

UN SCHÉMA D'INTERPOLATION RATIONNEL SUR UN QUADRILATÈRE DE CLASSE C^2

MOHAMMED LAGHCHIM-LAHLLOU¹

Abstract. Let \mathcal{Q} be a partition of a polygonal domain of the plan into convexe quadrilaterals. Given a regular function f , we construct a function $\Pi f \in C^2(\Omega)$, interpolating position values and derivatives of f up of order 2 at vertices of \mathcal{Q} . On each quadrilateral $Q \in \mathcal{Q}$, $\Pi f|_Q$ is a finite element obtained from a polynomial scheme of FVS type by adding some rational functions.

Résumé. Soit \mathcal{Q} une partition en quadrilatères convexes d'un domaine polygonal Ω du plan. Pour une fonction régulière f donnée, nous construisons une fonction Πf de classe C^2 sur Ω , interpolant les valeurs de f et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 aux sommets de \mathcal{Q} . Pour chaque quadrilatère $Q \in \mathcal{Q}$, $\Pi f|_Q$ est un élément fini obtenu en rajoutant certaines fonctions rationnelles à un schéma d'interpolation polynômial de type FVS.

Mathematics Subject Classification. 41A15, 41A05, 65D07, 65D051, 65N30.

Reçu : 28 janvier 1998. Révisé : 20 mars 2000.

1. INTRODUCTION

Les interpolants de classe C^2 jouent un rôle important dans la représentation des surfaces 3D et ont des applications significatives dans le domaine de la CAO par exemple. Il existe plusieurs méthodes traitant la construction de tels interpolants. Nous nous intéressons plus particulièrement à la méthode des éléments finis pour résoudre précisément le problème d'interpolation d'Hermite classique suivant :

Construire une fonction $g \in C^2(\Omega)$ telle que

$$\partial^\alpha g(A_i) = \partial^\alpha f(A_i), \quad |\alpha| \leq 2, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ et $\partial^\alpha v$ sont les dérivées partielles de v d'ordre $|\alpha|$; $\{A_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, N\}$ est un ensemble fini de points d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et on suppose que les A_i sont les sommets d'une triangulation Δ ou d'une partition en quadrilatères convexes \mathcal{Q} de Ω et que f étant une fonction suffisamment différentiable donnée; g est obtenue par une procédure strictement locale, *i.e.* le calcul des dérivées normales de g d'ordre ≤ 2 sur chaque côté σ de $T \in \Delta$ (resp. $Q \in \mathcal{Q}$) dépend uniquement des données sur σ .

La construction dans ce sens de la plupart des schémas d'interpolation polynômiaux nécessitent au moins comme degrés de liberté des dérivées partielles d'ordre plus grand que 2 aux sommets de l'élément (voir à ce

Keywords and phrases. Finite elements, rational Hermite interpolation.

¹ Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia, Département de Mathématiques, BP S15, 40000 Marrakech, Maroc.
e-mail: lahlo@ucam.ac.ma

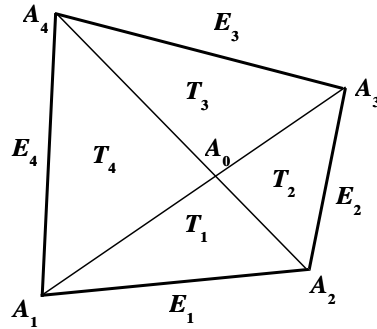


FIGURE 1.

sujet [10,15], et plus récemment les travaux de Laghchim-Lahlou et Sablonnière [8,9,11] sur les éléments finis composites). Par ailleurs, [2] et [14] ont construit des schémas dont l'ordre maximum des degrés de liberté exigé est 2 (voir aussi [12]). Leur inconvénient est la complexité de la subdivision du macro-élément initial. D'une manière générale, l'utilisation des éléments finis composites a pour but la réduction du nombre de données aux sommets de la partition du domaine initial qui entraîne une réduction de la dimension de l'espace de l'élément fini. Trouver une subdivision optimale avec un coût minimal reste à ce jour une question ouverte.

Nous cherchons à résoudre dans cet article le problème (1) par les éléments finis de type Fraeijs de Veubeke et Sander (FVS, [5]) où chaque quadrilatère $Q \in \mathcal{Q}$ est décomposé en 4 triangles suivant ses diagonales. Nous savons d'après Laghchim-Lahlou et Sablonnière [11] qu'un tel interpolant existe si et seulement si le degré du polynôme sur chaque sous-triangle est au moins égal à 7 et que l'ordre des données des dérivées aux sommets est au moins 3. Si on veut construire un élément avec un tel ordre ne dépassant pas 2, tout en respectant l'ordre de régularité global sur le domaine Ω , il est nécessaire d'introduire certaines fonctions rationnelles appropriées. Ces fonctions sont associées à certains degrés de liberté, nécessaires pour réaliser la continuité globale C^2 . Cette technique a été utilisée pour la première fois par [16] et reprise plus tard par [6] et par d'autres auteurs pour construire des éléments finis triangulaires rationnels de classe C^1 à partir des éléments polynômiaux de classe C^0 réduisant ainsi le coût en degrés de liberté par rapport à l'élément polynômial classique d'Argyris de classe C^1 [3]. On cite aussi à ce propos les travaux récents de [1] sur les éléments finis rationnels et triangulaires de classe C^k .

Nous procédons ici de la même manière. Dans la section 2, nous démontrons l'unisolvence d'un élément fini de type FVS de classe C^1 et de degré 5. Dans la section 3, nous construisons à partir de l'élément fini de la section 2 un autre élément cette fois-ci rationnel et de classe C^2 résolvant le problème (1).

2. SCHÉMA D'INTERPOLATION POLYNÔMIAL DE CLASSE C^1 ET DEGRÉ 5

Soit un quadrilatère convexe $Q = \langle A_1, A_2, A_3, A_4 \rangle$ (voir Fig. 1), A_0 désigne l'intersection des diagonales, E_l le côté $[A_l, A_{l+1}]$ et T_l le triangle $\langle A_l, A_{l+1}, A_0 \rangle$ (les indices sont comptés ici et pour toute la suite modulo 4).

