\omega = 0$  n'est pas solution de (1.24), on en déduit que le triplet  $(\omega, \mathbf{u}, \phi)$  est une solution du problème de valeurs propres suivant

$$\text{Trouver } \omega \in \mathbb{R}, \omega > 0 \text{ et} \quad (2.14a)$$

$$(\mathbf{u}, \phi) \in V_0 \times H, (\mathbf{u}, \phi) \neq (\mathbf{0}, 0) \text{ tels que} \quad (2.14b)$$

$$T_\omega(\mathbf{u}, \phi) = \frac{1}{\omega} (\mathbf{u}, \phi) \quad (2.14c)$$

où l'opérateur  $T_\omega$  est défini à  $\omega \in \mathbb{R}$  fixé par

$$T_\omega : V_0 \times H \rightarrow V_0 \times H, \quad (2.15a)$$

$$T_\omega(\mathbf{v}, \varphi) = \begin{bmatrix} \omega A_1 & B_1 \\ B_2 & \omega A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \varphi \end{bmatrix} \quad \forall (\mathbf{v}, \varphi) \in V_0 \times H. \quad (2.15b)$$

**Proposition 2.4.** *Equivalence entre les problèmes (1.24) et (2.14).*

Soit  $(\omega, \mathbf{u}, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times V_0 \times H$  une solution du problème (1.24), alors  $(\omega, \mathbf{u}, \phi)$  est solution de (2.14), et réciproquement.

On voit bien que le problème (2.14) est un problème non-standard de valeurs propres. Malgré cela, on est ramené à l'étude de ce problème puisque l'opérateur jouit de bonnes propriétés, ce qui permet d'utiliser le principe de Min-Max pour caractériser ses valeurs propres. La proposition ci-dessous résume les principales propriétés de  $T_\omega$ .

**Proposition 2.5.** *L'opérateur  $T_\omega$  satisfait aux conditions suivantes :*

- (i)  $\forall \omega \in \mathbb{R}$ ,  $T_\omega$  est un opérateur linéaire, compact et auto-adjoint sur  $V_0 \times H$ .
- (ii) La dépendance par rapport à  $\omega$  est continue.

### 2.3.2. Le spectre du problème non-standard (2.14)

Afin d'aborder la question de l'existence de solutions au problème (2.14) – et donc (1.24) – nous utilisons la technique de découplage qui consiste à considérer d'abord le problème de valeurs propres standard

$$\text{Trouver } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et} \quad (2.16a)$$

$$(\mathbf{w}, \xi) \in V_0 \times H, (\mathbf{w}, \xi) \neq (\mathbf{0}, 0) \text{ tels que} \quad (2.16b)$$

$$T_\omega(\mathbf{w}, \xi) = \lambda(\mathbf{w}, \xi) \quad (2.16c)$$

où  $\omega$  n'intervient que comme un paramètre réel fixé. Ensuite, en constatant la dépendance de l'opérateur par rapport à ce paramètre, on est amené à regarder les solutions  $(\lambda, \mathbf{w}, \xi) \in \mathbb{R} \times V_0 \times H$  du problème (2.16) comme fonctions de  $\omega$ . On écrira de préférence

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda(\omega), \\ (\mathbf{w}, \xi) &= (\mathbf{w}, \xi)(\omega). \end{aligned}$$

Finalement, on est conduit à étudier les fonctions  $\lambda(\omega)$ , puisque les solutions de (2.14) sont simplement constituées par les intersections des fonctions  $\lambda(\omega)$  avec la courbe  $f(\omega) = \frac{1}{\omega}$ . On commence par donner le résultat d'existence du problème (2.16) pour  $\omega \in \mathbb{R}$  fixé, et on en profite pour préciser quelques notations.

**Proposition 2.6.** *Existence de solutions à (2.16) pour  $\omega$  fixé.*

Supposons le paramètre  $\omega \in \mathbb{R}$  fixé. Alors il existe une quantité infinie dénombrable d'éléments  $(\lambda, \mathbf{w}, \xi) \in \mathbb{R} \times V_0 \times H$ , solutions du problème (2.16). De plus, la suite de nombres réels  $\{\lambda_n\}_{n>0}$  converge vers zéro ; limite qui appartient à la suite si et seulement si  $\omega = 0$ .

*Preuve.* Étant donné la compacité de l'opérateur, il nous reste à montrer que si  $\omega \neq 0$  alors zéro n'est pas une valeur propre de  $T_\omega$ , et que par contre si  $\omega = 0$  alors il l'est. Pour cela, il suffit de regarder l'équation

$$T_\omega(\mathbf{v}, \varphi) = 0. \quad (2.17)$$

Soit  $\omega \neq 0$  et  $(\mathbf{v}, \varphi)$  une solution de (2.17), alors  $(\mathbf{v}, \varphi)$  satisfait aux équations

$$\omega A_1 \mathbf{v} + B_1 \varphi = \mathbf{0}, \quad (2.18a)$$

$$B_2 \mathbf{v} + \omega A_2 \varphi = 0. \quad (2.18b)$$



En multipliant (2.18a) par  $\mathbf{w}$  dans  $V_0$ , on obtient

$$\omega \langle A_1 \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_V + \langle B_1 \varphi, \mathbf{w} \rangle_V = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in V_0,$$

et en utilisant les définitions des opérateurs, on a

$$\omega \sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{v} \cdot \overline{\mathbf{w}} \, dx + \rho_f \int_{\gamma} \varphi (\overline{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{n}) \, ds = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in V_0,$$

d'où l'on tire

$$\sum_{k=1}^2 \rho_k \int_{\Omega_k} \mathbf{v} \cdot \overline{\mathbf{w}} \, dx = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in (D(\Omega_1) \times D(\Omega_2))^3.$$

En recourant à l'argument de densité dans  $(L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2))^3$ , on conclut que  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Si on multiplie (2.18b) par  $\varphi$  dans  $H$ , alors on obtient

$$\|\varphi\|_{0,\Omega_0}^2 = 0,$$

d'où l'on déduit  $\varphi = 0$ . Supposons maintenant que  $\omega = 0$  et soit  $(\mathbf{v}, \varphi)$  une solution de (2.17), alors le couple  $(\mathbf{v}, \varphi)$  satisfait aux équations

$$B_1 \varphi = \mathbf{0}, \tag{2.19a}$$

$$B_2 \mathbf{v} = 0. \tag{2.19b}$$

En conséquence, zéro est une valeur propre de  $T_{\omega=0}$  associée au sous-espace propre non-vide  $(\ker(B_2) \times \ker(B_1))$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

Les valeurs propres positives, qu'on suppose ordonnées d'une façon décroissante, sont notées

$$\lambda_1(\omega) \geq \dots \geq \lambda_n(\omega) \geq \dots > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{2.20a}$$

les valeurs propres négatives, ordonnées en sens inverse, sont notées

$$\lambda_{-1}(\omega) \leq \dots \leq \lambda_{-n}(\omega) \leq \dots < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.20b}$$

Le vecteur propre associé à  $\lambda_n(\cdot), n \in \mathbb{Z}^*$ , est noté  $(\mathbf{w}_n, \xi_n)(\omega)$ . D'après la proposition 2.6, on sait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{-n}(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{2.20c}$$

La proposition 2.7 résume les propriétés des fonctions  $\lambda_n(\cdot)$  dont nous aurons besoin. Nous en concluons immédiatement à l'existence de solutions au problème (2.14). Ensuite, on énoncera quelques résultats supplémentaires et la démonstration de la proposition 2.7. La section s'achèvera sur une généralisation du théorème d'existence.

**Proposition 2.7.** *Les fonctions  $\lambda_n(\cdot), n \in \mathbb{Z}^*$ , définies ponctuellement – pour  $\omega \in \mathbb{R}$  fixé – comme les solutions du problème (2.16), vérifient les propriétés :*

(i)  $\forall n \in \mathbb{Z}^*, \lambda_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue.

(ii)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $\lambda_n$  est strictement positive. De plus, elle est strictement croissante et satisfait l'estimation

$$\delta_n(\omega) \leq \lambda_n(\omega) \leq \omega \alpha_n + 2 \beta_1 \quad \forall \omega \geq 0, \tag{2.21a}$$

où  $\delta_n(\cdot)$  est défini comme suit

$$\delta_n(\omega) = \text{Max}\{2 \beta_n, \omega \alpha_n - 2 \beta_1\}. \tag{2.21b}$$

(iii)  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $\lambda_{-n}$  est strictement négative. De plus, elle est strictement croissante et satisfait l'estimation

$$-2\beta_n \leq \lambda_{-n}(\omega) < 0 \quad \forall \omega \geq 0. \tag{2.21c}$$