Soit l'espace des splines polynômiales défini sur Q par

$$\mathbb{P}_5^3(Q) = \{v \in C^3(Q), v|_{T_l} \in \mathbb{P}_5, 1 \leq l \leq 4\}$$

où $v|_{T_l}$ est la restriction de v à T_l et \mathbb{P}_5 est l'espace des polynômes à deux variables de degré total n'excédant pas 5.

Pour la suite, on utilise la forme de Bernstein des polynômes (voir [4]). Pour une spline $v \in \mathbb{P}_5^3(Q)$, la restriction $v|_T = p$ à un des triangles $T = \langle S_1, S_2, S_3 \rangle \subset Q$ peut être exprimé sous la forme

$$p(M) = \sum_{|\mathbf{i}|=5} c_{\mathbf{i}} \frac{5!}{\mathbf{i}!} \lambda^{\mathbf{i}}$$

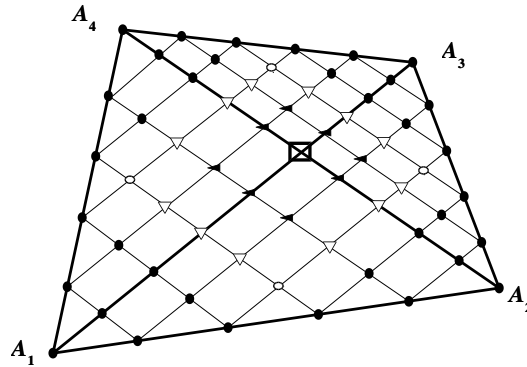


FIGURE 2.

où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont les coordonnées barycentriques d'un point $M \in T$, $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3)$ est un multi-indice avec $|\mathbf{i}| = i_1 + i_2 + i_3$, $\mathbf{i}! = i_1!i_2!i_3!$ et $\lambda^{\mathbf{i}} = \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\lambda_3^{i_3}$. Les $c_{\mathbf{i}}$, $|\mathbf{i}| = 5$ sont les B-coefficients de p , que l'on peut associer aux points $C_{\mathbf{i}} = \frac{i_1}{5}S_1 + \frac{i_2}{5}S_2 + \frac{i_3}{5}S_3$ de T . Les points $(c_{\mathbf{i}}; C_{\mathbf{i}}) \in \mathbb{R}^3$ sont les points de contrôle de la surface représentant p dans \mathbb{R}^3 . Pour simplifier, on représente usuellement p en mettant les coefficients $c_{\mathbf{i}}$ à la place des points $C_{\mathbf{i}}$ (voir Fig. 2). On suppose que les coordonnées barycentriques d'un point par rapport au triangle T_l ($1 \leq l \leq 4$) sont numérotées dans le même sens que A_l, A_{l+1}, A_0 . Enfin on désigne par $\lambda^{[l]}$ et $c_{\mathbf{i}}^{[l]}$, $|\mathbf{i}| = 5$ respectivement les coordonnées barycentriques d'un point par rapport à T_l et les B-coefficients du polynôme $p^{[l]} = v_{/T_l}$, $1 \leq l \leq 4$.

Soit ε une direction du plan. On peut identifier ε avec un vecteur $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $|\varepsilon| = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i = 0$. Notons par $D_{\varepsilon}^r f$ la dérivée directionnelle d'ordre r d'une fonction régulière f dans la direction ε . D'après [4] :

Théorème 2.1. Soit $0 \leq r \leq 5$, la dérivée $D_{\varepsilon}^r p$ est donnée par :

$$D_{\varepsilon}^r P(\lambda) = \frac{5!}{(5-r)!} \sum_{|\mathbf{i}|=5-r} c_{\mathbf{i}}(\varepsilon) B_{\mathbf{i}}^{5-r}(\lambda) \tag{2}$$

où $c_{\mathbf{i}}(\varepsilon) = \sum_{|\mathbf{j}|=r} c_{\mathbf{i}+\mathbf{j}} B_{\mathbf{j}}^r(\varepsilon)$.

Une des conséquences importantes de ce résultat est de pouvoir exprimer les B-coefficients de p en fonction des valeurs et des dérivées directionnelles de p . Par exemple celles aux sommets suivant les côtés de T . D'après [7], nous avons pour tout $|\mathbf{i}| = 5$:

$$c_{\mathbf{i}} = \sum_{j \leq i_2, k \leq i_3} \binom{i_2}{j} \binom{i_3}{k} \frac{(5-j-k)!}{5!} D_{S_2-S_1}^j D_{S_3-S_1}^k p(S_1). \tag{3}$$

D'après les conditions générales de continuité entre deux polynômes définis sur deux triangles adjacents (voir [4]), on déduit le lemme suivant :

Lemme 2.2. Supposons que $A_0 = (1-\omega)A_1 + \omega A_3 = (1-\xi)A_2 + \xi A_4$ avec $0 < \omega, \xi < 1$. La continuité C^3 entre les polynômes $p^{[1]}$ et $p^{[2]}$ le long du côté A_0A_2 par exemple est satisfaite si et seulement si pour $s = 0, 1, 2, 3$ on a :

$$c_{(k,s,5-k-s)}^{[2]} = \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} \frac{(\omega-1)^j}{\omega^s} c_{(j,k,5-j-k)}^{[1]}, \quad 0 \leq k \leq 5-s \tag{4}$$

et des conditions similaires sont respectivement satisfaites entre les B-coefficients des polynômes $p^{[2]}$ et $p^{[3]}$, $p^{[3]}$ et $p^{[4]}$, $p^{[4]}$ et $p^{[1]}$.

Pour les détails et les propriétés de cette représentation, nous renvoyons le lecteur à la référence [4].

Il a été établi dans [11] que l'élément fini classique de type FVS, de classe C^1 dont le polynôme sur chaque triangle T_l est de degré 3 est optimal dans le sens où il jouit de la propriété du plus bas degré polynômial. Cela ne nous empêche pas de construire des schémas de degré plus élevé. Nous décrivons ici un élément de classe C^1 et de degré 5 qui servira comme élément de base pour construire notre schéma rationnel de classe C^2 .

Théorème 2.3. *Pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2$ et $1 \leq l \leq 4$, soient y_l^α ; z_l des nombres réels donnés. Il existe une et une seule spline $v_Q \in \mathbb{P}_5^3(Q)$, déterminée par les conditions suivantes :*

$$\partial^\alpha v_Q(A_l) = y_l^\alpha, \quad |\alpha| \leq 2, \quad 1 \leq l \leq 4 \tag{5}$$

et

$$D_{\nu_l} v_Q(B_l) = z_l, \quad 1 \leq l \leq 4 \tag{6}$$

où D_{ν_l} désigne la dérivation suivant la direction normale ν_l à E_l et B_l est le point milieu de E_l .

Preuve (voir Fig. 2).

(a) D'après [13], nous avons $\dim \mathbb{P}_5^3(Q) = 28$. Le nombre de données (5) et (6) étant égal à 28. Pour démontrer l'unisolvence du schéma, il suffit de supposer que si ces données sont nulles alors v_Q est identiquement nulle. Puisque les données (5) sont nulles, les équations (3) conjointement avec les relations de continuité C^3 vues dans le lemme 2.2 entraînent que les B-coefficients $\left\{ c_i^{[l]}, i_1 = 3, 4, 5 \right\} \cup \left\{ c_i^{[l]}, i_2 = 3, 4, 5 \right\}, 1 \leq l \leq 4$ sont nuls, c'est à dire les coefficients \bullet .

(b) De la formule de dérivation (2), on a

$$D_{\nu_1} p^{[1]}(M) = 5 \sum_{i_1+i_2=4} c_{(i_1, i_2, 0)}(\nu_1) \binom{4}{i_1} (\lambda_1^{[1]})^{i_1} (\lambda_2^{[2]})^{i_2}, \quad \forall M \in T_1$$

avec $c_{(i_1, i_2, 0)}(\nu_1) = c_{(i_1+1, i_2, 0)}\nu_{1,1} + c_{(i_1, i_2+1, 0)}\nu_{1,2} + c_{(i_1, i_2, 1)}\nu_{1,3}$ (les $\nu_{1,j}, j = 1, 2, 3$ sont les composantes de la direction ν_1). Les coordonnées du point B_1 sont $(1/2, 1/2, 0)$; comme la donnée $D_{\nu_1} p^{[1]}(B_1)$ est supposée nulle, on a l'équation

$$c_{(4,0,0)}^{[1]}(\nu_1) + c_{(0,4,0)}^{[1]}(\nu_1) + 4 \left(c_{(3,1,0)}^{[1]}(\nu_1) + c_{(1,3,1)}^{[1]}(\nu_1) \right) + 6 \left(\nu_{1,1} c_{(3,2,0)}^{[1]} + \nu_{1,2} c_{(2,3,0)}^{[1]} + \nu_{1,3} c_{(2,2,1)}^{[1]} \right) = 0.$$

Comme ν_1 est une direction non parallèle à E_1 , $\nu_{1,3} \neq 0$. Donc $c_{(2,2,1)}^{[1]}$ (le symbole o sur la 1^{re} rangée de B-coefficients parallèle au côté E_1) peut être exprimé comme combinaison linéaire des autres coefficients de l'équation ci-dessus, lesquels sont nuls d'après la partie (a), par conséquent il est nul. Les autres coefficients $o: c_{(2,2,1)}^{[l]}, l = 2, 3, 4$ sont nuls en utilisant le même raisonnement.

Écrivons les relations de continuité C^3 (4) pour $k = 2$:

$$\begin{aligned} c_{(2,0,3)}^{[2]} &= c_{(0,2,3)}^{[1]}, \\ c_{(2,1,2)}^{[2]} &= \frac{1}{\omega} c_{(0,2,3)}^{[1]} + \left(1 - \frac{1}{\omega} \right) c_{(1,2,2)}^{[1]}, \\ c_{(2,2,1)}^{[2]} &= \frac{1}{\omega^2} c_{(0,2,3)}^{[1]} + 2 \frac{(\omega - 1)}{\omega^2} c_{(1,2,2)}^{[1]} + \left(1 - \frac{1}{\omega} \right)^2 c_{(2,2,1)}^{[1]}, \\ c_{(2,3,0)}^{[2]} &= \frac{1}{\omega^3} c_{(0,2,3)}^{[1]} + 3 \frac{(\omega - 1)}{\omega^3} c_{(1,2,2)}^{[1]} + 3 \frac{(\omega - 1)^2}{\omega^3} c_{(2,2,1)}^{[1]} + \left(1 - \frac{1}{\omega} \right)^3 c_{(2,3,0)}^{[1]}. \end{aligned}$$

Les inconnues dans ce système sont les 3 coefficients $c_{(0,2,3)}^{[1]}$, $c_{(1,2,2)}^{[1]}$ et $c_{(2,1,2)}^{[2]}$ car les autres sont déjà nuls d'après ce qui précède. Des deux dernières équations on déduit immédiatement que $c_{(0,2,3)}^{[1]} = c_{(1,2,2)}^{[1]} = 0$. Donc $c_{(2,1,2)}^{[2]} = 0$. Ces trois coefficients sont symbolisés par ∇ . Par symétrie, on déduit aussi que les autres coefficients ∇ sont également nuls. De même, les 3 B-coefficients \blacktriangleleft situés sur la rangée parallèle à la diagonale $[A_1, A_3]$ sont déterminés par continuité C^3 à travers $[A_0, A_2]$ en fonction des coefficients de \bullet et ∇ appartenant à cette rangée. Ils sont donc nuls. Par symétrie, tous les autres \blacktriangleleft sont nuls. Finalement, par continuité C^1 au point A_0 le B-coefficient \square est nul. Ainsi tous les B-coefficients de v_Q sont nuls. Donc v_Q est identiquement nulle. Ce qui achève la preuve du théorème. \square