(iv) Les fonctions  $\lambda_n(\omega)$  et  $\lambda_{-n}(\omega)$  sont liées par

$$\lambda_{-n}(\omega) = -\lambda_n(-\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{2.21d}$$

□

Les constantes que l'on utilise ci-dessus sont définies pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$  comme suit

$$\alpha_n = \underset{F_{n-1}}{\text{Min}} \underset{\substack{\|(\mathbf{v}, \varphi)\| = 1 \\ (\mathbf{v}, \varphi) \in F_{n-1}^\perp}}{\text{Max}} \sum_{k=1}^2 \rho_k \|\mathbf{v}\|_{0, \Omega_k}^2 + \frac{1}{c^2} \|\varphi\|_{0, \Omega_0}^2, \tag{2.22a}$$

$$\beta_n = \underset{F_{n-1}}{\text{Min}} \underset{\substack{\|(\mathbf{v}, \varphi)\| = 1 \\ (\mathbf{v}, \varphi) \in F_{n-1}^\perp}}{\text{Max}} \sqrt{\rho_f} \operatorname{Re} \left( \int_{\gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \overline{\varphi} \, ds \right), \tag{2.22b}$$

où dans (2.22a,b) le minimum est considéré dans tous les sous espaces  $F_{n-1} \subset V_0 \times H$ , de dimension  $n - 1$ . Il n'est pas difficile de voir que toutes les quantités figurant dans (2.22) sont bien définies et strictement positives. Une interprétation en sera donnée à la suite du résultat suivant.

Nous sommes maintenant en position d'établir l'existence des solutions de (2.14). Ainsi que nous l'avons déjà dit, les solutions cherchées sont fournies par les intersections des fonctions  $\lambda_n(\omega)$  et de la courbe  $f(\omega) = \frac{1}{\omega}$ . Nous voyons directement que les seules fonctions qui nous donnent des solutions sont les  $\lambda_n$  positives. D'autre part, la croissance stricte ne nous laisse qu'une seule solution pour chacune de ces fonctions. Ce qui précède est résumé dans le résultat suivant.

**Théorème 2.8.** *Existence des solutions de (2.14).*

Il existe une infinité dénombrable d'éléments, notés  $(\omega_n, \mathbf{u}_n, \phi_n) \in \mathbb{R}_+ \times V_0 \times H$ , solutions du problème (2.14). De plus, la suite des nombres réels  $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers l'infini, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty. \tag{2.23}$$

*Preuve.* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé. On définit les nombres réels

$$\omega_{1,n} = \frac{1}{\alpha_n} \left( \sqrt{\beta_1^2 + \alpha_n} - \beta_1 \right) > 0, \tag{2.24a}$$

$$\omega_{2,n} = \frac{1}{\delta_n(\omega_{2,n})} > 0. \tag{2.24b}$$

Il est facile de voir que  $\omega_{1,n}$  et  $\omega_{2,n}$  sont bien définies et correspondent aux points d'intersection de la courbe  $f(\omega) = \frac{1}{\omega}$  et des fonctions qui dans (2.21a) bornent  $\lambda_n(\omega)$ . D'après les propriétés de cette fonction énoncées ci-dessus, on déduit que  $\lambda_n(\omega)$  croise forcément la courbe  $f(\omega) = \frac{1}{\omega}$  en un seul point – qu'on appelle  $\omega_n$  – situé dans l'intervalle  $[\omega_{1,n}, \omega_{2,n}]$  (voir Fig. 2). Donc, chacune des fonctions  $\lambda_n(\omega)$  génère un point sur l'axe réel tel que

$$\lambda_n(\omega_n) = \frac{1}{\omega_n} \quad \text{et} \quad \omega_n \in [\omega_{1,n}, \omega_{2,n}]. \tag{2.25a}$$