Soit l'espace de splines défini par :

$$\mathfrak{U}(\Omega, \mathcal{Q}) = \left\{ \begin{array}{l} u \in C^1(\Omega), \quad u \text{ est de classe } C^2 \text{ aux sommets de } \mathcal{Q}, \\ u|_Q \in \mathbb{P}_5^3(Q), \quad \forall Q \in \mathcal{Q} \end{array} \right\}.$$

Théorème 2.4. Soit $f \in C^2(\Omega)$ donnée, il existe un interpolant de f unique $Pf \in \mathfrak{U}(\Omega, \mathcal{Q})$ défini par les conditions d'interpolation suivantes :

$$\partial^\alpha Pf(A_i) = \partial^\alpha f(A_i), \quad |\alpha| \leq 2, \quad 1 \leq i \leq N \quad (7)$$

et

$$D_{\nu_j} Pf(B_j) = D_{\nu_j} f(B_j), \quad 1 \leq j \leq M \quad (8)$$

où M est le nombre de côtés de \mathcal{Q} et B_j est le point milieu de chaque côté de \mathcal{Q} . De plus le projecteur d'interpolation P est exact sur l'espace des polynômes \mathbb{P}_5 .

Preuve. D'après le théorème 2.3, on peut construire sur chaque quadrilatère $Q \in \mathcal{Q}$ un interpolant d'Hermite local unique de f , que l'on note $P_Q f$ à l'aide des conditions (5) et (6). C'est-à-dire $P_Q f$ vérifie les conditions : $\partial^\alpha P_Q f(A_l) = \partial^\alpha f(A_l)$, $D_{\nu_l} P_Q f(B_l) = D_{\nu_l} f(B_l)$; $|\alpha| \leq 2$, $1 \leq l \leq 4$. En assemblant les éléments finis on obtient l'interpolant global Pf vérifiant les conditions (7) et (8). Pour montrer que $Pf \in \mathfrak{U}(\Omega, \mathcal{Q})$, il suffit de vérifier la continuité C^1 entre deux quadrilatères quelconques Q et Q' adjacents. Supposons par exemple que $Q \cap Q' = [A_1, A_2] = E_1$. On pose $g = Pf|_Q - Pf|_{Q'}$; $g|_{E_1}$ est un polynôme à une variable de degré ≤ 5 , qui est déterminé par ses valeurs et ses dérivées d'ordre 1 et 2 aux extrémités A_1 et A_2 . Comme ces dérivées proviennent des données (7), elles sont nulles. Donc $g|_{E_1}$ est identiquement nul, d'où la continuité de Pf sur E_1 . Maintenant le polynôme à une variable $D_{\nu_1} g|_{E_1}$ est de degré ≤ 4 et peut être déterminé par ses valeurs et ses dérivées premières en A_1, A_2 et par sa valeur au milieu de E_1 . Or ces degrés de liberté sont nuls à cause de (7) et (8). Donc ce polynôme est identiquement nul, d'où la continuité C^1 de Pf . Il est clair que le projecteur P est exact sur \mathbb{P}_5 puisque $\mathbb{P}_5 \subset \mathfrak{U}(\Omega, \mathcal{Q})$. \square

Comme conséquence de ce théorème, il est évident que

$$\dim \mathfrak{U}(\Omega, \mathcal{Q}) = 6N + M.$$

3. ÉLÉMENTS FINIS RATIONNELS QUADRILATÉRAUX DE CLASSE C^2

L'interpolant Pf construit dans la section précédente ne peut être de classe C^2 sur Ω . En effet, la dérivée normale d'ordre 2 i.e. $D_{\nu_i}^2 Pf$ restreinte à un côté de \mathcal{Q} est un polynôme à une variable, de variation cubique,

dépendant donc de 4 degrés de liberté. Or d'après la construction de Pf dans le théorème 2.4, on n'en dispose que de 2 : les valeurs aux extrémités de $D_{\nu_i}^2 Pf$. Pour assurer la continuité globale C^2 , il est nécessaire de connaître 2 degrés de liberté supplémentaires *i.e.* la donnée de $D_{\nu_i}^2 Pf$ en 2 points sur le côté en question. D'où la nécessité de chercher ces degrés de liberté en rajoutant des fonctions rationnelles appropriées. C'est l'objet de cette section.

Nous introduisons les notations supplémentaires suivantes.

Pour un quadrilatère quelconque $Q \in \mathcal{Q}$, soit μ_i ($1 \leq i \leq 4$) la fonction affine unique vérifiant $\mu_i(A_0) = 1$ et $\mu_i(A_i) = \mu_i(A_{i+1}) = 0$. Autrement dit, quand A_0 est considéré comme sommet du triangle T_i , μ_i est la coordonnée barycentrique d'un point $M \in Q$ par rapport à A_0 . En particulier, si $M \in A_1A_3$ (resp. $M \in A_2A_4$) alors $\mu_1 = \mu_4$ et $\mu_2 = \mu_3$ (resp. $\mu_1 = \mu_2$ et $\mu_3 = \mu_4$).

Soit P_Q l'opérateur d'interpolation polynômial dans l'espace local $\mathbb{P}_5^3(Q)$ (voir la preuve du théorème 2.3 ci-dessus).