Ainsi, en définissant pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$

$$(\mathbf{u}_n, \phi_n) \equiv (\mathbf{w}_n, \xi_n)(\omega_n), \tag{2.25b}$$

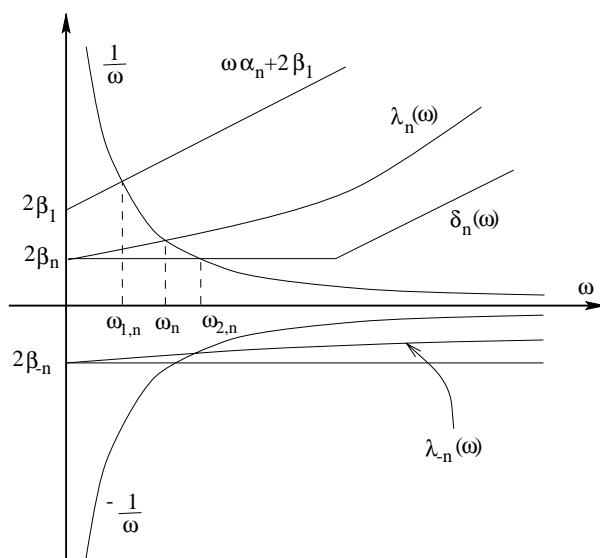


FIGURE 2. Graphiques des fonctions  $\lambda_n(\omega)$  et  $\lambda_{-n}(\omega)$ .

on constate que le triplet  $(\omega_n, \mathbf{u}_n, \phi_n)$  satisfait à l'équation

$$T_{\omega_n}(\mathbf{u}_n, \phi_n) = \frac{1}{\omega_n}(\mathbf{u}_n, \phi_n),$$

c'est-à-dire que  $(\omega_n, \mathbf{u}_n, \phi_n)$  est une solution du problème (2.14). Ce procédé nous donne toutes les solutions cherchées. En effet, supposons que  $(\omega, \mathbf{u}, \phi)$  est une solution de (2.14); alors en prenant  $\mu = \frac{1}{\omega}$ , on déduit que  $(\mu, \mathbf{u}, \phi)$  est une solution de (2.16),  $\omega$  étant un paramètre réel positif fixé. D'après la proposition 2.6, il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que :  $\lambda_m(\omega) = \mu$  et  $(\mathbf{w}_m, \xi_m)(\omega) = (\mathbf{u}, \phi)$ , d'où l'on déduit l'égalité  $\omega = \omega_m$ .

Pour démontrer la convergence de la suite de nombres réels à l'infini, nous raisonnons par contradiction. Supposons qu'il existe une sous-suite de  $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  bornée, c'est-à-dire

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } \omega_{n'} < \eta \quad \forall n' \in I,$$

où  $I \subseteq \mathbb{N}^*$  est l'ensemble d'indices qui caractérise la sous-suite. Soit  $\omega_0 > \eta$ , alors il est facile de voir que les fonctions  $\lambda_{n'}(\omega)$  satisfont à l'estimation suivante

$$\lambda_{n'}(\omega_0) > \frac{1}{\eta} \quad \forall n' \in I, \tag{2.26a}$$

puisque  $\lambda_{n'}(\cdot)$  est strictement croissante et que

$$\lambda_{n'}(\omega_{n'}) = \frac{1}{\omega_{n'}} > \frac{1}{\eta}. \tag{2.26b}$$

Une conséquence directe de (2.26) est que la suite de nombres réels  $\{\lambda_n(\omega_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers zéro, ce qui contredit (2.20c) et donc la proposition 2.6.  $\square$

Maintenant, on établit un résultat préliminaire dont nous aurons besoin pour démontrer la proposition 2.7. Ceci nous donne une caractérisation des valeurs propres du problème (2.16).

**Lemme 2.9.** *Les valeurs propres du problème (2.16) sont caractérisées – pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\omega \in \mathbb{R}$  – comme suit*

$$\lambda_n(\omega) = \underset{F_{n-1}}{\text{Min}} \underset{\substack{\|(\mathbf{v}, \varphi)\| = 1 \\ (\mathbf{v}, \varphi) \in F_{n-1}^\perp}}{\text{Max}} \omega \left( \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{c^2} \|\varphi\|_{0,\Omega_0}^2 \right) + 2\sqrt{\rho_f} \operatorname{Re} \left( \int_{\gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \bar{\varphi} \, ds \right), \quad (2.27a)$$

$$\lambda_{-n}(\omega) = \underset{F_{n-1}}{\text{Max}} \underset{\substack{\|(\mathbf{v}, \varphi)\| = 1 \\ (\mathbf{v}, \varphi) \in F_{n-1}^\perp}}{\text{Min}} \omega \left( \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{c^2} \|\varphi\|_{0,\Omega_0}^2 \right) + 2\sqrt{\rho_f} \operatorname{Re} \left( \int_{\gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \bar{\varphi} \, ds \right). \quad (2.27b)$$