On va construire un interpolant local $\Pi_Q f$ sous la forme :

$$\Pi_Q f = P_Q f + R_Q f$$

où $R_Q f$ est une fonction rationnelle et l'opérateur Π_Q possède les propriétés suivantes :

- (i) Π_Q doit conserver les mêmes propriétés d'interpolation que P_Q , *i.e.* $\Pi_Q P_Q = P_Q$.
- (ii) Choisir $D_{\nu_i}^k \Pi_Q f|_{E_i}$, $k = 0, 1, 2$ polynômiale de degré au plus $5 - k$.
- (iii) $D_{\nu_i}^k \Pi_Q f|_{E_i}$, $k = 0, 1, 2$ doit dépendre uniquement des données sur E_i .
- (iv) $\Pi_Q f$ est un interpolant vérifiant les conditions :

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \Pi_Q f(A_i) &= \partial^\alpha f(A_i) \text{ pour } |\alpha| \leq 2 \text{ et } 1 \leq i \leq 4 \\ D_{\nu_i} \Pi_Q f(B_i) &= D_{\nu_i} f(B_i) \text{ pour } 1 \leq i \leq 4 \\ D_{\nu_i}^2 \Pi_Q f(C_{i,j}) &= D_{\nu_i}^2 f(C_{i,j}) \text{ pour } j = 1, 2 \text{ et } 1 \leq i \leq 4. \end{aligned}$$

On a la caractérisation suivante de $\Pi_Q f$:

Théorème 3.1. *Si $\Pi_Q f$ est un interpolant de f qui satisfait les propriétés (i)–(iv) ci-dessus, alors il s'écrit sous la forme :*

$$\Pi_Q f = P_Q f + \Lambda^2 \sum_{i=1}^4 [r_{i,1} D_{\nu_i}(f - P_Q f)(C_{i,1}) + r_{i,2} D_{\nu_i}(f - P_Q f)(C_{i,2})] \tag{9}$$

où $\Lambda = \prod_{i=1}^4 \mu_i$ et $r_{i,j}$ $1 \leq i \leq 4, j = 1, 2$ sont certaines fonctions rationnelles et $C_{i,j}$, $j = 1, 2$ sont les 2 points intérieurs qui partagent E_i en 3 parties égales.

Preuve.

- (a) D'après la propriété (i)

$$\Pi_Q f = P_Q f + \Pi_Q f - \Pi_Q(P_Q f) = P_Q f + \Pi_Q(f - P_Q f).$$

Donc $R_Q f = \Pi_Q(f - P_Q f)$. Or à cause de la propriété (iv), $\Pi_Q(f - P_Q f)$ est une combinaison linéaire des $D_{\nu_i}^2(f - P_Q f)(C_{i,j})$, $1 \leq i \leq 4, j = 1, 2$ car par construction de $P_Q f$, $\partial^\alpha(f - P_Q f)(A_i) = D_{\nu_i}(f - P_Q f)(B_i) = 0$ pour $|\alpha| \leq 2$ et $1 \leq i \leq 4$.

(b) En vertu de la propriété (ii), $R_Q f|_{E_i} = \Pi_Q f|_{E_i} - P_Q f|_{E_i}$ est un polynôme à une variable de degré ≤ 5 , dont les dérivées d'ordre ≤ 2 aux extrémités de E_i sont nulles à cause de (i) ; donc $R_Q f|_{E_i}$ est identiquement nul. On écrit $R_Q f = \frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est une fraction rationnelle irréductible et p et q sont deux polynômes à 2 variables. On a alors $p|_{E_i} \equiv 0$. Par conséquent, μ_i divise p car $\mu_i = 0$ est l'équation de la droite contenant E_i .

Il vient que $R_Q f$ s'écrit $R_Q f = \mu_i \frac{\tilde{p}}{q}$ où \tilde{p} est un certain polynôme à deux variables. D'après la propriété (ii), $D_{\nu_i}(R_Q f)_{/E_i}$ est un polynôme à une variable de degré au plus 4 sur E_i . A cause de (i), sa valeur et ses dérivées d'ordre 1 aux extrémités de E_i sont nulles ainsi que sa valeur au milieu de E_i . Donc $D_{\nu_i}(R_Q f)_{/E_i} \equiv 0$. On a alors $D_{\nu_i}(R_Q f)_{/E_i} = \frac{D_{\nu_i}(\mu_i \tilde{p})}{q}_{/E_i} - \left(\mu_i \frac{\tilde{p} D_{\nu_i} q}{q^2} \right)_{/E_i} = \frac{D_{\nu_i}(\mu_i) \tilde{p} + \mu_i D_{\nu_i} \tilde{p}}{q}_{/E_i} = \frac{D_{\nu_i}(\mu_i) \tilde{p}}{q}_{/E_i}$. Par ailleurs, μ_i est un polynôme de degré 1, $D_{\nu_i}(\mu_i)$ est alors une constante non nulle (sinon μ_i serait constant suivant la direction ν_i , ce qui est absurde). Ainsi, $D_{\nu_i}(R_Q f)_{/E_i} \equiv 0$ ssi $\tilde{p}_{/E_i} \equiv 0$. Donc $R_Q f$ s'écrit $R_Q f = \mu_i^2 \frac{p^*}{q}$, où p^* est un polynôme à deux variables. Ces arguments sont valables par permutation sur l'indice i , $1 \leq i \leq 4$. Il vient que $R_Q f$ s'écrit sous la forme

$$R_Q f = \Lambda^2 \frac{\tilde{p}}{q}.$$

Conjointement avec la partie (a) de cette démonstration, on obtient la forme (9). □

Lemme 3.2. *Pour $1 \leq i \leq 4$, $j = 1, 2$, soient les fonctions définies par :*

$$\rho_{i,j}(M) = \frac{\Lambda^2 \mu_{i+1} \mu_{i+2} \mu_{i+3} l_{i,j}}{(\mu_i + \mu_{i+1})^2 (\mu_i + \mu_{i+2})^3 (\mu_i + \mu_{i+3})^2} = \Lambda^2 \chi_{i,j}(M), \tag{10}$$

si $M \neq A_i, A_{i+1}$

$$\partial^\alpha(\rho_{i,j})(A_i) = \partial^\alpha(\rho_{i,j})(A_{i+1}) = 0 \text{ pour } |\alpha| \leq 2, \tag{11}$$

où $\{l_{i,j}, j = 1, 2\}$ est la base d'interpolation de Lagrange de degré 1, à une variable aux points $C_{i,j}$, $j = 1, 2$. Soit $r_{i,j} = \frac{\chi_{i,j}}{D_{\nu_i}^2 \rho_{i,j}(C_{i,j})}$, alors l'interpolant $\Pi_Q f$ défini par la forme (9) a les propriétés suivantes pour $1 \leq i \leq 4$

- (1) $\Pi_Q f_{/E_i} \equiv P_Q f_{/E_i}$ et $D_{\nu_i} \Pi_Q f_{/E_i} \equiv D_{\nu_i} P_Q f_{/E_i}$.
- (2) $D_{\nu_i}^2 \Pi_Q f_{/E_i}$ est polynômial de degré ≤ 3 et dépend uniquement des données sur E_i .

Preuve.

(a) Remarquons d'abord que pour une fonction u , $D_{\nu_i} u = \frac{\nu_i \cdot \nu_i}{2|T_i|} \partial_{\mu_i} u$ où $|T_i|$ est l'aire du triangle T_i . Donc $D_{\nu_i} u = \text{Cte} \partial_{\mu_i} u$ où Cte est une constante non nulle. Pour étudier les dérivées de u dans la direction ν_i , il suffit de dériver par rapport à μ_i .

(b) Choisissons par exemple l'indice $i = 1$; $\rho_{1,j}$ peut se mettre sous la forme $\rho_{1,j} = \mu_1^2 \phi$ avec $\phi = (\mu_2 \mu_3 \mu_4)^2 \chi_{1,j}$. Par définition même de $\rho_{1,j}$, il est clair que $\rho_{1,j}(M) = \partial_{\mu_1} \rho_{1,j}(M) = 0$ pour tout $M \in E_1$. Examinons $\rho_{1,j/E_k}$ et $\partial_{\mu_k} \rho_{1,j/E_k}$ pour $k = 2, 3, 4$. Considérons par exemple $k = 2$. La fonction $\rho_{1,j}$ peut se factoriser par μ_2^3 à cause du facteur Λ^2 . On en déduit que $\rho_{1,j}(M) = \partial_{\mu_2} \rho_{1,j}(M) = 0$ pour $M \in E_2$ et $M \neq A_2$. Mais d'après la définition (11), on a aussi $\rho_{1,j}(A_2) = \partial_{\mu_2} \rho_{1,j}(A_2) = 0$. Le même raisonnement est appliqué sur le côté E_4 et on a $\rho_{1,j}(M) = \partial_{\mu_4} \rho_{1,j}(M) = 0$ pour tout $M \in E_4$. Il est maintenant clair que $\rho_{1,j}(M) = \partial_{\mu_3} \rho_{1,j}(M) = 0$ pour tout $M \in E_3$. Par permutation des indices, ces arguments peuvent être réappliqués sur les autres fonctions $\rho_{k,j}$, $k = 2, 3, 4$. Ceci nous montre donc que les fonctions $\Pi_Q f$ et $D_{\nu_i} \Pi_Q f$, $1 \leq i \leq 4$ restreintes au bord E_i de Q coïncident respectivement toutes avec $P_Q f$ et $D_{\nu_i} P_Q f$.

(c) On peut remarquer d'emblée déjà que $\partial_{\mu_k}^2 \rho_{1,j/E_k} \equiv 0$ pour $k = 2, 3, 4$ à cause du facteur μ_k^3 dans l'expression de $\rho_{1,j}$ et en appliquant des arguments semblables à ceux de la partie (b) pour le calcul de $\partial_{\mu_k}^m \rho_{1,j/E_k}$, $m = 0, 1$.

Calculons maintenant la dérivée $\partial_{\mu_1}^2 \rho_{1,j}$ sur le côté E_1 . On a $\rho_{1,j} = \mu_1^2 \phi$; il s'ensuit que $\partial_{\mu_1}^2 \rho_{1,j} = 2\phi + 4\mu_1 \partial_{\mu_1} \phi + \mu_1^2 \partial_{\mu_1}^2 \phi$. Donc lorsque $\mu_1 = 0$ avec $\mu_2 \mu_4 \neq 0$, $\partial_{\mu_1}^2 \rho_{1,j}(M) = 2\phi(M) = 2\mu_2 \mu_4 l_{1,j}$ pour $M \in E_1$, $M \neq$

A_1, A_2 et on a $\partial_{\mu_1}^2 \rho_{1,j}(A_1) = \partial_{\mu_1}^2 \rho_{1,j}(A_2) = 0$ par la définition (11). Comme $\mu_2(A_2) = \mu_4(A_1) = 0$, on peut affirmer que $\partial_{\mu_1}^2 \rho_{1,j}(M) = 2\mu_2\mu_4 l_{1,j}$ pour tout $M \in E_1$. Donc $\partial_{\mu_1}^2 \rho_{1,j/E_1}$ est un polynôme à une variable de degré 3. Par permutation des indices, on a des résultats analogues à celui pour $\partial_{\mu_1}^2 \rho_{1,j/E_1}$. Précisément on a $\partial_{\mu_k}^2 \rho_{i,j/E_k} \equiv 0$ pour $i = 2, 3, 4, j = 1, 2, k \neq i$ et $\partial_{\mu_i}^2 \rho_{i,j/E_i} = 2\mu_{i-1}\mu_{i+1}l_{i,j}$, i.e. un polynôme à une variable de degré 3.