Les expressions antérieures correspondent simplement au produit scalaire  $\langle T_\omega(\mathbf{v}, \varphi), (\mathbf{v}, \varphi) \rangle$  et ces caractérisations des valeurs propres sont une application directe du principe de Min-Max (voir par exemple [3] ou [11]). Il faut noter que pour ne pas surcharger l'écriture, on a adopté la notation

$$\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{k=1}^2 \rho_k \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega_k}^2.$$

On introduit par la suite une autre notation, afin de simplifier l'écriture des expressions données dans (2.27). On écrira  $\forall (\mathbf{v}, \varphi) \in V_0 \times H$

$$E_1(\mathbf{v}, \varphi) = \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{c^2} \|\varphi\|_{0,\Omega_0}^2, \quad (2.28a)$$

$$E_2(\mathbf{v}, \varphi) = \sqrt{\rho_f} \operatorname{Re} \left( \int_{\gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \bar{\varphi} \, ds \right). \quad (2.28b)$$

Si l'on décompose l'opérateur en sa partie diagonale et sa partie hors diagonale, on écrit

$$T_\omega = \omega T^D + 2T^{ND}, \quad (2.29)$$

où les opérateurs  $T^D$  et  $T^{ND}$ , tous deux indépendants de  $\omega$ , sont définis par

$$T^D : V_0 \times H \rightarrow V_0 \times H, \quad (2.30a)$$

$$T^D(\mathbf{v}, \varphi) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \varphi \end{bmatrix} \quad \forall (\mathbf{v}, \varphi) \in V_0 \times H, \quad (2.30b)$$

et

$$T^{ND} : V_0 \times H \rightarrow V_0 \times H, \quad (2.31a)$$

$$T^{ND}(\mathbf{v}, \varphi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \varphi \end{bmatrix} \quad \forall (\mathbf{v}, \varphi) \in V_0 \times H. \quad (2.31b)$$

Il en résulte que les opérateurs définis ci-dessus sont linéaires, compacts et auto-adjoints. En outre, en utilisant le principe de Min-Max, on s'aperçoit que les constantes définies dans (2.22),  $\alpha_n$  et  $\beta_n$ , ne sont autres que les valeurs propres positives de  $T^D$  et  $T^{ND}$ . Ainsi, les estimations (2.21a,c) établissent, en quelque sorte, des comparaisons entre les spectres des opérateurs  $T_\omega$ ,  $T^D$  et  $T^{ND}$ , en fonction du paramètre  $\omega$ .

*Preuve de la proposition 2.7.* En utilisant des résultats standard de la théorie des perturbations des opérateurs compacts (voir par exemple [8], Chap. VII), on montre directement que les fonctions définies ponctuellement  $\lambda(\omega)$ , correspondant aux valeurs propres isolées de  $T_\omega$ , sont continues sur  $\mathbb{R}$ , puisque l'opérateur dépend analytiquement du paramètre  $\omega$ . En outre, d'après la proposition 2.6 et le fait que l'opérateur  $T^{ND}$  a des valeurs

propres positives et négatives, on voit que les fonctions  $\lambda_n$  et  $\lambda_{-n}$  sont correctement définies  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , apportant ainsi la preuve de (i).

Une conséquence immédiate de la proposition 2.6 est l'invariance de signe des fonctions  $\lambda_n(\omega)$ , c'est-à-dire, on a  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \omega \in \mathbb{R}$

$$\lambda_n(\omega) > 0, \quad (2.32a)$$

$$\lambda_{-n}(\omega) < 0. \quad (2.32b)$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $F_{n-1}$  un sous-espace de  $V_0 \times H$  quelconque de dimension  $(n-1)$  fixé. En prenant  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$  tel que :  $\omega_1 < \omega_2$ , alors on a que

$$\omega_1 E_1(\mathbf{v}, \varphi) + 2 E_2(\mathbf{v}, \varphi) < \omega_2 E_1(\mathbf{v}, \varphi) + 2 E_2(\mathbf{v}, \varphi) \quad \forall (\mathbf{v}, \varphi) \in F_{n-1}^\perp \setminus \{(\mathbf{0}, 0)\},$$

où par commodité on a adopté la notation définie dans (2.28). En utilisant la caractérisation de  $\lambda_n(\omega)$  donnée dans (2.27a), on déduit de l'inégalité antérieure que

$$\lambda_n(\omega_1) < \lambda_n(\omega_2) \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \omega_1 < \omega_2,$$

en conséquence la fonction  $\lambda_n(\omega)$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . De la même façon, on montre que

$$\lambda_{-n}(\omega_1) < \lambda_{-n}(\omega_2) \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \omega_1 < \omega_2,$$

c'est-à-dire, la croissance stricte de  $\lambda_{-n}(\omega)$  sur  $\mathbb{R}$ .