(d) D'après ce qui précède $D_{\nu_1}^2 \Pi_Q f /_{E_1} = D_{\nu_1}^2 P_Q f /_{E_1} + D_{\nu_1}^2 R_Q f /_{E_1}$ est un polynôme à une variable de degré 3 dépendant des 4 degrés de liberté suivants : pour $k = 1, 2$, on a

$$D_{\nu_1}^2 \Pi_Q f(A_k) = D_{\nu_1}^2 P_Q f(A_k) + D_{\nu_1}^2 R_Q f(A_k) = D_{\nu_1}^2 f(A_k)$$

puisque $D_{\nu_1}^2 P_Q f(A_k) = D_{\nu_1}^2 f(A_k)$ et $D_{\nu_1}^2 R_Q f(A_k) = 0$. De même, en utilisant la définition des fonctions $r_{i,j}$ dans l'énoncé du lemme, l'écriture (9) devient

$$\Pi_Q f = P_Q f + \sum_{i=1}^4 \left[\frac{\rho_{i,1}}{D_{\nu_i}^2(\rho_{i,1})(C_{i,1})} D_{\nu_i}^2(f - P_Q f)(C_{i,1}) + \frac{\rho_{i,2}}{D_{\nu_i}^2(\rho_{i,2})(C_{i,2})} D_{\nu_i}^2(f - P_Q f)(C_{i,2}) \right]. \tag{12}$$

Si on calcule par exemple $D_{\nu_1}^2 \Pi_Q f(C_{1,1})$, d'après les résultats de (c), seuls les termes où $i = 1$ interviennent dans la sommation du membre de droite de l'égalité ci-dessus. De plus $D_{\nu_1}^2 \rho_{1,2}(C_{1,1}) = 0$ puisque par définition des polynômes de Lagrange $l_{i,j}, l_{1,2}(C_{1,1}) = 0$. Finalement, on obtient $D_{\nu_1}^2 \Pi_Q f(C_{1,1}) = D_{\nu_1}^2 f(C_{1,1})$. De même, on a $D_{\nu_1}^2 \Pi_Q f(C_{1,2}) = D_{\nu_1}^2 f(C_{1,2})$. Donc $D_{\nu_1}^2 \Pi_Q f /_{E_1}$ est entièrement déterminé par les données sur E_1 \square

Théorème 3.3.

(i) Soit W_Q l'espace engendré par les fonctions $\{\rho_{i,j}, 1 \leq i \leq 4, j = 1, 2\}$. On pose

$$V_Q = \mathbb{P}_5^3(Q) \oplus W_Q.$$

Alors $\dim V_Q = 36$.

(ii) Pour une fonction f assez régulière donnée, il existe un interpolant unique $\Pi_Q f \in V_Q$ satisfaisant les conditions d'interpolation suivantes :

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \Pi_Q f(A_i) &= \partial^\alpha f(A_i), \quad 1 \leq i \leq 4, |\alpha| \leq 2 \\ D_{\nu_i} \Pi_Q f(B_i) &= D_{\nu_i} f(B_i), \quad 1 \leq i \leq 4 \\ D_{\nu_i}^2 \Pi_Q f(C_{i,j}) &= D_{\nu_i}^2 f(C_{i,j}), \quad 1 \leq i \leq 4, j = 1, 2. \end{aligned} \tag{13}$$

Preuve.

(i) On sait que $\dim \mathbb{P}_5^3(Q) = 28$ et le nombre de fonctions $\rho_{i,j}$ étant égal à 8. Pour démontrer que $\dim V_Q = 36$, il suffit de vérifier que $\dim W_Q = 8$, c'est-à-dire que les $\rho_{i,j}$ sont linéairement indépendantes. Soit

$$\sum_{i=1}^4 (\alpha_{i,1} \rho_{i,1} + \alpha_{i,2} \rho_{i,2}) = 0 \tag{14}$$

où les $\alpha_{i,j}$ sont des coefficients réels. Dérivons 2 fois l'égalité (14) par rapport à μ_1 et prenons la restriction au côté E_1 . D'après les résultats du lemme 3.2, on obtient

$$2\mu_2\mu_4(\alpha_{1,1}l_{1,1} + \alpha_{1,2}l_{1,2}) = 0.$$

Puisque $l_{1,1}, l_{1,2}$ sont linéairement indépendantes, il s'ensuit que $\alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = 0$. Le même raisonnement peut être fait par rapport aux autres côtés de Q . Par conséquent, $\alpha_{i,j} = 0$ pour $1 \leq i \leq 4, j = 1, 2$.

(ii) Le nombre de données (13) est égal à $\dim V_Q$, il suffit de montrer que si ces données sont nulles, alors $\Pi_Q f$ est identiquement nul. Puisque $\partial^\alpha \Pi_Q f(A_i) = \partial^\alpha P_Q f(A_i) = 0$ pour $|\alpha| \leq 2, 1 \leq i \leq 4$ et $D_{\nu_i} \Pi_Q f(B_i) = D_{\nu_i} P_Q f(B_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq 4$, $P_Q f$ est identiquement nul d'après le théorème 2.3. Maintenant $D_{\nu_i}^2 (f - P_Q f)(C_{i,j}) = D_{\nu_i}^2 f(C_{i,j}) - D_{\nu_i}^2 P_Q f(C_{i,j}) = D_{\nu_i}^2 \Pi_Q f(C_{i,j}) - D_{\nu_i}^2 P_Q f(C_{i,j}), 1 \leq i \leq 4, j = 1, 2$. Mais $D_{\nu_i}^2 \Pi_Q f(C_{i,j})$ est nul par hypothèse et $P_Q f$ est identiquement nul ; donc $R_Q f$ l'est également d'après l'égalité (12). \square

Soit l'espace de fonctions défini par

$$\mathfrak{V}(\Omega, \mathcal{Q}) = \{v \in C^2(\Omega), v|_Q \in V_Q, \forall Q \in \mathcal{Q}\}.$$

On déduit aisément du théorème précédent un interpolant global de f dans le corollaire suivant :

Corollaire 3.4. *Soit $f \in C^2(\Omega)$ donnée, il existe un interpolant rationnel unique de f $\Pi f \in \mathfrak{V}(\Omega, \mathcal{Q})$ défini par les conditions d'interpolation suivantes :*