Démontrons maintenant les estimations (2.21a,c). On voit bien que pour  $\omega \geq 0$

$$\max_{\substack{\|(\mathbf{v}, \varphi)\| = 1 \\ (\mathbf{v}, \varphi) \in F_{n-1}^\perp}} \omega E_1(\mathbf{v}, \varphi) + 2 E_2(\mathbf{v}, \varphi) \leq \omega \max_{\substack{\|(\mathbf{v}, \varphi)\| = 1 \\ (\mathbf{v}, \varphi) \in F_{n-1}^\perp}} E_1(\mathbf{v}, \varphi) + 2 \max_{\substack{\|(\mathbf{v}, \varphi)\| = 1 \\ (\mathbf{v}, \varphi) \in F_{n-1}^\perp}} E_2(\mathbf{v}, \varphi)$$

et également que

$$\max_{\substack{\|(\mathbf{v}, \varphi)\| = 1 \\ (\mathbf{v}, \varphi) \in F_{n-1}^\perp}} \omega E_1(\mathbf{v}, \varphi) + 2 E_2(\mathbf{v}, \varphi) \leq \omega \max_{\substack{\|(\mathbf{v}, \varphi)\| = 1 \\ (\mathbf{v}, \varphi) \in F_{n-1}^\perp}} E_1(\mathbf{v}, \varphi) + 2 \max_{\|(\mathbf{v}, \varphi)\| = 1} E_2(\mathbf{v}, \varphi),$$

d'où l'on tire la borne supérieure de (2.21a)

$$\lambda_n(\omega) \leq \omega \alpha_n + 2\beta_1 \quad \forall \omega \geq 0.$$

D'autre part, il est clair que

$$\omega E_1(\mathbf{v}, \varphi) - 2\beta_1 \leq \omega E_1(\mathbf{v}, \varphi) + 2E_2(\mathbf{v}, \varphi) \quad \forall (\mathbf{v}, \varphi) \in F_{n-1}^\perp,$$

d'où l'on tire que

$$\omega \alpha_n - 2\beta_1 \leq \lambda_n(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.33a)$$

De  $E_1(\mathbf{v}, \varphi) \geq 0$ , on déduit que

$$2E_2(\mathbf{v}, \varphi) \leq \omega E_1(\mathbf{v}, \varphi) + 2E_2(\mathbf{v}, \varphi) \quad \forall \omega \geq 0,$$

ainsi que

$$2\beta_n \leq \lambda_n(\omega) \quad \forall \omega \geq 0. \quad (2.33b)$$

Donc utilisant (2.33a,b), on obtient l'estimation inférieure de (2.21a). La dernière estimation (2.21c) est obtenue en notant que

$$\beta_{-n} \equiv -\beta_n = \operatorname{Max}_{F_{n-1}} \operatorname{Min}_{\substack{\|(\mathbf{v}, \varphi)\|=1 \\ (\mathbf{v}, \varphi) \in F_{n-1}^\perp}} \sqrt{\rho_f} \operatorname{Re} \left( \int_\gamma (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \bar{\varphi} \, ds \right) \tag{2.34}$$

satisfait

$$2\beta_{-n} \leq \lambda_{-n}(\omega) \quad \forall \omega \geq 0,$$

puisque  $E_1(\mathbf{v}, \varphi) \geq 0$ .

Pour prouver la relation (2.21d), on a besoin de définir l'isométrie  $\Pi$  comme suit

$$\Pi : V_0 \times H \rightarrow V_0 \times H, \tag{2.35a}$$

$$\Pi(\mathbf{v}, \varphi) = (\mathbf{v}, -\varphi) \quad \forall (\mathbf{v}, \varphi) \in V_0 \times H. \tag{2.35b}$$

Il n'est pas difficile de voir que  $\Pi$  satisfait aux relations

$$\dim(\Pi(F)) = \dim(F), \tag{2.36a}$$

$$\Pi(F^\perp) = \Pi(F)^\perp \quad \forall \text{ sous-espace } F \subset V_0 \times H. \tag{2.36b}$$