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \Pi f(A_i) &= \partial^\alpha f(A_i), & |\alpha| \leq 2, & 1 \leq i \leq N \\ D_{\nu_i} \Pi f(B_i) &= D_{\nu_i} f(B_i), & 1 \leq i \leq M \\ D_{\nu_i}^2 \Pi f(C_{i,j}) &= D_{\nu_i}^2 f(C_{i,j}), & 1 \leq i \leq M ; j = 1, 2 \end{aligned}$$

où les B_i sont les points définis dans le théorème 2.4 et les $C_{i,j}$ sont les 2 points équidistants de chaque côté de Q . De plus le projecteur d'interpolation Π est exact sur \mathbb{P}_5 et

$$\dim \mathfrak{V}(\Omega, \mathcal{Q}) = 6N + 3M.$$

Preuve. D'après le théorème précédent on peut construire un élément fini rationnel $\Pi_Q f$ sur chaque quadrilatère $Q \in \mathcal{Q}$. Soit Πf l'interpolant global défini par $\Pi f|_Q = \Pi_Q f, \forall Q \in \mathcal{Q}$. Pour montrer que $\Pi f \in \mathfrak{V}(\Omega, \mathcal{Q})$, il suffit de montrer que $D_{\nu_i}^2 \Pi f$ est continue le long de chaque arête $E_i, 1 \leq i \leq M$ de \mathcal{Q} . Ceci est réalisé à l'aide du lemme 3.2 où on a établi que la restriction de $D_{\nu_k}^2 \Pi_Q f$ à un côté $E_k (1 \leq k \leq 4)$ de Q dépend uniquement des données sur E_k . Par ailleurs, le projecteur Π conserve les propriétés d'interpolation du projecteur P . Donc Π est exact sur \mathbb{P}_5 . Nous avons aussi $\Pi f = f$ pour tout $f \in \mathfrak{V}(\Omega, \mathcal{Q})$. Par conséquent, $\dim \mathfrak{V}(\Omega, \mathcal{Q}) = 6N + 3M$. \square

4. CONCLUSION

On rappelle que l'élément fini quadrilatéral de classe C^2 et de degré 7 construit dans [11] est de dimension 56. Il nécessite la donnée des dérivées partielles d'ordre ≤ 3 aux sommets et respectivement sur chaque côté externe : une d.n. (dérivée normale) d'ordre 1, deux d.n. d'ordre 2 et une d.n. d'ordre 3. Il est clair que le schéma décrit dans ce travail est plus intéressant que l'élément polynômial car sa dimension est nettement inférieure : 36 au lieu de 56. En conséquence, on diminue notablement le nombre de degrés de liberté. Précisément pour l'élément rationnel nous n'avons pas besoin ni de dérivées partielles d'ordre 3 aux sommets (la partie polynômiale est seulement de degré 5), ni des dérivées normales d'ordre 3 sur les côtés.

L'espace d'interpolation global, dans lequel on assemble les éléments finis polynômiaux de [11] est de dimension $10N + 4M$ laquelle est bien supérieure à $6N + M$ la dimension de l'espace global dans le cas rationnel.

Il est probable que l'introduction des fractions rationnelles dans le procédé de construction est numériquement coûteuse lors de l'implémentation. Mais cela est peut être contrebalancé par le nombre bien réduit de paramètres à prescrire. Ce dernier point avec la question du conditionnement des bases nodales ferait l'objet d'une étude ultérieure.

REFERENCES

- [1] K.N. Agbeve, *Eléments finis triangulaires rationnels de classe C^k* . Thèse de Doctorat, Université de Nantes (1993).
- [2] P. Alfeld, A bivariate C^2 Clough-Tocher scheme. *Comput. Aided Geom. Design* **1** (1984) 257–267.
- [3] J.H. Argyris, I. Fried et D.W. Scharpf, The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method. *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society* **72** (1968) 701–709.
- [4] G. Farin, Triangular Bernstein-Bézier patches. *Comput. Aided Geom. Design* **2** (1986) 83–127.
- [5] G. Fraeijs de Veubeke, Bending and Stretching of plates, in *Conference on matrix methods in structural mechanics*, Wright Patterson A.F.B., Ohio (1965).
- [6] G. Herron, A characterisation of C^1 discrete triangular interpolants. *SIAM J. Numer. Anal.* **22** (1985) 811–819.
- [7] M.J. Lai, On dual functionals of polynomials in B-form. *J. Approx. Theory* **67** (1991) 19–37.
- [8] M. Laghchim-Lahlou et P. Sablonnière, Triangular finite elements of HCT type and class C^ρ . *Adv. Comput. Math.* **2** (1994) 101–122.
- [9] M. Laghchim-Lahlou et P. Sablonnière, C^r -finite elements of Powell-Sabin type on the three direction mesh. *Adv. Comput. Math.* **6** (1996) 191–206.
- [10] A. Le Méhauté, *Interpolation et approximation par des fonctions polynômiales par morceaux dans \mathbb{R}^n* . Thèse de Doctorat ès Sciences, Université de Rennes (1984).
- [11] M. Laghchim-Lahlou et P. Sablonnière, Quadrilateral finite elements of FVS type and class C^ρ . *Numer. Math.* **70** (1995) 229–243.
- [12] M.J. Lai et L.L. Schumaker, Scattered data interpolation using C^2 Supersplines of degree six. *SIAM J. Numer. Anal.* **34** (1997) 905–921.
- [13] L.L. Schumaker, On the dimension of spaces of piecewise polynomials in two variables, in *Multivariate Approximation Theory*, W. Schempp et K. Zeller Eds., Birkhäuser Verlag, *ISNM* **51** (1979) 396–412.
- [14] T. Wang, A C^2 quintic spline interpolation scheme on triangulation. *Comput. Aided Geom. Design* **9** (1992) 379–386.
- [15] A. Ženišek, A general theorem on triangular finite C^m -elements. *RAIRO Anal. Numér.* **8** (1974) 119–127.
- [16] O.C. Zienkiewicz, *The finite element method in structural continuum mechanics*. Mc Graw Hill, London (1967).