Alors, nous pouvons établir l'identité suivante

$$\operatorname{Max}_{\substack{\|(\mathbf{v}, \varphi)\|=1 \\ (\mathbf{v}, \varphi) \in F_{n-1}^\perp}} \omega E_1(\mathbf{v}, \varphi) + 2 E_2(\mathbf{v}, \varphi) = \operatorname{Max}_{\substack{\|(\mathbf{v}, \varphi)\|=1 \\ (\mathbf{v}, \varphi) \in \Pi(F_{n-1})^\perp}} \omega E_1(\mathbf{v}, \varphi) - 2 E_2(\mathbf{v}, \varphi),$$

d'où l'on conclut que  $\lambda_n(\omega)$  peut aussi être caractérisé comme suit

$$\lambda_n(\omega) = \operatorname{Min}_{F_{n-1}} \operatorname{Max}_{\substack{\|(\mathbf{v}, \varphi)\|=1 \\ (\mathbf{v}, \varphi) \in F_{n-1}^\perp}} \omega E_1(\mathbf{v}, \varphi) - 2 E_2(\mathbf{v}, \varphi) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \tag{2.37}$$

et d'après (2.27b), on tire l'égalité

$$\lambda_{-n}(\omega) = -\lambda_n(-\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

ce qui achève la démonstration. □

### 2.3.3. Théorème d'existence du problème (1.24)

Maintenant, nous pouvons affirmer l'existence de solutions au problème originel (1.24).

#### **Théorème 2.10.** *Spectre du problème (1.24).*

*Il existe une quantité infinie dénombrable d'éléments  $(\omega_n, \mathbf{u}_n, \phi_n) \in \mathbb{R}_+ \times V_0 \times H$ , solutions du problème (1.24). De plus, la suite de nombres réels  $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers l'infini, c'est-à-dire*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \infty. \tag{2.38}$$

*Preuve.* C'est là une conséquence immédiate de la proposition 2.4 et du théorème 2.8. □

Pour finir cette section nous établissons une propriété asymptotique du spectre du problème (1.24). Plus précisément, on montre que les inverses des racines carrées des valeurs propres de grande magnitude sont voisines des valeurs propres de l'opérateur  $T^D$ ; autrement dit, elles tendent vers les fréquences propres du problème sans couplage. La proposition suivante résume ce qu'on vient d'énoncer.

**Proposition 2.11.** *Pour  $n$  assez grand,  $\omega_n \approx \alpha_n^{-\frac{1}{2}}$ . Plus précisément,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que*

$$\left| \frac{1}{\omega_n^2} - \alpha_n \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0. \quad (2.39)$$

*Preuve.* C'est une conséquence directe des inégalités (2.21) et du théorème 2.10.  $\square$

*Remerciements.* Les auteurs tiennent à remercier le professeur Carlos Conca pour ses conseils, qui ont permis d'améliorer et corriger certains passages de ce travail. Mario DURÁN, avait le soutien du CMAP, École Polytechnique (France) et du Conicyt sous le projet Fondecyt 1971056 (Chile).

## REFERENCES

- [1] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle*. Masson, Paris (1983).
- [2] C. Conca and M. Durán, On some class of elliptic spectral problems. Rapport interne, Facultad de Matemáticas, Universidad Católica de Chile, PUC-FM/99-07 (1999).
- [3] D. de Figueiredo, Positive solutions of semilinear elliptic problems. *Differential Equations Proceedings, Lect. Notes Math.* **957** (1982) 34–84.
- [4] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear Operators. Part II: Spectral Theory*. Wiley-Interscience, New-York (1964).
- [5] M. Durán, *Étude théorique et numérique de quelques problèmes de type fluide-solide*, Partie I. Thèse de doctorat à l'École Polytechnique, Paris (1996).
- [6] M. Durán, Mathematical and numerical analysis of an elastic-acoustic coupling, in *Proceeding of Second ECCOMAS Conference on Numerical Methods in Engineering*, J. Wiley & Sons Ltd. (1996) 888–893.
- [7] V. Hutson and J.S. Pym, *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*. Academic Press, London (1980).
- [8] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, Berlin (1976).
- [9] F. Lene and D. Leguillon, Étude de l'influence d'un glissement entre les constituants d'un matériau composite sur ses coefficients de comportements effectifs. *J. Mécanique* **20** (1981) 509–536.
- [10] J. Nečas, *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*. Masson, Paris (1967).
- [11] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas, *Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles*. Masson, Paris (1983).